

Tema 3. Moviments rectilinis en una dimensió.

- 3.1.** Moviment rectilini uniforme (m.r.u.).
- 3.2.** Moviment rectilini uniformement accelerat (m.r.u.a.).
- 3.3.** Criteri de signes en els moviments rectilinis horitzontal i vertical.
- 3.4.** Gràfiques dels moviments rectilinis.
 - 3.4.1.** Gràfiques del moviment rectilini uniforme.
 - 3.4.2.** Gràfiques del moviment rectilini uniformement accelerat.
- 3.5.** Caiguda lliure.

3.1 Moviment rectilini uniforme. (m.r.u.)

El primer moviment que estudiarem és el d'una partícula que es desplaça a velocitat instantània constant (acceleració nul·la.), descrivint una trajectòria rectilínia

Com ja hem vist en els apartats anteriors quan la velocitat és constant, la velocitat mitja i la instantània coincideixen. Per tant a partir de la definició de velocitat mitja obtindrem l'equació vectorial del moviment rectilini uniforme.

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)}$$

En components ens quedarà:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x(t - t_0) \\ y &= y_0 + v_y(t - t_0) \\ z &= z_0 + v_z(t - t_0) \end{aligned}$$

Normalment el temps $t_0 = 0$. I per tant les equacions anteriors ens quedaran:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x t \\ y &= y_0 + v_y t \\ z &= z_0 + v_z t \end{aligned}$$

Exemple 1. El vector posició inicial d'una partícula és $\vec{r}_0 = \vec{j} + 2\vec{k}$ m. La partícula es mou amb una velocitat $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ m/s.

- Escriu l'equació del moviment.
- Determineu la posició de la partícula en $t = 30$ s.
- Trobeu l'equació de la trajectòria. A quina funció matemàtica correspon aquesta trajectòria?

Exemple 2. Una partícula es troba en el punt A(2,1,0) en l'instant $t = 0$ s. Es mou a velocitat cnt. Al cap de 15 segons la partícula es troba en el punt B(-5,4,-1).

- Trobeu la velocitat instantània de la partícula.
- Escriu l'equació del moviment.
- Trobeu l'equació de la trajectòria.

3.2 Moviment rectilini uniformement accelerat. (m.r.u.a.)

El segon tipus de moviment que estudiarem és el d'una partícula que descriu una trajectòria rectilínia amb una acceleració constant. Per tal que la partícula descriuï una trajectòria rectilínia l'acceleració instantània i la velocitat inicials han de ser paral·leles. En aquesta situació l'equació del moviment s'obté per integració de l'equació de la velocitat i l'equació vectorial de la velocitat l'obtenim a partir de la definició d'acceleració mitja.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)} \quad (1)$$

En components ens quedarà:

$$\begin{aligned}v_x &= v_{0x} + a_x(t - t_0) \\v_y &= v_{0y} + a_y(t - t_0) \\v_z &= v_{0z} + a_z(t - t_0)\end{aligned}\quad (2)$$

Normalment $t_0 = 0\text{s}$. Llavors ens quedarà.

$$\begin{aligned}v_x &= v_{0x} + a_x t \\v_y &= v_{0y} + a_y t \\v_z &= v_{0z} + a_z t\end{aligned}$$

L'equació vectorial de la posició s'obté integrant l'equació (1).

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

si considerem $t_0 = 0\text{s}$, ens queda:

on $\mathbf{r}_0$ és el vector posició inicial, $\mathbf{v}_0$ és el vector velocitat inicial i $\mathbf{a}$ és l'acceleració. En components tenim:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\z &= z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2\end{aligned}\quad (3)$$

De vegades però és útil usar unes equacions que relacionen la posició amb la velocitat instantània i l'acceleració de la partícula sense la necessitat que aparegui el temps explícitament. Si aïllem el temps de les equacions (2) i el substituïm en (3) de forma respectiva obtenim les següents relacions.

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

$$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$$

$$v_z^2 = v_{z0}^2 + 2a_z(z - z_0)$$

Aquestes equacions són molt útils a l'hora de resoldre alguns problemes.

Exemple 3. Una partícula inicialment en repòs, surt de l'origen de coordenades amb una acceleració $a = -2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} \text{ m/s}^2$.

- Trobeu la velocitat i la posició de la partícula segons després de sortir.
- Determineu-ne la trajectòria del moviment.

3.3 Criteri de signes en els moviments rectilinis horitzontals i verticals.

En qualsevol tipus de moviment rectilini sempre podem girar els eixos de coordenades de manera que es pugui considerar el moviment de les partícules en una sola dimensió. És molt important considerar doncs un criteri de signes.

- Moviment Horitzontal.

- Una partícula té una posició positiva ($x > 0$) si està situada a la dreta del punt origen de coordenades i si la posició és negativa ($x < 0$) estarà situada a l'esquerra.
- Si una partícula es mou d'esquerra a dreta la velocitat serà positiva. ($v > 0$). Si es mou de dreta a esquerra la velocitat serà negativa. ($v < 0$).
- Si l'acceleració i la velocitat tenen el mateix signe, llavors la partícula accelera. Si l'acceleració i la velocitat són de signes diferents llavors la partícula frena.

- Moviment vertical.

- Una partícula té una posició positiva ($y > 0$) si està situada per sobre del punt origen de coordenades. Si la posició és negativa ($y < 0$) estarà situada per sota.
- Si una partícula es mou cap amunt la velocitat serà positiva. ($v > 0$). Si es mou cap a baix la velocitat serà negativa. ($v < 0$).
- Si l'acceleració i la velocitat tenen el mateix signe, llavors la partícula accelera. Si l'acceleració i la velocitat són de signes diferents llavors la partícula frena.

3.4 Gràfiques dels moviments rectilinis.

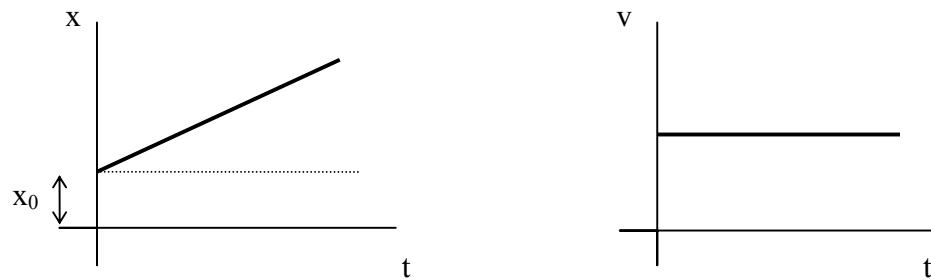
3.4.1. Gràfiques del moviment rectilini uniforme.

♦ Gràfica espai-temps ($x - t$) i velocitat-temps ($v - t$)

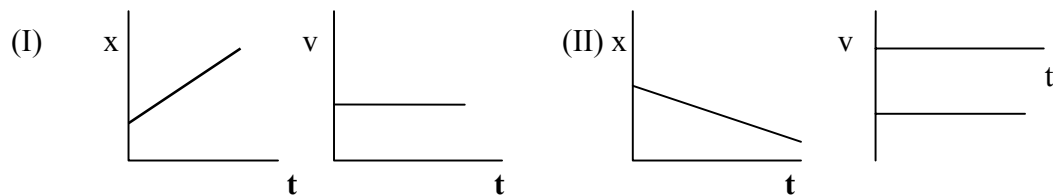
És necessari conèixer i saber interpretar les diferents corbes d'aquest tipus de moviment. Ens centrarem en el moviment rectilini uniforme en una dimensió. La característica del moviment de la partícula és el de tenir una velocitat constant ($v = \text{cnt.}$). L'equació del moviment és en aquest cas:

$$x = x_0 + v t$$
$$v = \text{cnt.}$$

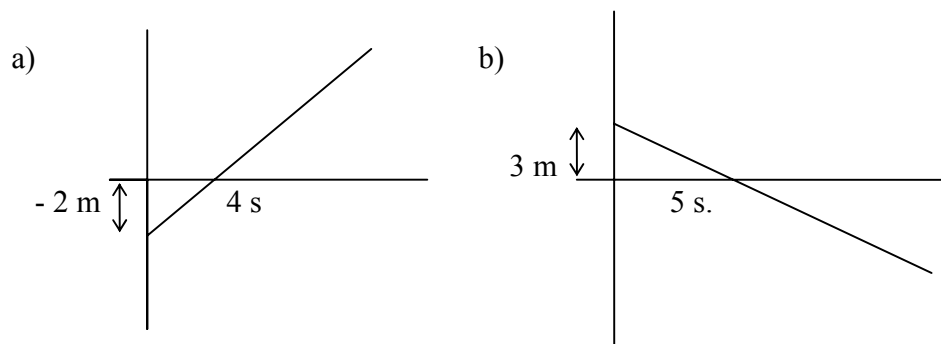
Les corbes són per tant:



Fixeu-vos com el pendent de la corba ($x-t$) ens indica la velocitat de la partícula. Si la velocitat és positiva la gràfica ($x-t$) és una recta ascendent, corresponent a (I), si la velocitat és negativa la recta és de pendent descendent, corresponent a (II).



Exemple 2. Indiqueu el signe de les característiques del moviment rectilini uniforme a partir de les seves corbes i determineu-ne el seu valor. Escriviu-ne les equacions del moviment.



3.4.2 Gràfiques del moviment rectilini uniformement accelerat.

♦ Gràfica espai-temps ($x - t$) i velocitat-temps ($v - t$)

Les corbes d'aquest moviment són més complicades ja que hi ha més punts i característiques que cal observar per poder extreure informació del seu moviment. Per fer més senzill el seu estudi considerarem les corbes del moviment rectilini uniformement accelerat en una dimensió.

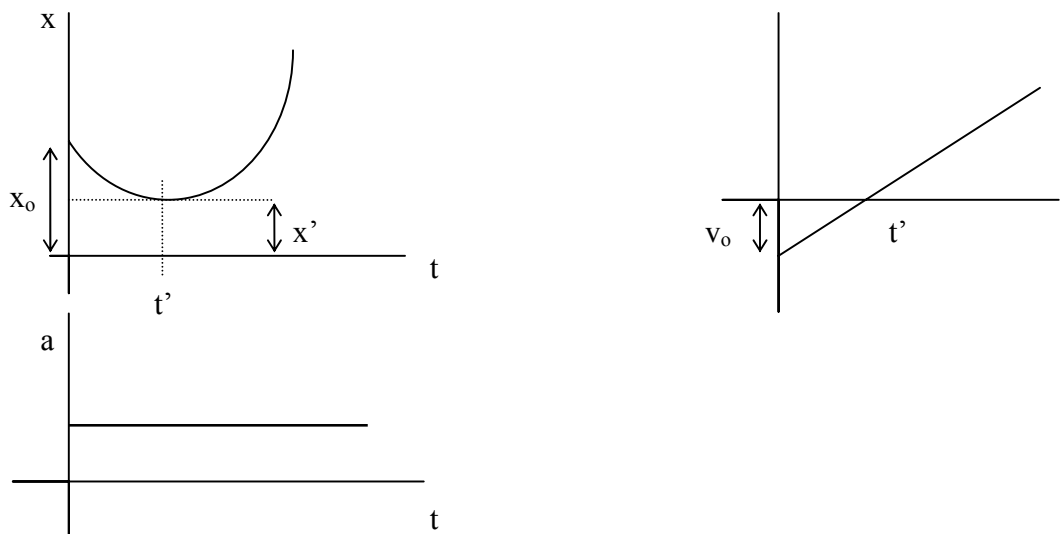
Partim igual que en l'apartat anterior de les equacions del moviment.

$$x = x_0 + v_0 t + 1/2 a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$a = \text{cnt}$$

La gràfica ($x - t$) és una paràbola i la gràfica ($v - t$) és una recta.

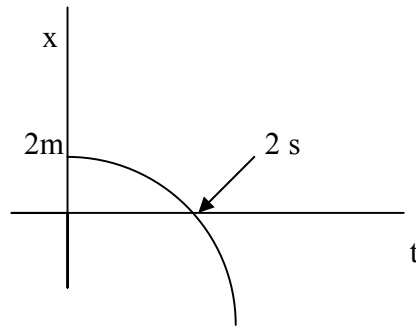


Observem que es pot saber el signe de les característiques del moviment només observant la corba ($x - t$).

- Si l'acceleració és positiva ($a > 0$) llavors la paràbola és còncaua ($\cup$). Si l'acceleració és negativa ($a < 0$) la paràbola és convexa ($\cap$).
- Si la paràbola en l'instant inicial té una inclinació ascendent, la velocitat inicial és positiva ($v_0 > 0$). Si la inclinació és descendent, la velocitat inicial és negativa

($v_0 < 0$). Si el mínim o el màxim de la paràbola coincideix amb l'eix de les y llavors la velocitat inicial és nul·la. ($v_0 = 0$).

Exemple 5. Indiqueu el signe i els valors que defineixen el m.r.u.a el qual té la següent corba. Escriviu les equacions del moviment. Dibuixeu la resta de corbes v - t i a - t .



3.5 Caiguda lliure.

Un cop coneguts els diferents tipus de moviments que s'estudien en aquest curs veurem un cas particular de moviment rectilini uniformement accelerat, la caiguda lliure.

La caiguda lliure dels cossos és deguda a l'atracció que exerceix la Terra sobre tots els objectes que es troben prop de la seva superfície. Es tracta d'un moviment accelerat vertical on el valor de l'acceleració es pot considerar constant si ens movem prop de la superfície terrestre. El seu valor es designa per la lletra g i val en mòdul¹ $9,81 \text{ m/s}^2$. Com ja veureu a segon de Batxillerat, la gravetat g no és constant si no que disminueix de valor si ens allunyem de la superfície de la Terra.

Les equacions de la caiguda lliure són les d'un moviment rectilini uniformement accelerat.

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

Cal indicar que davant de g hi posarem sempre un menys ja que segons el criteri de signes que hem vist anteriorment la velocitat és negativa i com que les partícules en caiguda lliure acceleren, l'acceleració ha de tenir el mateix signe que la velocitat.

Exemple 6. Deixem anar una pedra des d'una altura de 15 m. Calculeu:

- El temps que triga en arribar a terra.
- La velocitat amb la que arribarà a terra.

¹ per resoldre problemes es pot aproximar $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, sempre que no us indiquin el contrari.

Exemple 7. Llancem verticalment des del terra una pedra amb una velocitat inicial de 2,5m/s. Calculeu:

- a) El temps que trigarà en tornar a terra.
- b) L'altura màxima a la que arribarà la pedra.