

TEMA 5 CAMPS CENTRALS

Definició de camp central

“Entenem per camp central a tota pertorbació generada per una partícula en tots els punts del seu entorn”. Aquest camp que designarem per \vec{C} existeix pel fet que la partícula presenta una característica en particular.

L'objecte que genera aquesta pertorbació afectarà a segones partícules que estiguin a prop seu. L'efecte que produeix la interacció del camp central \vec{C} i les segones partícules és l'aparició d'una força sobre aquestes que és proporcional a la característica de la segona partícula i al camp central \vec{C} , és a dir:

$$\vec{F} = c \cdot \vec{C}$$

Hi ha dos tipus de camps centrals que compleixen les consideracions anteriors, *el camp elèctric* \vec{E} i *el camp gravitatori* \vec{g} . En la taula adjunta apareixen les seves equivalències.

Camp central	\vec{C}	Equació del camp	$\vec{F} = c \cdot \vec{C}$	
Camp elèctric	\vec{E}	$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$	$K = 8,99 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$
Camp gravitatori	\vec{g}	$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

On K i G són les anomenades constants de Coulomb i de la gravitació universal respectivament.

5.1. El camp elèctric E. L'origen de la càrrega elèctrica

Sabem del cert que tota la matèria que forma l'univers està formada per combinacions més o menys complexes d'àtoms. Penseu que a tot l'univers només hi trobarem 103 àtoms diferents que combinats de forma adient formen tot el que existeix.

Àtom

- Escorça → Electrons
- Nucli
 - Protons
 - Neutrons

Els àtoms¹ no són immutables, contràriament al que creien el antics grecs, ja que estan formats a la vegada per partícules més petites. Bàsicament podem dir que qualsevol àtom està format per tres partícules minúscules: *els protons*, *els neutrons* i *els electrons*. Els dos primers es troben al nucli de l'àtom i els electrons es troben a l'escorça movent-se de forma aleatòria al voltant del nucli.

Gràcies a l'experimentació es va determinar que les masses dels àtoms són molt petites i en conseqüència que la força de gravitació entre àtoms és negligible. A més no es va

¹ Àtom en grec vol dir indivisible.

observar cap força entre àtoms amb el corresponent nombre d'electrons, protons i neutrons. No obstant durant l'antiga Grècia, **Tales de Milet**² al segle VII aC va observar que quan es frega un tros d'**ambre**³ amb un drap de llana, aquest era capaç d'atrapar misteriosament petites plomes i pols del terra. Aquest fenomen no va explicar fins el segle XIX. Quan freguem l'ambre amb la llana el que fem és arrancar electrons que es troben prop de la superfície del mineral provocant que el mineral es quedi amb un defecte d'aquestes partícules. Aquest fenomen s'anomena **electrització**. En estudis posteriors es va descobrir que els electrons i els protons tenen una característica intrínseca única, **la càrrega elèctrica**.

La càrrega elèctrica és una nova magnitud que es simbolitza per **Q**. La seva unitat és el **Coulomb** ([Q]=1C). La quantitat més petita de càrrega elèctrica en valor absolut que podem trobar a l'univers és la d'un electró. Ara bé en ser la càrrega d'un electró és de $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C per aconseguir una càrrega de **-1C** ens calen **$6,24 \cdot 10^{18}$** electrons.

Com que els àtoms són neutres això suggereix que les altres dues partícules que estan en el nucli, protons i neutrons, compensen la càrrega dels electrons. Concretament només els protons ho aconsegueixen, ja que els neutrons no presenten càrrega elèctrica. La càrrega d'un protó és la mateixa que la d'un electró però positiva, **$+1,6 \cdot 10^{-19}$** C ja que en un àtom neutre hi ha el mateix nombre de protons que d'electrons.

5.2. El Camp elèctric

Suposem que tenim una càrrega elèctrica en un punt de l'espai. Aquesta càrrega crea una pertorbació en tots els punts del seu voltant i afectarà a altres partícules carregades elèctricament i que estiguin prop seu. Com més gran sigui la càrrega de la partícula, major serà la pertorbació que provoca. A més la pertorbació serà menor com més lluny estiguem de la càrrega que la provoca. Aquesta pertorbació rep el nom de **camp elèctric**. El camp elèctric és de naturalesa vectorial i l'equació que millor el representa és:

$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

on **Q** és la càrrega elèctrica generadora del camp, **r** és la distància entre la càrrega i el punt on volem calcular el camp elèctric, **K** és la constant de Coulomb i el seu valor en el buit val $K = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$ i \vec{u}_r és el vector unitari que ens indica la direcció del camp elèctric.

Les unitats del camp elèctric són els Newtons dividit per Coulomb, ([E]=1N/C) o els Volts dividit per metre ([E]= 1V/m).

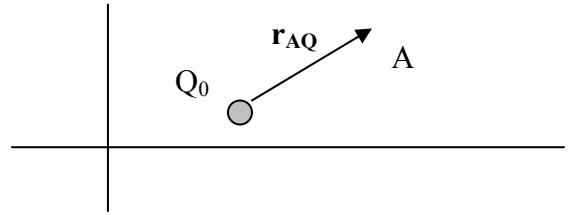
² Tales de Milet: filòsof grec nascut a la colònia grega de Milet a l'Àsia Menor.

³ Ambre (en grec *electron*): Mineral format per una resina fòssil d'arbres conífers.

5.3. Determinació del vector unitari

Per determinar el vector unitari \vec{u}_r , hem de seguir sempre els passos següents:

1. Calculeu el vector que uneix la càrrega i el punt on voleu determinar el camp elèctric. \vec{r}_{AQ}
2. Calculeu el mòdul del vector \vec{r}_{AQ} , $|\vec{r}_{AQ}|$
3. El vector unitari és el quocient entre el vector \vec{r}_{AQ} i el seu mòdul, $|\vec{r}_{AQ}|$



$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}_{AQ}}{|\vec{r}_{AQ}|}$$

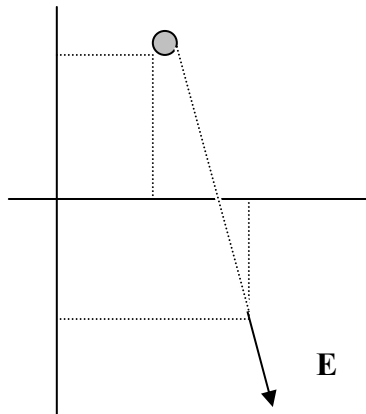
Fixeu-vos que el vector unitari presenta les següents característiques:

1. No té unitats.
2. El seu mòdul val 1.
3. És un vector que sempre va dirigit de la càrrega elèctrica cap el punt A.

EXEMPLE 1

Determineu el camp elèctric en el punt $A(4,-2)$ causada per una càrrega de $5 \mu\text{C}$ situada en el punt $(2,3)$.

Primer situeu el punt i la càrrega en uns eixos de coordenades.



$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{29} \vec{u}_r = 1551,72 \cdot \left(\frac{2\vec{i} - 5\vec{j}}{\sqrt{29}} \right) = 576,30\vec{i} - 1440,74\vec{j} \text{ N/C}$$

$$r = |\vec{r}_{AQ}| = \sqrt{(4-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{29} \text{ m}$$

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}_{AQ}}{|\vec{r}_{AQ}|} = \frac{2\vec{i} - 5\vec{j}}{\sqrt{29}}$$

Observeu que el camp elèctric és un vector atractiu (dirigit cap a la càrrega) quan la càrrega és negativa o repulsiu (de la càrrega cap el punt) quan la càrrega és positiva.

5.4. Superposició del camps elèctrics

Quan dues o més càrregues es troben en una mateixa zona de l'espai cada una d'elles crea en tots els punts del seu voltant un camp elèctric, com el que hem definit anteriorment. En un punt de l'espai només pot existir un sol camp elèctric. Aquest camp és la superposició dels camps creat de forma individual per cada una de les càrregues.

$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$$

EXEMPLE 2

Dues càrregues elèctriques $Q_A = 3 \mu C$ i $Q_B = -3 \mu C$ es troben situades en els punts $A(2,4)$ i $B(-3,-1)$. Determineu el camp total en el punt $C(0,0)$.

5.5. La llei de Coulomb

Quan dues partícules es troben situades en una mateixa regió de l'espai cada una d'elles és capaç de crear una pertorbació al voltant seu que anomenem camp elèctric. Cada una de les càrregues crearà camp elèctric en el punt on estigui situada l'altre partícula. L'existència d'aquest camp es manifesta en l'aparició d'una força sobre cada una de les càrregues elèctriques, el valor de la qual és $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.

Considerem considerem dues càrregues elèctriques Q_1 i Q_2 separades una distància r . Cada una de les càrregues crearà el camp respectiu \vec{E}_1 i \vec{E}_2 on es troba l'altra càrrega, per tant cada una de les càrregues sentirà una força a causa del camp creat per l'altra càrrega.

$$\vec{F}_{12} = Q_1 \cdot \vec{E}_2 = Q_1 \cdot K \frac{Q_2}{r^2} \vec{u}_r'$$

$$\vec{F}_{21} = Q_2 \cdot \vec{E}_1 = Q_2 \cdot K \frac{Q_1}{r^2} \vec{u}_r$$

Fixeu-vos que l'expressió de la força \vec{F}_1 i \vec{F}_2 són quasi idèntiques excepte en el vector unitari. És fàcil adonar-se'n que $\vec{u}_r = -\vec{u}_r'$ i substituint això en les equacions anteriors és pot veure que $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$ i que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. En conclusió veiem que aquestes dues forces apareixen simultàniament, és a dir que una d'elles és l'acció i l'altre la reacció.

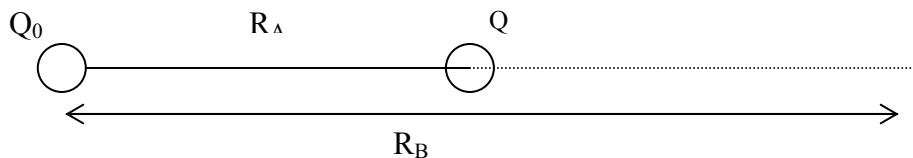
Podem expressar doncs la força entre dues càrregues com $\vec{F} = K \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \vec{u}_r$ que es coneix com **lleis de Coulomb**.

5.6. Energia potencial elèctrica.

La força provocada per dues càrregues elèctriques és una força conservativa ja que la seva expressió depèn de la posició i a més és una força central⁴. Així doncs podem definir una funció energia potencial associada a la força de Coulomb.

⁴ Veure el Tema 9 Treball i energia de 1r de batxillerat.

Considerem dues càrregues positives Q i Q_0 , separades una distància r . La càrrega Q la movem a velocitat constant des del punt A fins al B a través d'una línia recta, tal com mostra la figura.



El treball de la força de Coulomb quan movem la càrrega Q des de A fins a B ve donada per la integral següent⁵:

$$W_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

On $d\vec{r}$ són els petits desplaçaments que es mou la càrrega Q al llarg de tot el camí. Si resollem la integral ens quedarà

$$W_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{R_A}^{R_B} K \frac{Q \cdot Q_0}{r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = K \cdot Q \cdot Q_0 \int_{R_A}^{R_B} \frac{dr}{r^2} = K Q Q_0 \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_A}^{R_B} = -K \frac{Q \cdot Q_0}{R_B} - \left(-K \frac{Q \cdot Q_0}{R_A} \right)$$

Com que la força de Coulomb és una força conservativa definim la variació d'energia potencial de la càrrega Q com⁶:

$$\Delta U = -W_{AB}$$

Si tenim en compte que $\Delta U = U_B - U_A$ a partir de la definició anterior veiem que es pot escriure l'energia potencial elèctrica com:

$$W_{AB} = - \left(K \frac{Q \cdot Q_0}{R_B} - K \frac{Q \cdot Q_0}{R_A} \right) \Rightarrow U = K \frac{Q \cdot Q_0}{r}$$

$$W_{AB} = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

Heu de tenir molt present que:

- 1) L'energia potencial no és un vector sinó un escalar.
- 2) Que la distància r **NO** va elevada al quadrat.

EXEMPLE 3

Un electró gira al voltant d'un nucli d'heli descrivint òrbites circulars de radi $0,25 \text{ \AA}$. Calculeu l'energia necessària per portar l'electró des de la seva posició inicial fins a l'infinit.

⁵ Cal expressar aquest treball com una integral ja que la força electrostàtica entre dues càrregues elèctriques no es manté constant, sinó que depèn de la posició.

⁶ De forma anàloga a com es va definir l'energia potencial gravitatòria (veure els apunts del Tema 9 de 1r de batxillerat).

<p>Dades: $Q_{P+} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $Q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $l_A = 10^{-10} \text{ m}$; $1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$</p>

5.7. El potencial elèctric.

Com hem vist la força entre dues càrregues elèctriques ve donada pel producte entre la càrrega i el camp elèctric.

$$\vec{F} = K \frac{QQ'}{r^2} \vec{u}_r = Q \cdot \left(K \frac{Q'}{r^2} \vec{u}_r \right) = Q \cdot \vec{E}'$$

De forma anàloga podem fer el mateix amb l'energia potencial elèctrica.

$$U = K \frac{Q \cdot Q'}{r} = Q \cdot \left(K \frac{Q'}{r} \right) = Q \cdot V'$$

Veiem que el terme que apareix entre parèntesis el designem amb la lletra V. Aquest terme s'anomena **potencial elèctric**. El potencial elèctric és una magnitud molt útil ja que ens permetrà resoldre problemes amb major facilitat. El potencial elèctric es mesura en volts ($[V] = 1J/C = 1V$).

En resum el potencial elèctric i el camp elèctric són dues magnituds que estan íntimament relacionades. Qualsevol càrrega elèctrica crea en els punts de l'espai dues perturbacions el camp elèctric i el potencial elèctric de forma simultània.

5.8. Relació entre el camp elèctric i el potencial elèctric

Suposem que en un punt de l'espai hi ha un camp elèctric **E**. Qualsevol càrrega positiva que situem en aquest punt sentirà els efectes del camp, es a dir sentirà una força **F** en el mateix sentit de **E**. A causa de l'acció de la força **F** la càrrega accelerarà i per tant adquirirà energia cinètica. Si inicialment la càrrega restava aturada i tenint en compte que la força elèctrica sobre ella és conservativa, l'energia mecànica es conservarà. Per tant l'energia potencial elèctrica de la càrrega disminuirà. En conclusió, el potencial elèctric disminueix en la direcció del camp elèctric.

$$\exists \vec{E} \Rightarrow \vec{F} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \rightarrow \text{Força conservativa} \rightarrow E_m = \text{cnt} \rightarrow \Delta E_m = 0 \\ \Delta E_C + \Delta U = 0 \left(\Delta E_C > 0 \text{ en la direcció de } \vec{E}; \Delta U < 0 \right) \end{array} \right.$$

$$\Delta U = U_f - U_0 = Q \cdot V_f - Q \cdot V_0 = Q \cdot (V_f - V_0) < 0 \rightarrow V_f < V_0$$

Ara bé podem relacionar el potencial elèctric i el camp elèctric a través del treball de la força electrostàtica.

$$\left. \begin{array}{l} dW_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ dW_{\vec{F}} = -dU \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU \Rightarrow q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r} = -q \cdot dV \Rightarrow -\vec{E} \cdot d\vec{r} = dV$$

Aquesta relació ens ve a indicar que la diferència de potencial es pot expressar com el producte escalar del camp per un diferencial del desplaçament. Aquesta expressió és vàlida per qualsevol situació.

L'expressió se simplifica quan el camp elèctric es considera pràcticament constant. És a dir:

$$\vec{E} \approx \text{cnt.} \Rightarrow \Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{r}$$