5.9. El camp gravitatori

Una massa pertorba tots els punts del seu voltant generant un camp gravitatori en cada un d'aquests punts. Aquest camp és central i atractiu, i ve expressat per l'equació següent:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

on ***G*** és la constant de la gravitació universal que val $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$, ***r*** és la distància de la massa al punt (mesurada en metres), ***M*** és la massa que crea la gravetat (mesurada en quilograms) i $\boldsymbol{u_r}$ és el vector unitari.

La gravetat és doncs una pertorbació vectorial i les seves unitats són éls **N/kg** o $\mathbf{m/s^2}$.

EXEMPLE 4

Calculeu el valor del camp gravitatori creat pel planeta Terra just sobre els punts de la seva superfície. Dades: $M = 5{,}99 \cdot 10^{24}$ kg, R = 6.379 km.

La gravetat que ens demanen és el mòdul, ja que ens demanen simplement el valor del vector gravetat, és a dir:

$$|\vec{g}| = \left| -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r \right| = \left| -G \frac{M}{r^2} \right| \cdot |\vec{u}_r| = G \frac{M}{r^2}$$

Aleshores si calculem el valor del camp obtenim:

$$|\vec{g}| = G \frac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}99 \cdot 10^{24}}{6.379.000^2} = 9{,}81 \ {}^{m}/_{s^2}$$

EXEMPLE 5

Calculeu la gravetat a 2.000 km de la superfície de la Terra. Preneu les dades de l'exemple anterior.

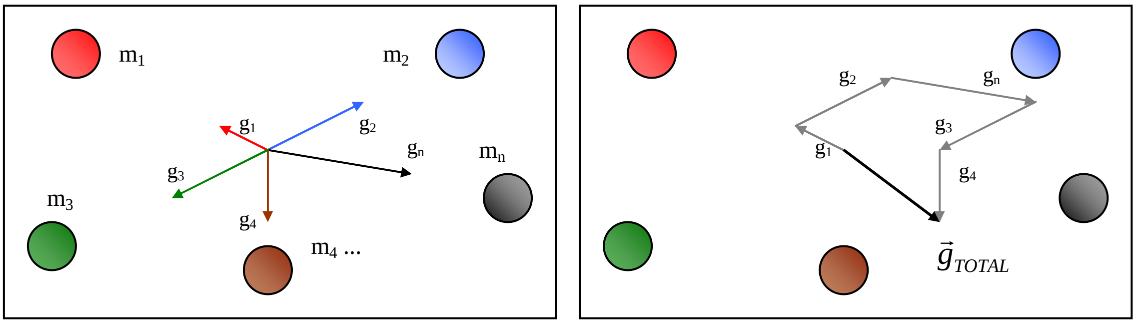
$$|\vec{g}| = G \frac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}99 \cdot 10^{24}}{(6.379.000 + 2.000.000)^2} = 5{,}69 \ {}^{m}/_{s^2}$$

Com podeu comprovar la gravetat terrestre no sempre val 9,81 m/s^2 , és a dir que com més ens allunyem del centre de la Terra, menor és el valor de la gravetat terrestre.

NOTA: Les distàncies es mesuren sempre des del centre dels planetes.

5.10. Addició de camps gravitatoris.

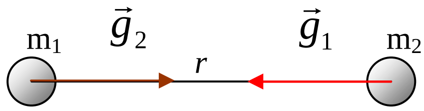
Quan en una zona de l'espai hi ha més d'una massa, cada massa pertorba els punts del seu voltant creant un camp gravitatori. Així doncs en un punt de l'espai hi hauran els efectes combinats de cada una de les masses que té al voltant.



Així doncs el camp gravitatori en un punt de l'espai és la suma dels camps individuals, és a dir:

$$\vec{g}_T = \sum_{k=1}^{n} \vec{g}_k$$

5.11. La llei de la gravitació universal de Newton.



Tal i com ja hem comentat els efectes de la gravetat sobre una segona partícula ve donada per la combinació de la seva massa i de la gravetat en el punt on es troba aquesta.

Suposem que la massa $\mathbf{m_2}$ està situada en un punt de l'espai on hi ha un camp gravitatori $\vec{g}_1$ creat per la massa $\mathbf{m_1}$. Les dues masses estan separades una distància ***r***.

La força que sentirà $\mathbf{m_2}$ val $\vec{F}_{12} = m_2 \cdot \vec{g}_1$. Anàlogament la massa $\mathbf{m_2}$ crearà un camp on està $\mathbf{m_1}$, i $\mathbf{m_1}$ setirà una força que valdrà $\vec{F}_{21} = m_1 \cdot \vec{g}_2$

$$\vec{F}_{12} = m_2 \cdot \vec{g}_1 = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$\vec{F}_{21} = m_1 \cdot \vec{g}_2 = -G \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{r^2} \cdot \vec{u}'_r$$

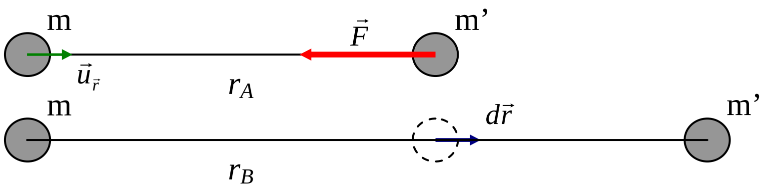
Els vectors unitaris compleixen la relació següent $\vec{u}_r = -\vec{u}'_r$ i per tan les dues forces anteriors són iguals en valor i contràries en sentit. L'expressió general d'aquesta força s'anomena ***llei de la gravitació universal de Newton***.

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

5.12. L'energia potencial gravitatòria de dues partícules.

En ser la força de la gravetat $\vec{F} = -G \frac{m \cdot m'}{r^2} \cdot \vec{u}_r$ una força conservativa, tindrà associada una funció escalar anomenada ***energia potencial gravitatòria***. Aquesta energia potencial està relacionada amb $\vec{F}$ a través del seu treball, és a dir $\Delta U = -W_{\vec{F}}$.

Suposem que dues masses amb valors **m** i **m'** estan separades una distància $\boldsymbol{r_A}$.



Ara desplacem **m’** fins el punt B que dista $\boldsymbol{r_B}$ de **m.** El treball de la força de la gravetat entre els punts A i B val :

$$W_{\vec{F}} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{m\cdot m'}{r^2}\vec{u}_{\vec{r}}\cdot d\vec{r} = -G\cdot m\cdot m'\cdot\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\cdot dr\cdot\cos 0^{o} = -\ G\cdot m\cdot m'\cdot\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\cdot dr =$$

$$-\ G\cdot m\cdot m'\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg]_{r_A}^{r_B} = -G\cdot m\cdot m'\cdot\left(-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_A}\right)$$

En estar el treball entre A i B relacionat amb l’energia potencial gravitatòria, tindrem:

$$\left.\begin{aligned} W_{\vec{F}} &= -\Delta U = -(U_B - U_A) \\ W_{\vec{F}} &= -G\cdot m\cdot m'\cdot\left(-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_A}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow -(U_B - U_A) = -G\cdot m\cdot m'\cdot\left(-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_A}\right) = G\cdot\frac{m\cdot m'}{r_B} - \left(G\cdot\frac{m\cdot m'}{r_A}\right)$$

$$U_B - U_A = -G\cdot\frac{m\cdot m'}{r_B} - \left(-G\cdot\frac{m\cdot m'}{r_A}\right)$$

Comparant terme a terme, ens queda que l’energia potencial gravitatòria és:

$$U = -G\cdot\frac{m\cdot m'}{r}$$

EXEMPLE 6

Demostreu per a l’exemple anterior que l’equació aproximada de l’energia potencial gravitatòria es dedueix a partir de l’equació correcte de l’energia potencial gravitatòria.

$$\Delta U = U_f - U_0 = -G\cdot\frac{M_T\cdot m}{r_f} - \left(-G\cdot\frac{M_T\cdot m}{r_0}\right) = -G\cdot M_T\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_0}\right) = -\left(G\cdot\frac{M_T}{R_T^2}\right)\cdot R_T^2\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_0}\right)$$

$$= -g\cdot R_T^2\cdot m\cdot\left(\frac{1}{R_T+h}-\frac{1}{R_T}\right) = -m\cdot g\cdot R_T^2\cdot\left(\frac{1}{R_T+h}-\frac{1}{R_T}\right) = -m\cdot g\cdot R_T^2\cdot\left(\frac{R_T-(R_T+h)}{R_T\cdot(R_T+h)}\right) = -m\cdot g\cdot R_T^2\cdot\left(\frac{-h}{R_T^2+h\cdot R_T}\right)$$

$$= -m\cdot g\cdot R_T\cdot\left(\frac{-h}{R_T\cdot(R_T+h)}\right) = m\cdot g\cdot\left(\frac{h}{1+\frac{h}{R_T}}\right)$$

Aleshores, si $h << R_T$ tenim: $\Delta U = \lim\limits_{\frac{h}{R_T}\to 0} m\cdot g\cdot\left(\dfrac{h}{1+\frac{h}{R_T}}\right) = m\cdot g\cdot h$

EXEMPLE 7

Disparem verticalment des del nivell del mar un projectil de massa $\boldsymbol{m = 25\ kg}$*, observant que assoleix una altura de 150 m. Calculeu la variació d’energia potencial gravitatòria que pateix el projectil en qüestió.*

a) *Usant l’equació correcte de l’energia potencial gravitatòria.*
b) *Usant l’equació aproximada de l’energia potencial gravitatòria (mgh)*

Dades: $M_{TERRA} = 5{,}99\cdot 10^{24}$ *kg i* $R_{TERRA} = 6.379$ *km.*

5.13. El potencial gravitatori

La força gravitacional sobre una massa ve donada per la llei de la gravitació universal, $\vec{F} = -G\cdot\frac{m\cdot m'}{r^2}\cdot\vec{u}_{\vec{r}}$, podem escriure el camp gravitatori com $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\cdot\frac{m\cdot m'}{r^2}\cdot\vec{u}_{\vec{r}}}{m} = -G\cdot\frac{m'}{r^2}\cdot\vec{u}_{\vec{r}}$.
Així doncs podem fer el mateix amb l'energia potencial gravitatòria, si la dividim per la massa d'una de les dues partícules:

$$U = -G\cdot\frac{m\cdot m'}{r} = m\left(-G\frac{m'}{r}\right) \Rightarrow \frac{U}{m} = -G\cdot\frac{m'}{r} \Rightarrow \begin{cases} V = \frac{U}{m} \\ V = -G\cdot\frac{m'}{r} \end{cases}$$

Aquest quocient entre l'energia potencial gravitatòria i la massa s'anomena *potencial gravitatori* i la unitat que li correspon és [V]=1 J/kg.

En resum, una massa m genera en tots els punt de l'espai dues pertorbacions (el camp gravitatori i el potencial gravitatori) que depenen de la distància entre la massa i el punt, i el valor de la massa.

$$g = -G\cdot\frac{m}{r^2}\cdot\vec{u}_{\vec{r}}$$

$$V = -G\frac{m}{r}$$

5.14. Relació entre el camp gravitatori i el potencial gravitatori

Suposem que en un punt de l'espai hi ha un camp gravitatori $\vec{g}$. Qualsevol massa que situem en aquest punt sentirà els efectes del camp, es a dir sentirà una força $\vec{F}$ en el mateix sentit de $\vec{g}$. A causa de l'acció de la força $\vec{F}$ la massa accelerarà i per tant adquirirà energia cinètica. Si inicialment la massa restava aturada i tenint en compte que la força gravitacional sobre ella és una força conservativa, l'energia mecànica de la massa es conservarà. Per tant l'energia potencial gravitatòria de la càrrega haurà de disminuir. En conclusió, el potencial gravitatori disminueix en la direcció del camp gravitatori.

$$\exists\vec{g} \Rightarrow \vec{F}\begin{cases} \vec{F} \to \text{Força conservativa} \to E_m = \text{cnt} \to \Delta E_m = 0 \\ \Delta E_C + \Delta U = 0 \ \left(\Delta E_C > 0 \ \text{ en la direcció de } \vec{E} \ ; \ \Delta U < 0\right) \end{cases}$$

$$\Delta U = U_f - U_0 = m\cdot V_f - m\cdot V_0 = m\cdot(V_f - V_0) < 0 \to V_f < V_0$$

Ara bé podem relacionar el potencial i el camp gravitatoris a través del treball de la força gravitacional.

$$\left.\begin{array}{l} dW_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ dW_{\vec{F}} = -dU \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dU \Rightarrow m\cdot\vec{g}\cdot d\vec{r} = -m\cdot dV \Rightarrow -\vec{g}\cdot d\vec{r} = dV$$

Aquesta relació ens ve a indicar que la diferència de potencial gravitatori es pot expressar com el producte escalar del camp gravitatori per un diferencial del desplaçament. Aquesta expressió és vàlida per qualsevol situació.

L'expressió se simplifica quan el camp gravitatori es considera pràcticament constant. És a dir:

$$\vec{g} \approx cnt. \Rightarrow \Delta V = -\vec{g} \cdot \Delta \vec{r}$$

EXEMPLE 8

En una zona de l'espai existeix un camp pràcticament constant i de valor g = 5,2 m/s²^{2}. Situem en el si del camp una massa de 25 kg, calculeu:

a) *La força que actua sobre la massa en qüestió.*
b) *La variació de l'energia potencial gravitatoria que pateix la massa en moure's una distància de 11 m.*
c) *La velocitat que adquireix la massa si inicialment estava aturada.*

5.15. Energia mecànica d'un sistema lliure de partícules puntuals.

Imaginem que tenim un sistema de tres partícules que estan distribuïdes a l'atzar i que es mouen per l'espai amb velocitats diferents. Aquestes partícules per causa de l'atracció gravitatòria mútua, interactuen entre si.

Anem ara a calcular l'energia mecànica associada al sistema de partícules. Segons ja coneixeu l'enegia mecànica d'un sistema de partícules ve donat per la suma de les energies individuals de cada partícula

$$\Delta E_m = \Delta E_{m1} + \Delta E_{m_2} + \Delta E_{m_3}$$

Sabem que la variació d'energia mecànica serà la suma dels treballs de les forces no conservatives

$$\Delta E_{mj} = \sum W_{F_{NC}}$$

Considerem doncs que tenim tres partícules que es mouen amb velocitats v_1, v_2 i v_3 . Aquestes masses sentiran l'acció de les forces gravitatòries que són conservatives. Per tant ens quedarà:

$$\Delta E_{m1} = \Delta E_{c1} + \Delta U_1 = 0$$
$$\Delta E_{m2} = \Delta E_{c2} + \Delta U_2 = 0$$
$$\Delta E_{m3} = \Delta E_{c3} + \Delta U_3 = 0$$

De cada una de les equacions anteriors traurem:

$$\Delta E_{c1} = -\Delta U_1$$
$$\Delta E_{c2} = -\Delta U_2$$
$$\Delta E_{c3} = -\Delta U_3$$

Per altra banda podem aplicar el teorema de les forces vives[1]. Si fem això ens quedarà:

$$\Delta E_{c1} = \sum W_{F_1} \Rightarrow \Delta E_{c1} = W_{F_{21}} + W_{F_{31}}$$
$$\Delta E_{c2} = \sum W_{F_2} \Rightarrow \Delta E_{c2} = W_{F_{12}} + W_{F_{32}}$$
$$\Delta E_{c3} = \sum W_{F_3} \Rightarrow \Delta E_{c3} = W_{F_{13}} + W_{F_{23}}$$

En ser el treball la integral de la força per tot el diferencial del desplaçament, tindrem:

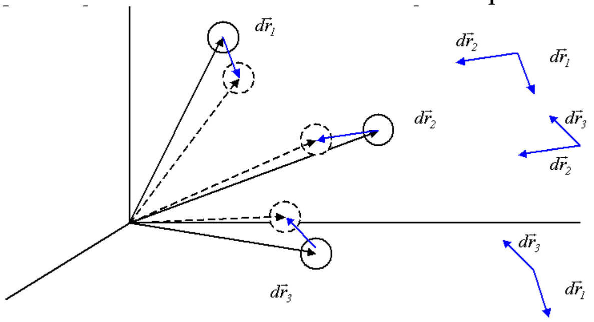
$$\Delta E_{C_1} = \int \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 + \int \vec{F}_{31} \cdot d\vec{r}_1$$
$$\Delta E_{C2} = \int \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 + \int \vec{F}_{32} \cdot d\vec{r}_2$$
$$\Delta E_{C3} = \int \vec{F}_{13} \cdot d\vec{r}_3 + \int \vec{F}_{23} \cdot d\vec{r}_3$$

$$\Delta E_C = \int \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}\right) d\vec{r}_1 + \int \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}\right) d\vec{r}_2 + \int \left(\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}\right) d\vec{r}_3$$

Les forces que apareixen en el desenvolupament són les forces gravitatòries entre partícules (dos a dos), per tant són forces conservatives. A més les forces compliran la tercera llei de Newton $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ij}$ i el desenvolupament anterior ens quedarà:

$$\Delta E_C = \int \vec{F}_{12}\left(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2\right) \cdot + \int \vec{F}_{23}\left(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_3\right) \cdot + \int \vec{F}_{31} \cdot \left(d\vec{r}_3 - d\vec{r}_1\right)$$

En el diagrama s'aprecia millor cada un dels termes de l'equació anterior.



Cada una de les integrals anteriors representen el treball de la força conservativa en la direcció que uneix dues de les càrregues anteriors. Aquest treball és precisament l'energia potencial gravitatòria de dues masses.

$$\Delta E_C = -\Delta U_{12} - \Delta U_{23} - \Delta U_{13}$$

Si passem tots els termes a l'altra banda ens quedarà:

$$\Delta E_C + \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{13} = 0$$

Que és exactament la variació d'energia mecànica.

$$\left(E_C + U_{12} + U_{23} + U_{13}\right)_f - \left(E_C + U_{12} + U_{23} + U_{13}\right)_0 = 0$$
$$\Delta E_m = 0$$

En definitiva, l'energia mecànica d'un sistema de partícules és la suma de les energies cinètiques i les energies potencials gravitatories dos a dos

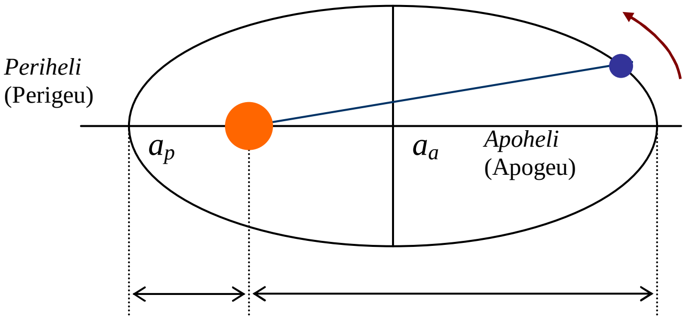
$$\boxed{E_m = \sum_{K=1}^{N} E_K + \sum_{K<L} U_{KL}}$$

[1] veure el tema 9 dels apunts de física de primer de batxillerat.

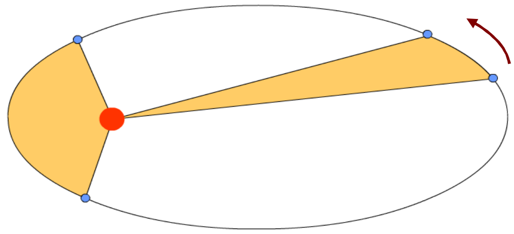
5.16. Les lleis de Kepler.

Entre els anys 1600 i 1620 Johanes Kepler va deduir les tres lleis fonamentals que permeten explicar el moviment dels planetes al voltant del Sol. La seva deducció va ser totalment experimental a partir de les observacions astronòmiques molt precises de la trajectòria del planeta Mart. Les dades astronòmiques eren anotacions de l'astrònom italià Ticho Brahe. Així doncs el moviment dels planetes al voltant del Sol o dels satèl·lits al voltant d'un planeta es resumeixen en tres lleis.

1. Tots els planetes (*satèl·lits*) descriuen òrbites el·liptiques amb el Sol (*planeta*) situat en un dels focus de l'el·lipse.



2. La recta que uneix el planeta (*satèl·lit*) i el Sol (*planeta*) escombra àrees iguals en temps iguals.



3. El quadrat del període orbital el·líptic del planeta (*satèl·lit*) al voltant del Sol (*planeta*) és proporcional al cub del semieix de la trajectòria el·líptica descrita.

$$T^2 = C\langle a\rangle^3$$

$$\langle a\rangle = \frac{a_p + a_a}{2}$$

Aquesta constant de proporcionalitat depèn de la massa de l'objecte central, mai de la massa de l'objecte que gira. El seu valor de la constant és $C = \frac{4\cdot\pi^2}{G\cdot M}$

EXEMPLE 9

Determineu la massa del Sol si el període de la Terra és d'1 any i la distància promig entre la terra i el Sol és de 150.000.000 km.

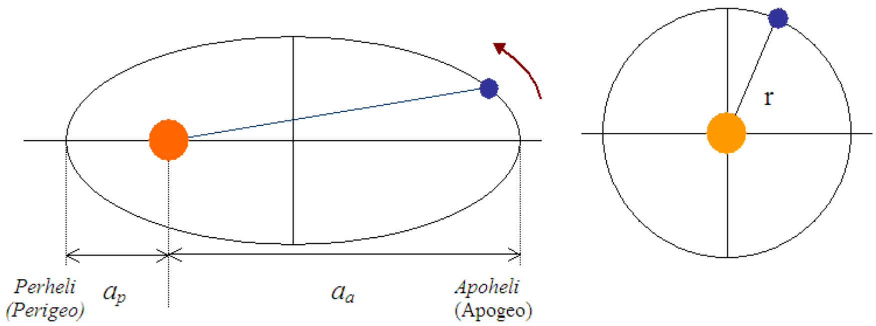
EXEMPLE 10

Calculeu el període orbital de la lluna al voltant de la Terra, mesurat en dies.
Dades: $M_{TERRA} = 5{,}99\cdot10^{24}$ *kg,* $D_{TERRA\text{-}LLUNA} = 384.000$ *km*

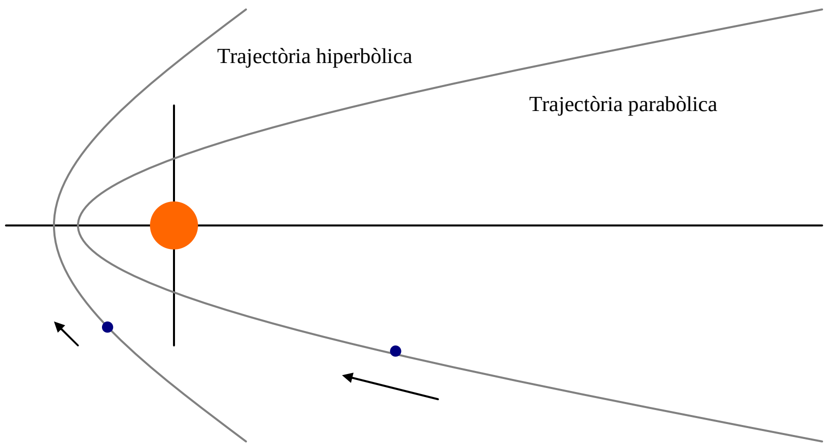
5.17. L'energia mecànica dels cossos celestes.

Kepler només va poder observar una de les possibles trajectòries dels cossos celestes. Realment hi ha més trajectòries possibles. Totes elles pertanyen a la família de les corbes còniques. Així doncs els diferents objectes que orbiten al voltant del Sol, descriuen dos tipus d'òrbites còniques, les trajectòries tancades i les trajectòries obertes:

- *Les trajectòries tancades*. Són les que descriuen els planetes, satèl·lits i alguns cometes i asteroides. Hi ha dos tipus de trajectòries tancades les que tenen forma **el·líptica** i les que tenen forma **circular**. El Sol està situat en un dels focus de l'el·lipse i el període orbital ve donat per la tercera llei de Kepler. En ser els problemes de mecànica celeste amb òrbites el·líptiques complicats de resoldre les úniques trajectòries tancades que estudiarem seran les òrbites circulars.



- *Trajectòries obertes.* Són les que descriuen alguns cometes i asteroides. Existeixen dos tipus de trajectòries obertes les **òrbites parabòliques** i les **òrbites hiperbòliques**. El Sol està situat en el focus de la paràbola i de la hipèrbola.



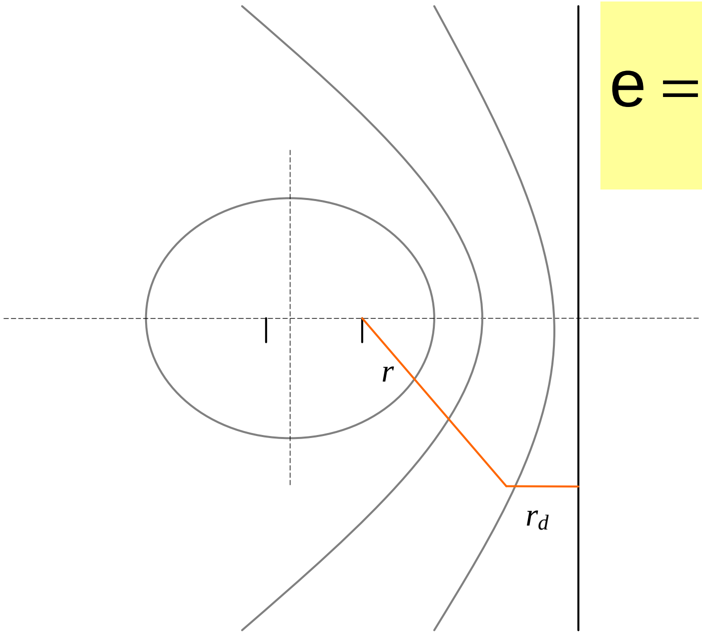
Les trajectòries descrites anteriorment són el resultat de l'acció de la força gravitacional entre el Sol i els cossos celestes, que en ser conservativa fa que l'energia mecànica d'aquests cossos es mantingui constant.

En el quadre adjunt podeu veure el signe de l'energia mecànica en funció del tipus de trajectòria d'aquest cossos.

COSSOS CELESTES	TIPUS D'ÒRBITA	EXCENTIRCITAT	ENERGIA MECÀNICA
Planetes, cometes i asteroides	Òrbita el·líptica o circular	$0 < e < 1$ (el·lipse) $e = 0$ (cercle)	$E_m < 0$
Cometes i asteroides	Òrbita parabòlica	$e = 1$	$E_m = 0$
Cometes i asteroides	Òrbita hiperbòlica	$e > 1$	$E_m > 0$

5.18. Excentricitat de les òrbites.

Una de les definicions matemàtiques de les corbes còniques ve expressada en funció de la seva excentricitat.
Sigui una corba cònica. La distància des d'un dels focus a un punt de la corba és proporcional a la distància d'aquest mateix punt a la recta directriu. Aquesta constant de proporcionalitat és l'excentricitat ***e***.



$$e = \frac{r}{r_d}$$

També en el cas de les còniques es compleix la igualtat:

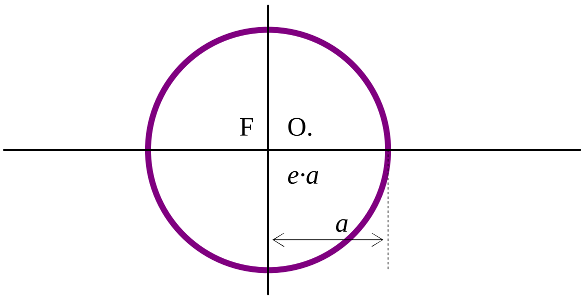
$$e = \frac{D_{OF}}{a}$$

CERCLE

$D_{OF} = 0$

$$e = \frac{D_{OF}}{a} = 0$$

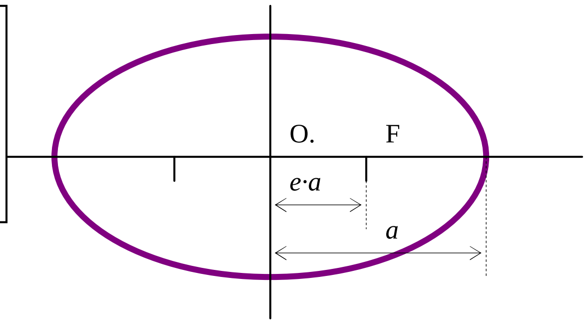
$a = r$



EL·LIPSE

$0 < D_{OF} < a$

$$e = \frac{D_{OF}}{a} \Rightarrow 0 < e < 1$$

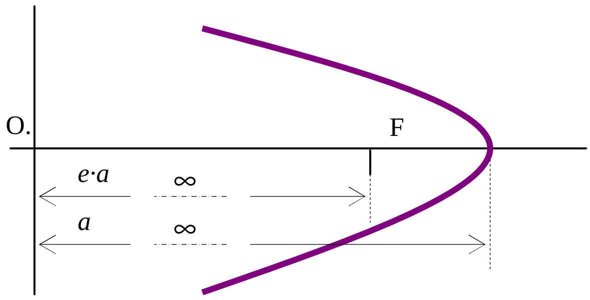


PARÀBOLA

$D_{OF} \longrightarrow +\infty$

$a \longrightarrow +\infty$

$$e = \lim_{\substack{D_{OF} \to +\infty \\ a \to +\infty}} \frac{D_{OF}}{a} = 1$$



HIPÈRBOLA

$D_{OF} \longrightarrow +\infty$

$a \longrightarrow +\infty$

$$e = \lim_{\substack{D_{OF} \to +\infty \\ a \to +\infty}} \frac{D_{OF}}{a} > 1$$