El corrent altern

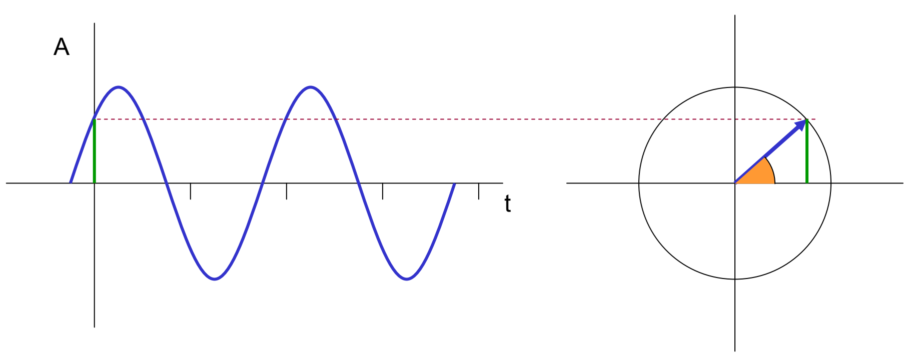
• Notació complexa de les magnituds del corrent altern.

•Balanç de potències.

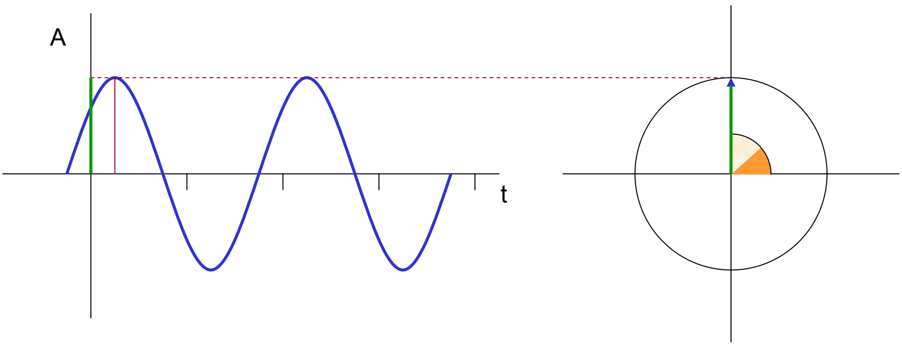
Representació de Fresnel

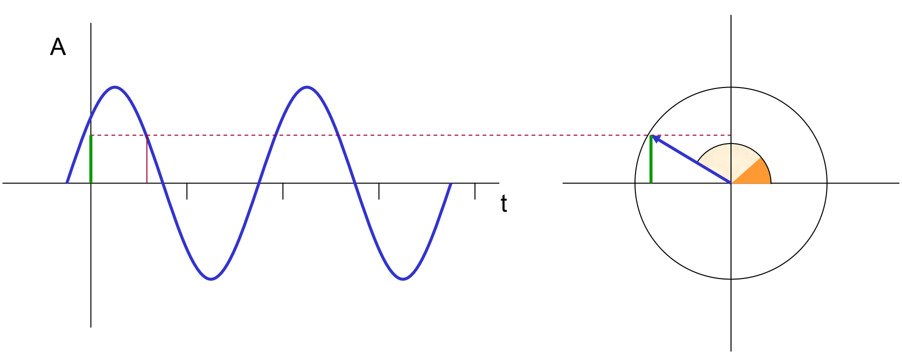
Ara aprendrem a passar de la funció sinus a l'expressió complexa, cosa que ens permetrà resoldre porblemes de corrent altern més facilment tot aplicant la llei d'Ohm del corrent continu.

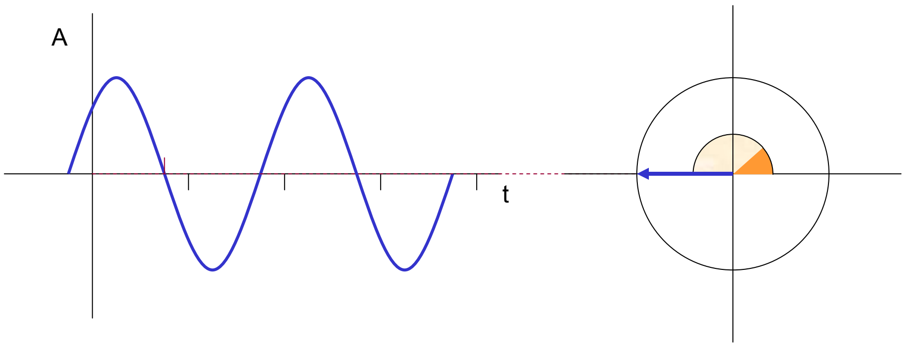
Prenem la següent funció sinusoidal: $A(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$



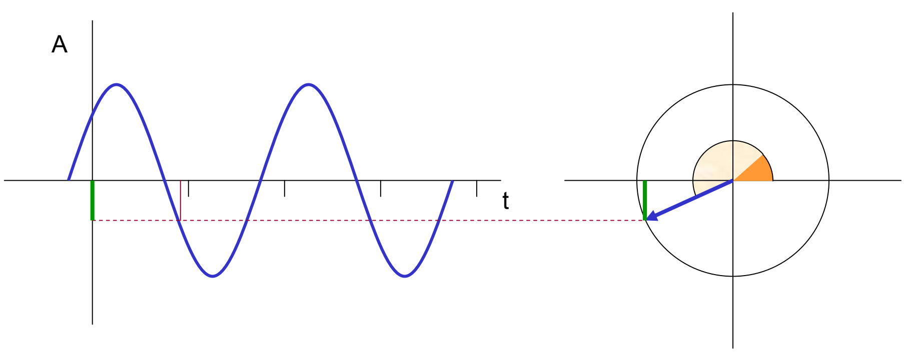
Comparem el moviment que fa el vector de la dreta amb el valor de la funció sinus a mesura que avança el temps.



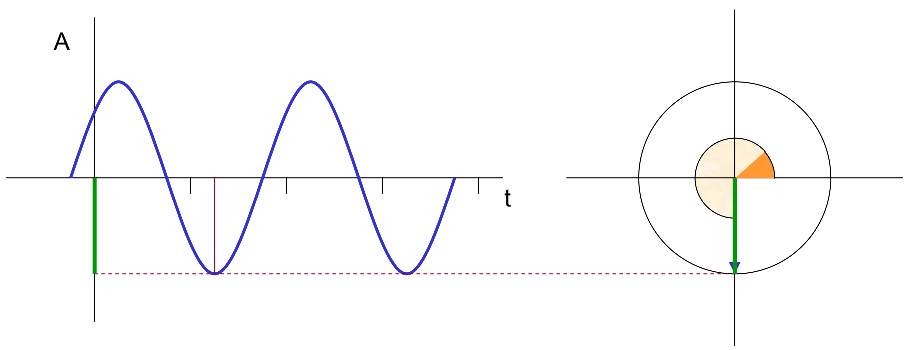


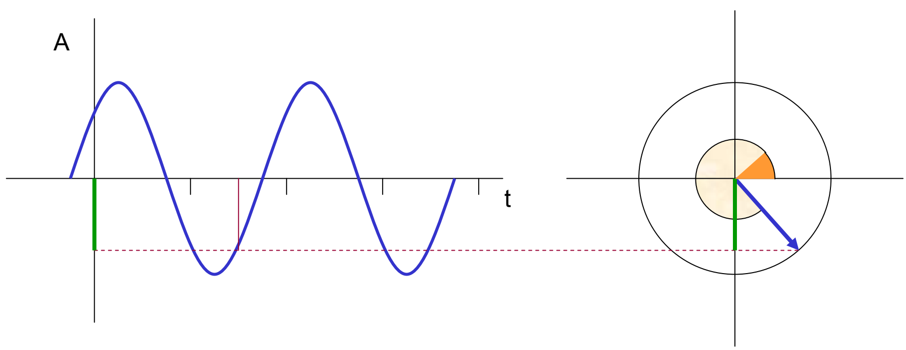


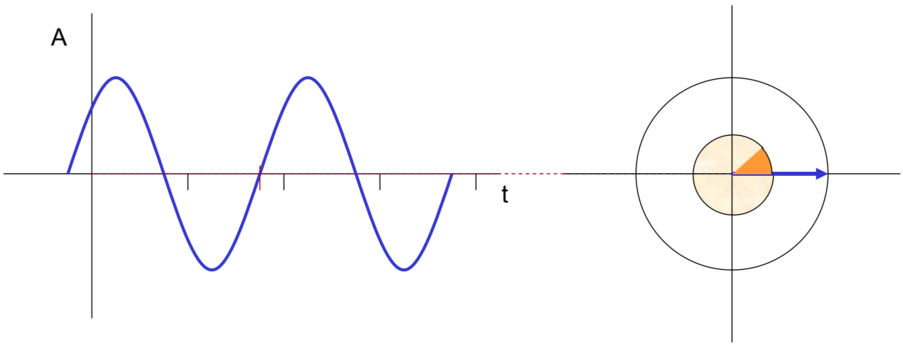
Per Roger Mauricio Grañó



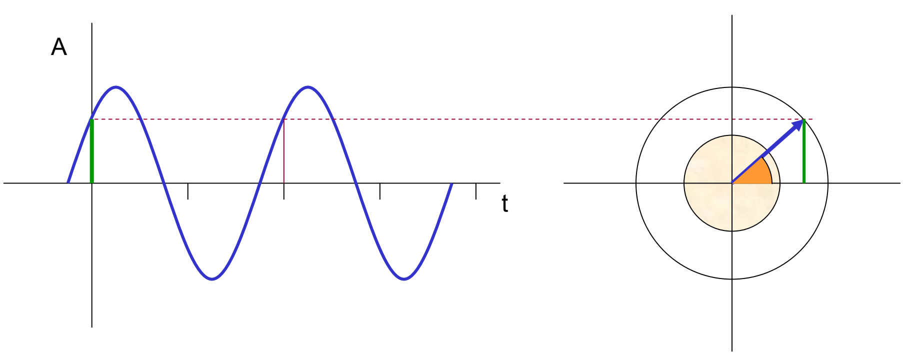
Per Roger Mauricio Grañó


A
t


A
t



Observem que una volta sensera equival a un període T de la funció sinus.
La projecció vertical del vector complex, a més, coincideix amb el valor de la funció sinus.
Així les dues expressions seran equivalents en el càlcul de les magnituds de corrent altern.



Així doncs:

Mòdul

Argument

Part real

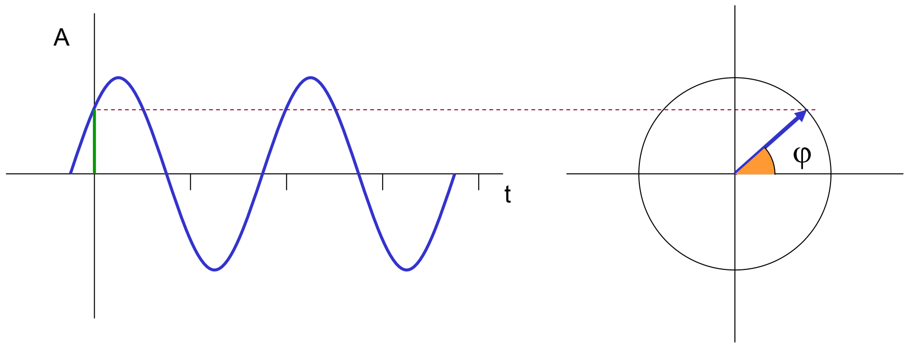
Part imaginària

$$A(t) \equiv \vec{A}$$

$$A_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \equiv A_0[\varphi] = a + j \cdot b$$

Forma polar

Forma binòmica



Operacions bàsiques amb els nombres complexos

Per poder treballar amb els nombres complexos hem de saber:

1. Operar amb ells (Suma, resta, multiplicació i divisió).
2. Expressar els nombres complexos en forma polar i binòmica, i saber passar d'una expressió a l'altra.
3. Representar gràficament els nombres complexos i representar les operacions anteriors.

Operacions bàsiques

Suma i resta: $\vec{A} \pm \vec{B} = (a_1 + j \cdot a_2) \pm (b_1 + j \cdot b_2) = (a_1 \pm b_1) + j \cdot (a_2 \pm b_2)$

Multiplicar i dividir:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_0[\varphi_A] \cdot B_0[\varphi_B] = (A_0 \cdot B_0)[\varphi_A + \varphi_B]$$

$$\frac{\vec{A}}{\vec{B}} = \frac{A_0[\varphi_A]}{B_0[\varphi_B]} = \left(\frac{A_0}{B_0}\right)[\varphi_A - \varphi_B]$$

De forma polar a binòmica

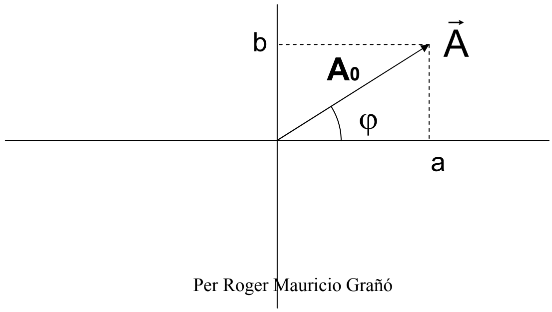
De forma polar a binòmica:

$$\vec{A} = A_0[\varphi] = a + j \cdot b$$
$$a = A_0 \cdot \cos\varphi$$
$$b = A_0 \sin\varphi$$

De binòmica a polar:

$$\vec{A} = A_0[\varphi] = a + j \cdot b$$
$$A_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}$$

Representació dels nombres polars



Expressió complexa de la resistència

Prenem les expressions de la tensió i la intensitat en una resistència pura.

$$\left.\begin{aligned} V_R(t) &= V_{R_0} \cdot \sin(\omega t) \\ I_R(t) &= I_0 \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \equiv \left\{\begin{aligned} \vec{V}_R &= V_{R_0}[0^o] \\ \vec{I}_R &= I_{R_0}[0^o] \end{aligned}\right.$$

$$\vec{V}_R = \vec{I}_R \cdot \vec{R} \Rightarrow \vec{R} = \frac{\vec{V}_R}{\vec{I}_R} = \frac{V_{R_0}[0^o]}{I_{R_0}[0^o]} = \frac{V_{R_0}}{I_{R_0}}[0^o]$$

La resistènia pura s'expressa com una part real pura. $\vec{R} = R[0^o] = R + j \cdot 0$

Expressió complexa de la reactància capacitiva

Prenem les expressions de la tensió i la intensitat en un condensador.

$$\left.\begin{aligned} V_C(t) &= V_{C_0}\cdot\sin(\omega t) \\ I_C(t) &= I_{C_0}\cdot\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_C = V_{C_0}[0^\circ] \\ \vec{I}_C = I_{C_0}[90^\circ] \end{cases}$$

$$\vec{V}_C = \vec{I}_C\cdot\vec{X}_C \Rightarrow \vec{X}_C = \frac{\vec{V}_C}{\vec{I}_C} = \frac{V_{C_0}[0^\circ]}{I_{C_0}[90^\circ]} = \frac{V_{C_0}}{I_{C_0}}[-90^\circ]$$

La reactància capacitiva s'expressa com una part imafinària pura.

$$\boxed{\vec{X}_C = X_C[-90^\circ] = 0 - j\cdot X_C} \qquad \boxed{X_C = \frac{1}{\omega\cdot C}}$$

Expressió complexa de la reactància inductiva

Prenem les expressions de la tensió i la intensitat en un condensador.

$$\left.\begin{aligned} V_L(t) &= V_{L_0}\cdot\sin(\omega t) \\ I_L(t) &= I_{L_0}\cdot\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_L = V_{L_0}[0^\circ] \\ \vec{I}_L = I_{L_0}[-90^\circ] \end{cases}$$

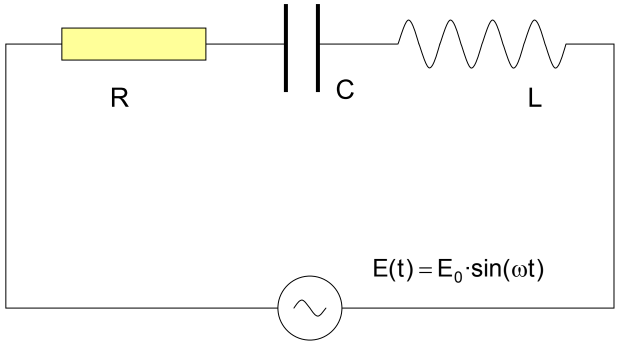
$$\vec{V}_L = \vec{I}_L\cdot\vec{X}_L \Rightarrow \vec{X}_L = \frac{\vec{V}_L}{\vec{I}_L} = \frac{V_{L_0}[0^\circ]}{I_{L_0}[-90^\circ]} = \frac{V_{L_0}}{I_{L_0}}[+90^\circ]$$

La reactància inductiva s'expressa com una part imafinària pura.

$$\boxed{\vec{X}_L = X_L[+90^\circ] = 0 + j\cdot X_L} \qquad \boxed{X_L = \omega\cdot L}$$

Exemple:

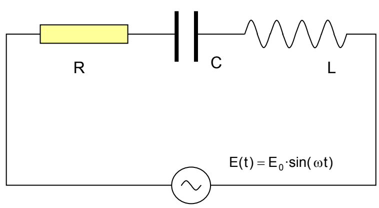
Sigui el circuit de la figura:



f = 50 Hz
E_0= 15 V
R = 30 Ω
L = 150 mH
C = 125 μF

Calculeu:

a) Les reactàncies inductiva i capacitiva
b) La impedància del circuit.
c) El corrent que circula pel circuit i la tensió a cada element
d) Representa gràficament els resultats de l'apartat anterior.
e) Dibuixa el triangle d'impedàncies



f = 50 Hz
E_0= 15 V
R = 30 Ω
L = 150 mH
C = 125 μF

a) Les reactàncies inductiva i capacitiva:

Per fer això aplicarem les fórmules de les reactàncies.

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 125 \cdot 10^{-6}} = 25{,}46\ \Omega$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f \cdot L = 2\pi \cdot 50 \cdot 150 \cdot 10^{-3} = 47{,}12\ \Omega$$

b) La impedància del circuit.

Els tres elements estan en sèrie. Aleshores la impedància és la suma complexa de reistències.

$$\vec{Z} = \vec{R} + \vec{X}_C + \vec{X}_L = (R + j \cdot 0) + (0 - j \cdot X_C) + (0 + j \cdot X_L)$$

$$= R + j \cdot (X_L - X_C) = 30 + j \cdot 21{,}66\ \Omega \Rightarrow \vec{Z} = 37{,}00\ [35{,}83^{o}]\ \Omega$$

Fixeu-vos que la impedància del circuit sèrie és:

$$\vec{Z} = \vec{R} + \vec{X}_C + \vec{X}_L = R + j\cdot(X_L - X_C)$$

I que el mòdul de la impedància queda:

$$\left|\vec{Z}\right| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

I que la fase és:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

L’expressió de la impedància i de la fase és idèntica a la trobada a partir de les expressions trigonomètriques de la tensió i la intensitat de la presentació anterior. Com podeu veure és molt més fàcil operar amb els nombres complexos.

c) El corrent que circula pel circuit i la tensió a cada element

Si apliquem la llei d’Ohm, tindrem:

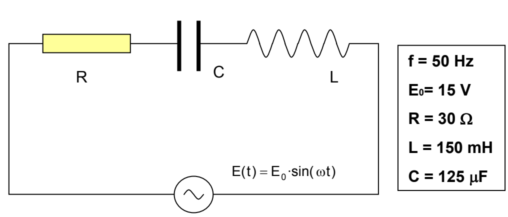
$$\vec{E} = \vec{I}\cdot\vec{Z} \Rightarrow 15[0°] = \vec{I}\cdot 37{,}00\ [35{,}83°] \Rightarrow \vec{I} = 0{,}4054\cdot[-35{,}83°]\ \text{A}$$

Per trobar la tensió a cada element, tindrem:

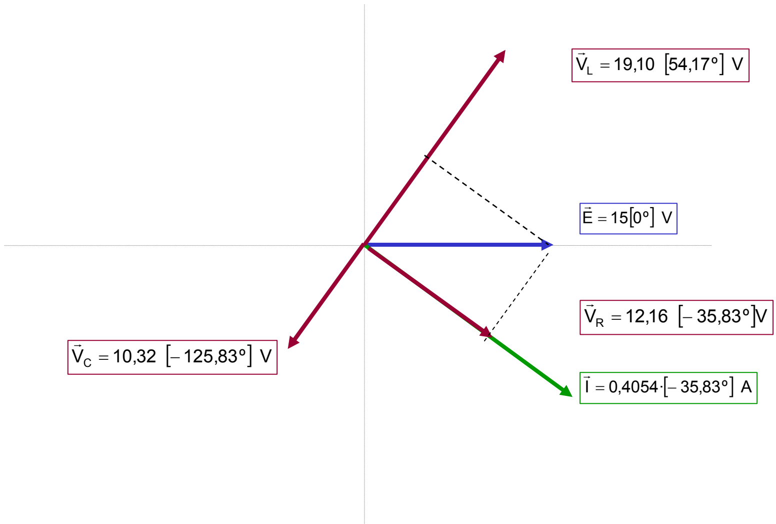
$$\vec{V}_R = \vec{I}\cdot\vec{R} \Rightarrow \vec{V}_R = 0{,}4054\ [-35{,}83°]\cdot 30\ [0°] = 12{,}16\ [-35{,}83°]\ \text{V}$$

$$\vec{V}_L = \vec{I}\cdot\vec{X}_L \Rightarrow \vec{V}_L = 0{,}4054\ [-35{,}83°]\cdot 47{,}12\ [90°] = 19{,}10\ [54{,}17°]\ \text{V}$$

$$\vec{V}_C = \vec{I}\cdot\vec{X}_C \Rightarrow \vec{V}_C = 0{,}4054\ [-35{,}83°]\cdot 25{,}46\ [-90°] = 10{,}32\ [-125{,}83°]\ \text{V}$$



d) Representa gràficament els resultats de l'apartat anterior.



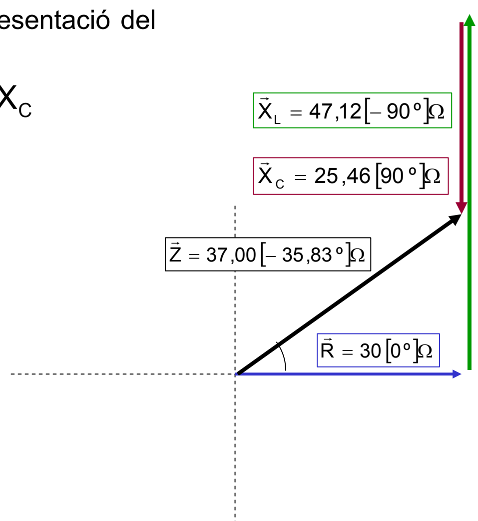
e) Dibuixa el triangle d'impedàncies

El triangle d'impedàncies és la representació del nombre complex de la impedància.

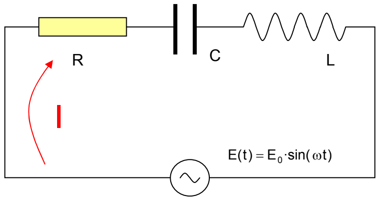
$$\vec{Z} = \vec{R} + \vec{X}_C + \vec{X}_L = R + j \cdot X_L - j \cdot X_C$$

$$\vec{Z} = 30 + 47{,}12 \cdot j\ \Omega - j \cdot 25{,}46$$

$$\vec{Z} = 37{,}00\ [35{,}83°]\ \Omega$$



Balanç de potència en els circuits de corrent altern.



Considereu el circuit de c.a. De la figura. En aquest circuit es complirà la llei d'Ohm en forma complexa, és a dir:

$$\vec{E} = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L$$

Multiplicant l'equació anterior per I, ens quedarà:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}\cdot\vec{I} = \vec{V}_R\cdot\vec{I} + \vec{V}_C\cdot\vec{I} + \vec{V}_L\cdot\vec{I} \\ \vec{I} = \vec{I}_R = \vec{I}_L = \vec{I}_C \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{I} = \vec{V}_R\cdot\vec{I}_R + \vec{V}_C\cdot\vec{I}_C + \vec{V}_L\cdot\vec{I}_L$$

Cada un dels termes que apareixen en l'equació anterior, representen les potències consumides pels diferents elements del circuit i la subministrada pel generador del circuit. Comentem-les una per una.

Potència activa: És la potència que consumeixen les resistències. S'expressa per P i es calcula fent :

$$\vec{P} = \vec{V}_R\cdot\vec{I}_R$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T V_R(t)\cdot I_R(t)\cdot dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_{R_0}\cdot I_{R_0}\cdot \sin^2(\omega t)\cdot dt = \frac{V_{R_0}\cdot I_{R_0}}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\cdot dt =$$