

Quatre notes sobre relativitat.**1r concepte:**

- Tot el que heu treballat a l'assignatura de física de 1r i 2n de batxillerat és física clàssica.
- La física clàssica és vàlida per sistemes de partícules macroscòpiques i per velocitats molt més petites que les de la llum ($v \ll c$).
- Un dels principis fonamentals de la física clàssica és que la massa d'una partícula es manté inalterada quan la partícula es desplaça amb una velocitat v .
- La variació de l'energia cinètica d'una partícula que parteix del repòs és:

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{co} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

2n concepte:

- La física clàssica deixa de ser vàlida quan la velocitat d'una partícula és de l'ordre de la velocitat de la llum ($v \sim c$).
- La massa d'una partícula que es desplaça a una velocitat v ($v \sim c$) no es manté constant, sinó que varia segons la relació següent¹:

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0$$

On m és la massa de la partícula en moviment i m_0 és la massa de la partícula en repòs.

La variació de l'energia cinètica d'una partícula en moviment i que parteix del repòs es calcula amb la fórmula d'Einstein.

$$\Delta E_c = \Delta m \cdot c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \right) \cdot c^2$$

Es pot demostrar que les dues expressions de la variació de l'energia cinètica són equivalents quan la velocitat v és molt més petita que c .

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \right) \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Si tenim en compte que $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ es pot desenvolupar com una sèrie de Taylor²:

¹ A més velocitat, més massa. Si $v = c$ aleshores $m \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots$$

substituint en la variació de l'energia tindrem ...

$$\begin{aligned} \Delta E &= m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots - 1 \right) = \\ &= m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \dots \right) = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \dots \end{aligned}$$

Tal i com hem estudiat nosaltres en aquest tema les velocitats de les partícules sempre són molt més petites que la velocitat de la llum ($v \ll c$). Aleshores el terme v^4/c^2 i els d'ordre superiors són negligibles i ens queda que per a velocitats petites, l'equació d'Einstein és l'energia cinètica que tots coneixem.

$$\Delta E = m_0 \cdot c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2 \Leftrightarrow v \ll c$$

² Si una funció $f(x)$ és continua i derivable en un entorn de $x=a$ aleshores aquesta funció es pot

aproximar per un desenvolupament en sèrie de Taylor donat per : $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k f(a)}{dx^k} \cdot (x-a)^k$