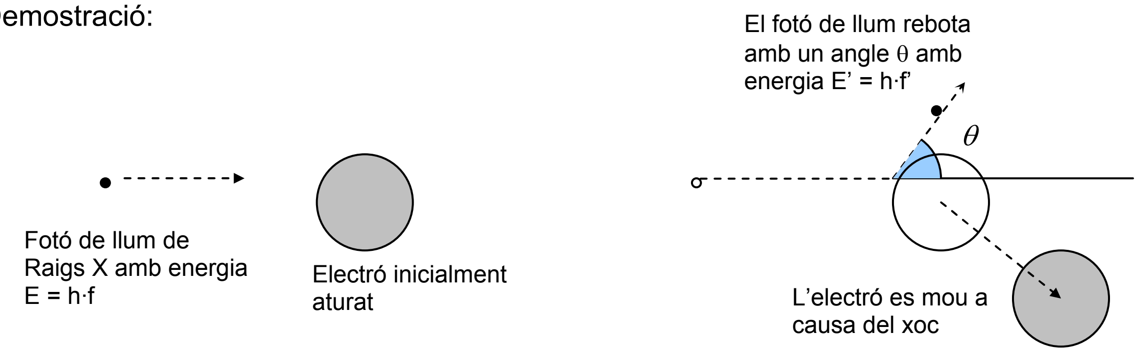
Compton va obtenir a partir dels principis de conservació de la quantitat de moviment linial ($\vec{p}_0 = \vec{p}_f$) i de l'energia cinètica ($E_{c0} = E_{cf}$), que la variació de les longituds d'ona del raig incident i del difractat estan relacionades per :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_{e^-} \cdot c}(1 - \cos\vartheta)$$

on λ i λ_0 són les longituds d'ona dels raigs difractats i incident respectivament i, h i c són la constant de Planck i la velocitat de la llum en el buit.

Aquesta relació coincideix amb els resultats experimentals obtinguts en la difracció de raigs X a través de mostres cristal·lines.

Demostració:

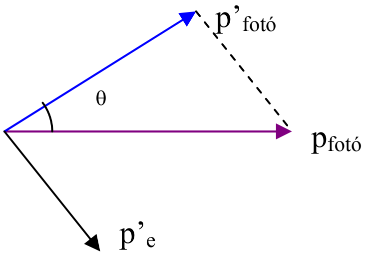


En ser el xoc perfectament elàstic, s'han de conservar la quantitat de moviment i l'energia cinètica del sistema.

$$\vec{p} = \vec{p}'$$
$$E_C = E_C'$$

La quantitat de moviment inicial s'expressa com $\vec{p} = \vec{p}_f$ i la final com $\vec{p}' = \vec{p}'_f + \vec{p}'_e$. Pel què fa a l'energia cinètica inicial tindrem $E_C = hf + E_{C_e}$ i per la final tindrem $E_C' = hf' + E_{C_e}'$. De la primera equació deduïm

$$\vec{p}_f = \vec{p}'_f + \vec{p}'_e \Rightarrow \vec{p}'_e = \vec{p}_f - \vec{p}'_{fotó}.$$



Aplicant el teorema del cosinus tindrem que $p'^2_e = p'^2_f + p^2_f - 2 p_f \cdot p'_f \cdot \cos\theta$ i tenint en compte que l'energia cinètica dels fotons es pot expressar com $h \cdot f = h\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \left(\frac{h}{\lambda}\right) \cdot c = p \cdot c$ i prenent l'equació de l'energia cinètica, escriurem:

$$E_C = E_C' \Rightarrow h \cdot f + E_{C_e} = h \cdot f' + E_{C_e}' \quad \Rightarrow$$

$$p_f \cdot c + m_e \cdot c^2 = p'_f \cdot c + \sqrt{(p'_e \cdot c)^2 + (m_e \cdot c^2)^2}$$

Si aïllem p'_e de l'expressió anterior arribarem al resultat inicial de l'efecte Compton.

$$\begin{cases} p'^2_e = p'^2_f + p^2_f - 2 p_f \cdot p'_f \cdot \cos\theta \\ p_f c + m_e \cdot c^2 = p'_f \cdot c + \sqrt{(p'_e \cdot c)^2 + (m_e \cdot c^2)^2} \end{cases}$$

$$\left[(p_f c - p'_f c) + m_e c^2\right]^2 = (p'_e \cdot c)^2 + (m_e c^2)^2$$

$$(p_f - p'_f)^2 \cdot c^2 + 2(p_f - p'_f) c \cdot m_e c^2 + \cancel{(m_e c^2)^2} = p'^2_e \cdot c^2 + \cancel{(m_e c^2)^2}$$

$$(p_f - p'_f)^2 \cdot \cancel{c^2} + 2(p_f - p'_f) \cdot c^3 m_e = p'^2_e \cancel{c^2}$$

$$(p_f - p'_f)^2 + 2(p_f - p'_f) m_e c = p'^2_e$$

Substituint a la primera equació.

$$p'^2_f + p^2_f - 2 p_f p'_f \cdot \cos\theta = (p_f - p'_f)^2 + 2(p_f - p'_f) m_e c$$

$$\cancel{p'^2_f} + \cancel{p^2_f} - 2 p_f p'_f \cos\theta = \cancel{p^2_f} + \cancel{p'^2_f} - 2 p_f p'_f + 2(p_f - p'_f) m_e c$$

$$\cancel{2} p_f p'_f (1 - \cos\theta) = \cancel{2}(p_f - p'_f) m_e c$$

$$\frac{1}{m_e c}(1 - \cos\theta) = \frac{p_f - p'_f}{p_f \cdot p'_f} \rightarrow \frac{1}{m_e c}(1 - \cos\theta) = \frac{1}{p'_f} - \frac{1}{p_f}$$

$$\frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) = \frac{h}{p'_f} - \frac{h}{p_f} \rightarrow \boxed{\frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) = \lambda' - \lambda}$$