TEMA 1
MOVIMENT HARMÒNIC SIMPLE

Introducció.

Quan un cos realitza una moviment que es repeteix de forma idèntica en successius intervals iguals de temps, diem que realitza un moviment periòdic. Dels moviments estudiats l'any passat un exemple d'aquest seria *el moviment circular uniforme*. En aquests tipus de moviments definim el període **T**, temps que inverteix la partícula en fer un cicle del moviment. Un cas interessant a estudiar aquests any és el moviment harmònic simple (m.h.s.).

Diem que una partícula realitza un moviment harmònic simple quan al desplaçar-se en línia recta amb un moviment de va i ve al voltant d'un punt fix, **O**, la partícula pateix una acceleració proporcional a la posició d'aquesta respecte **O**.

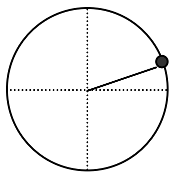
1.1. Definicions prèvies.

- **(1) Període del m.h.s**: Temps que triga la partícula en realitzar tot el cicle complert.
  $T = 2\pi / \omega$ (s'expressa en segons.)
- **(2) Freqüència del m.h.s.** Nombre de vibracions que realitza la partícula que descriu el moviment harmònic simple $\nu = 1 / T$. És l'invers del període. (S'expressa en Hz.)
- **(3) Pulsació o freqüència angular.** És la velocitat angular constant que té la partícula imaginària i que ens ajudarà a definir el m.h.s. (s'expressa en rad / s.)
- **(4) Elongació del m.h.s.** Posició entre la partícula vibrant respecte el centre de la vibració.
- **(5) Amplitud de m.h.s.** Valor extrem que pot prendre l'elongació.
- **(6) Fase.** Es l'angle que forma l'eix horitzontal amb el mòbil imaginari que realitza el m.c.u.
- **(7) Fase inicial.** Es l'angle que forma l'eix horitzontal amb el mòbil imaginari que realitza el m.c.u., en l'instant inicial de temps. (t = 0s.)

1.2. Equacions del moviment harmònic simple.

1.2.1. La posició en el moviment harmònic simple.

Per poder entendre millor l'estudi del moviment harmònic simple considerarem la projecció sobre una recta horitzontal del moviment circular uniforme d'una partícula.



Suposem que una partícula imaginària realitza un moviment circular uniforme de radi ***A*.** La partícula es troba en la posició inicial de la figura, en l'instant inicial. L'equació angular que descriu el moviment circular uniforme de la partícula imaginaria és[1]:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

[1] Veure apunts de cinemàtica del moviment circular uniforme de 1er de Batxillerat.

La projecció horitzontal del moviment circular vindrà descrita per :

$$x(t) = A\cos(\varphi)$$

on φ és la fase definida anteriorment (6). Substituint a l'equació anterior, ens queda...

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

on **x** és l'elongació (4), **A** l'amplitud (5), **ω** la velocitat angular (3), **t** el temps i **φ_0** la fase inicial (7).

Exemple 1:

Una partícula descriu un m.h.s. d'amplitud A = 3m. Considerem que la posició inicial del mòbil és x_0 = 2m i que el temps que triga aquesta partícula en realitzar un cicle complert és de 30s. a)Trobeu la fase inicial. b) Quina serà la posició de la partícula en els instants de temps t = 1s, t = 2s i t = 15s.

1.2.2. Velocitat en el moviment harmònic simple.

Sabem del curs anterior de cinemàtica que la velocitat mitjana d'una partícula entre dos punts qualssevol ve donada pel quocient entre les dues posicions en instants de temps diferents i la diferència de temps.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Fixeu-vos que si ara fem el límit quan $\Delta t \to 0$, llavors el què s'obté és la velocitat instantània en el punt x(t) en l'instant t, que no és més que la derivada de la posició respecte el temps[2].

$$v = lim\frac{\Delta x}{\Delta t} = lim\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'$$

Per tant per determinar la velocitat en el moviment harmònic simple, només ens caldrà derivar l'equació de la posició respecte el temps.

$$v = -\omega A sin(\omega t + \varphi_0)$$

Si observeu l'equació anterior, la velocitat d'una partícula que descriu un moviment harmònic simple no es manté constant si no que varia sinusoidalment[3]. A més veiem que la velocitat serà màxima o mínima, quan la partícula passi sempre pel centre de la vibració, ja

[2] Veure definició de derivada a l'assignatura de matemàtiques de 1r de Batxillerat.
[3] Fins ara només havíeu estudiat les velocitats que varien linealment amb el temps (m.r.u) o quadràticament amb el temps (m.r.u.a.)

que la fase ($\varphi = \varphi_0 + \omega t$) del moviment harmònic simple pren els valors $\pm \pi / 2$ rad i per tant sin (φ) = ± 1

Podem relacionar la velocitat instantània amb la posició del mòbil si usem la identitat trigonomètrica **$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$**.

$$v = -\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

<u>Exemple 2:</u>

Una partícula realitza un moviment harmònic simple de freqüència angular $\omega = 5\pi$ rad/s, la seva fase inicial $\varphi_0 = \pi/4$ rad i amplitud A = 4 cm. Trobeu la velocitat de la partícula a) quan aquesta es trobi a x = 2 cm, b) quan la seva fase valgui $2/3\pi$ rad i c) quan la seva elongació sigui màxima.

1.2.3. <u>Acceleració del moviment harmònic simple.</u>

L'acceleració mitjana es va definir a la cinemàtica com el quocient entre les diferències de les velocitats en dos instants de temps diferents i la diferència de temps.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Si fem el límit quan $\Delta t \rightarrow 0$ obtindrem l'acceleració instantània en cada instant de temps, quedant igual que en l'apartat anterior la definició de derivada.

$$a = lim\frac{\Delta v}{\Delta t} = lim\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$$

Per determinar l'acceleració que pateix una partícula al realitzar un m.h.s. només cal que derivem l'equació de la velocitat on apareix el temps.

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

De manera semblant al cas de la velocitat podem relacionar l'acceleració amb la posició.

$$a = -\omega^2 x$$

Adoneu-vos que l'acceleració, la velocitat i la posició estan íntimament lligades a través de la derivada de cada una d'elles respecte el temps. Si coneixem la posició d'una partícula qualsevol respecte el temps, podem conèixer la velocitat i l'acceleració instantànies d'aquesta.

L'acceleració serà màxima, mínima o nul·la quan la posició sigui la mínima (x=-A) , màxima (x=A) o nul·la (x = 0).
Fixeu-vos que en aquest moviment on l'acceleració del mòbil no es manté constant, si no que varia des d'un valor màxim o mínim als extrems del moviment harmònic simple fins que s'anul·la al punt central d'aquest.

<u>Resumint:</u>

La posició d'una partícula que realitza un moviment harmònic simple ve donada per :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

La velocitat ve donada per:

$$v = -\omega A sin(\omega t + \varphi_0)$$

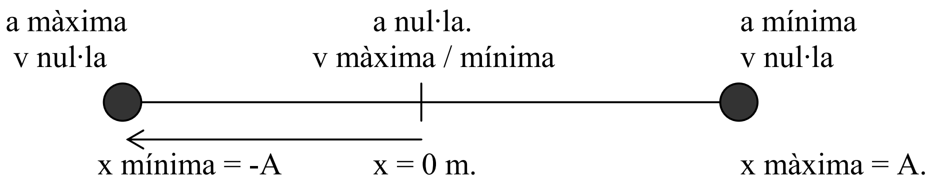
$$v = -\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

I la seva acceleració ve donada per:

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -\omega^2 x$$

Els valors màxims i mínims de la velocitat i l'acceleració en relació a la posició del mòbil els podem representar en el següent gràfic.



1.3. La llei de Hooke.

Una partícula que realitza un moviment harmònic simple acabem de veure que pateix una acceleració que varia al llarg del seu recorregut. En certs punts del trajecte l'acceleració serà màxima, mínima o nul·la. El que ara volem és determinar la força causant d'aquesta acceleració[4]. Si prenem l'equació que relaciona l'acceleració amb la posició i multipliquem per la massa de la partícula a cada costat de la igualtat ens quedarà l'expressió de la força que provoca el moviment harmònic simple.

$$a = -\omega^2\cdot x \;\Rightarrow\; m\cdot a = -(m\cdot\omega^2)\cdot x \;\rightarrow\; \boxed{\vec{F} = -k\cdot\vec{x}}$$

[4] Veure apunts de dinàmica de 1r de batxillerat

$$F = m \cdot a$$

Segons aquesta expressió cal que comuniquem una força, proporcional a l'elongació i en sentit contrari al vector posició, a una partícula per tal que aquesta realitzi un m.h.s. Podem observar que la força serà màxima quan l'elongació sigui la màxima i veurem que la força s'anul·la quan l'elongació és nul·la (punt d'equilibri). Precisament moltes molles elàstiques al ser deformades (comprimides o estirades) són capaces de proporcionar aquesta força sobre un objecte lligat a elles. Aquesta expressió es coneix com a ***llei de Hooke***[5].

- Quan l'elongació és positiva la força que actua sobre la partícula és en sentit contrari, negativa.
- Quan l'elongació és negativa la força que actua sobre la partícula és en sentit contrari, positiva.

La constant **k** s'anomena constant elàstica de la molla i està relacionada amb la massa **m** de la partícula que lliguem a la molla i la freqüència angular **ω**. (s'expressa en N/m.)

$$k = m\omega^2$$

1.4. Període del moviment harmònic simple.

Una partícula de massa **m** està lligada a l'extrem d'una molla de constant elàstica *k*. De l'equació anterior sabem...

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

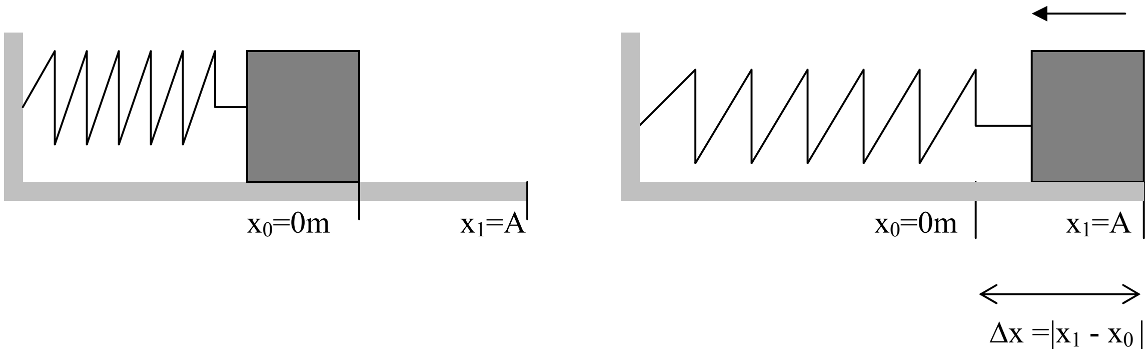
El període amb que una partícula lligada a una molla oscil·la en un moviment harmònic simple **<u>no depèn de l'amplitud del moviment</u>**, només depèn de la constant de la molla i de la massa del bloc que estigui lligat a ella. L'expressió del període és vàlida si considerem negligible la massa de la molla i si <u>no</u> actuen més forces sobre el bloc que el pes i la força que fa la molla.

1.5. Energia potencial elàstica.

Suposem que tenim un bloc de massa **m** lligat a una molla de constant elàstica **k**. Si comprimim la molla una longitud **Δx** observarem que al deixar anar el bloc aquest comença a adquirir una certa velocitat de manera que al passar pel punt d'equilibri la velocitat serà

[5] La llei de Hooke només és vàlida per elongacions petites i per tant per forces petites. Si l'elongació és gran la molla perdria la capacitat elàstica, llavors es diu que hem sobre passat el límit elàstic de la molla.

màxima. Com que en aquest punt el bloc no té acceleració la molla no proporciona cap força. La massa ha adquirit energia cinètica, qui ha proporcionat aquesta energia si la massa parteix del repòs?



Totes les forces que depenen de la posició, és a dir que el seu valor és funció de la posició de la partícula, són forces conservatives. Degut a això es pot definir una funció escalar que anomenem energia potencial elàstica[6]. Calculem doncs el treball que realitza la força elàstica quan la massa **m** es desplaça des del punt 1 fins el punt d'equilibri. Tingueu present que la força elàstica al no ser constant al llarg de tot el recorregut el treball s'ha de calcular a partir d'una integral.

$$W = \int_{x_1}^{x_0} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_0} (-kx) dx \cdot \cos 0^{\circ} = -k \int_{x_1}^{x_0} x dx = -k \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x_1}^{x_0} = -\frac{k}{2} \left[x_0^2 - x_1^2 \right]$$

Com x_0 és el punt d'equilibri $x_0 = 0$. Δx és la distància que separem la massa del punt d'equilibri, per tant $\Delta x = | x_1 - x_0 |$. On x_1 és el punt de màxima elongació de la massa, l'amplitud. Així $x_1 = +A$.

$$W = \frac{1}{2} k (x_1 - x_0)^2$$

Prenent la mateixa definició de la variació d'energia potencial usades el curs passat

$$\Delta U = -W = -\left(\frac{1}{2} k (x_1 - x_0)^2 \right)$$

$$U_0 - U_1 = 0 - U_1 = -\left(\frac{1}{2} k (x_1)^2 \right) \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2} k x_1^2$$

[6] Recordeu els temes d'energies i d'electrostàtica. La variació d'energia potencial gravitatòria /electrostàtica es defineix com el treball que realitzen la força pes/electrostàtica al desplaçar-se una massa/càrrega des d'un punt a un altre, canviat de signe.

Fixeu-vos doncs que l'energia potencial elàstica que subministra la molla quan aquesta no està realitzant cap força, és zero i que quan aquesta es comprimeix o s'estira una longitud x, l'energia potencial val:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

1.6. Energia mecànica en el moviment harmònic simple.

Com que la força elàstica és una força conservativa l'energia mecànica de la massa s'ha de conservar al llarg de totes les oscil·lacions del sistema massa-molla.

$$E_m = E_c + E_P + U = constant$$

Si el sistema massa molla oscil·la horitzontalment, i prenent com altura zero el mateix pla d'oscil·lació, l'energia potencial gravitatòria serà nul·la i l'energia mecànica serà:

$$E_m = E_c + U$$

Amb això veiem quin és el valor de l'energia mecànica en qualsevol punt de l'oscil·lació del conjunt massa molla.

$$E_m = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\left[-\omega\sqrt{A^2 - x^2}\right]^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left(m\omega^2\right)\left[A^2 - x^2\right] + \frac{1}{2}kx^2$$

Simplificant els termes iguals ens queda.

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2$$

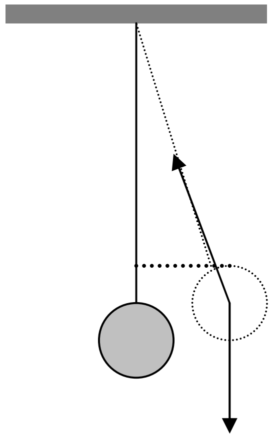
Exemple 3:

Una molla de constant **k** = 100 N/m té lligada a l'extrem una massa **m** 0,5 kg, recolzada sobre una superfície horitzontal. Estirem la molla 15 cm des del seu punt d'equilibri i deixem oscil·lar la massa lliurement. Trobeu:

a) El període i la freqüència d'oscil·lació del conjunt massa molla.
b) El temps que la massa trigarà a passar per primera vegada pel punt d'equilibri.
c) L'energia mecànica de la massa quan aquesta passi pel punt d'equilibri.
d) La velocitat de la massa quan aquesta estigui situada a 2 cm del punt d'equilibri.

1.7. Estudi del moviment del pèndol.

Considerem que tenim un pèndol de longitud **L** que sosté una massa **m** lligada al sostre tal com mostra la figura. Si l'apartem de la vertical una distància **x** observarem que comença a pendular lliurement. Si es compleix que **x** << **L** podem aproximar el moviment que descriu la massa com un moviment harmònic simple.



Considerem les forces que actuen sobre el pèndol. La segona llei de Newton s'escriurà així:

$$\vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

En components queda com

$$x: -mg \cdot sin\varphi = m \cdot a_x$$

$$y: T - mg \cdot \cos\varphi = m \cdot a_y$$

Si prenem la component x, podem aproximar[7] **sin φ ≈ φ** i a més si escrivim l'acceleració tangencial en funció de l'acceleració angular[8] $\boldsymbol{a_x = \alpha \cdot L = \varphi'' \cdot L}$ ens quedarà la component x escrita d'una altre forma.

$$-mg \cdot \varphi = m \cdot \varphi'' \cdot L$$

Si simplifiquem les masses i passem dividint la longitud del fil ens queda una equació que s'assembla molt a l'equació de l'acceleració en funció de la posició del m.h.s. ($x'' = -\omega^2 \cdot x$)

$$-\frac{g}{L} \cdot \varphi = \varphi''$$

D'aquí deduïm que per oscil·lacions petites un pèndol de longitud L, aquest oscil·la realitzant un moviment harmònic simple amb freqüència angular $\omega = (g/L)^{1/2}$. El període d'oscil·lació del pèndol serà:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Important: El període d'oscil·lació no depèn de la massa del pèndol, ni de l'angle màxim de l'oscil·lació.

[7] Com sin φ = x/L i x << L, es segueix que sin φ << 1. Quan el sinus d'un angle és molt petit el valor d'aquest es pot substituir pel valor de l'angle, expressat en radians.
[8] Igual que l'acceleració lineal, l'acceleració angular es determina derivant dues vegades respecte el temps la funció que determina la posició angular d'una partícula respecte el temps.