# TEMA 1.
# MOVIMENT HARMÒNIC SIMPLE

## 1. Introducció

Quan un cos realitza un moviment que es repeteix de forma idèntica en successius intervals iguals de temps, diem que realitza un moviment periòdic. Dels moviments estudiats l'any passat un exemple d'aquest seria *el moviment circular uniforme*. En aquests tipus de moviments definim el període **T**, temps que inverteix la partícula en fer un cicle del moviment. Un cas interessant a estudiar aquests any és el moviment harmònic simple (m.h.s.).

## 2. Definició del m.h.s

Diem que una partícula realitza un moviment harmònic simple quan en desplaçar-se en línia recta amb un moviment de va i ve al voltant d'un punt fix, **O**, la partícula pateix una acceleració proporcional a la posició d'aquesta.

$$\boxed{\ddot{x} = cnt \cdot x}$$

## 3. Definicions prèvies.

-**(1) Període del m.h.s**: Temps que triga la partícula en realitzar tot el cicle complert. $T = 2\pi / \omega$ (s'expressa en segons.)

-**(2) Freqüència del m.h.s.** Nombre de vibracions que realitza la partícula que descriu el moviment harmònic simple $f = 1 / T$. És l'invers del període. (S'expressa en Hz.)

-**(3) Pulsació o freqüència angular.** És la velocitat angular constant que té la partícula imaginària i que ens ajudarà a definir el m.h.s.
(s'expressa en rad / s.)

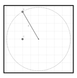
- **(4) Elongació del m.h.s.** Posició de la partícula vibrant respecte el centre de la vibració.

- **(5) Amplitud de m.h.s.** Valor extrem que pot prendre l'elongació.

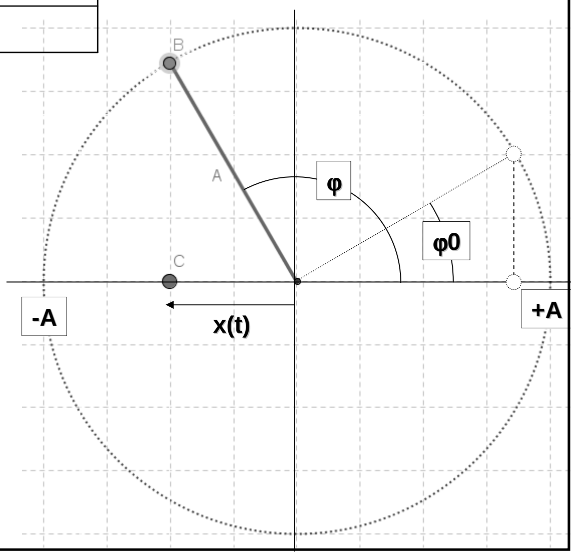
- **(6) Fase.** Es l'angle que forma l'eix horitzontal amb el mòbil imaginari que realitza el m.c.u.

- **(7) Fase inicial.** Es l'angle que forma l'eix horitzontal amb el mòbil imaginari que realitza el m.c.u., en l'instant inicial de temps. ( t = 0s.)

| |
|---|
| - (4) Elongació del m.h.s **x(t)**. |
| - (5) Amplitud de m.h.s. **A** |
| - (6) Fase **$\varphi$**. |
| - (7) Fase inicial **$\varphi_0$**. |



Animació del m.h.s.



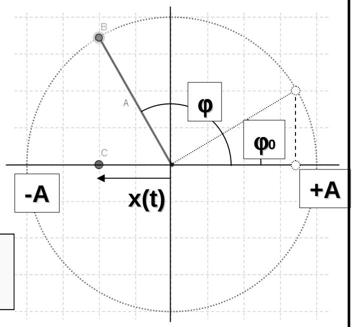
## 4. Equacions del moviment

**Equació de la posició:**

Partirem de l'equació del MCU de la partícula imaginària.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

En ser l'elongació la projecció sobre l'horitzontal del radi **A** en funció de la fase, ens quedarà:




$$x(t) = A\cdot\cos\varphi \longrightarrow \boxed{x(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0)}$$

**Equació de la velocitat de vibració:**

Derivem la posició respecte el temps

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\cdot\sin(\omega\cdot t + \varphi_0)$$

## 4. Equacions del moviment

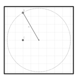
A partir la identitat trigonomètrica fonamental es pot deduir una altre equació de la velocitat de vibració que pot ser força útil alhora de fer problemes.

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\cdot\sin(\omega\cdot t + \varphi_0) \longrightarrow \dot{x}(t) = \mp A\omega\cdot\sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\dot{x}(t) = \mp\omega\sqrt{A^2 - \underbrace{A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)}_{x(t)}} \longrightarrow \dot{x}(t) = \mp\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

**Equació de l'acceleració del M.H.S.**



Animació del m.h.s. + vectors

Derivem la velocitat respecte el temps.

$$\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = -A\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0) \longrightarrow$$

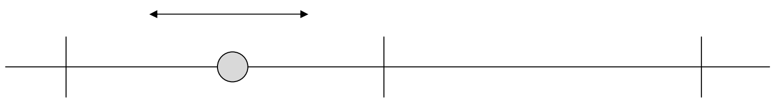
$$\longrightarrow \ddot{x}(t) = -\omega^2\cdot\underbrace{A\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0)}_{x(t)} \longrightarrow \boxed{\ddot{x}(t) = -\omega^2\cdot x(t)}$$

## 5. Caractrístiques del M.H.S.

$$x(t) = A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega\cdot A\cdot\sin(\omega t + \varphi_0) = \mp\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\cdot A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2\cdot x$$



| | | |
|---|---|---|
| x(t) = -A | x(t) = 0 | x(t) = +A |
| v(t) = 0 | v(t) = ±ω·A | v(t) = 0 |
| a(t) = +ω²·A | a(t) = 0 | a(t) = -ω²·A |

## 6. EXEMPLES DE M.H.S.

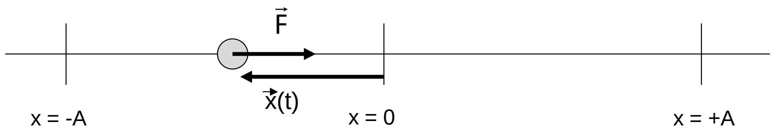
Una partícula descriu un m.h.s. d'amplitud A = 3m. Considerem que la posició inicial del mòbil és $x_0$ = 2m i que el temps que triga aquesta partícula en realitzar un cicle complert és de 30s. a)Trobeu la fase inicial. b) Quina serà la posició de la partícula en els instants de temps t = 1s, t = 2s i t = 15s.

Una partícula realitza un moviment harmònic simple de freqüència angular ω = 5π rad/s, la seva fase inicial $\varphi_0$ = π/4 rad i amplitud A = 4 cm. Trobeu la velocitat de la partícula a) quan aquesta es trobi a x = 2 cm, b) quan la seva fase valgui 2/3π rad i c) quan la seva elongació sigui màxima.

## 7. LA LLEI DE HOOKE

Ara el que prtenem és esbrinar com és la força que causa el M.H.S.

Suposem que una partícula de massa **m** està sotmesa a un m.h.s. Per causa d'una única força **F**.




$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{x}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{F} = m \cdot \left(-\omega^2 \cdot \vec{x}\right)$$

Reordenant els termes, ens queda:

$$\vec{F} = -\left(\omega^2 \cdot m\right)\vec{x} \rightarrow \boxed{\vec{F} = -K \cdot \vec{x}}$$

Observeu que la força F és sempre contraria que el sentit del vector elongació.

Si el moviment està causat per una molla elàstica ideal, el terme de dins del parèntesi es substitueix per K (constant elàstica de la molla).

$$K = \omega^2 \cdot m \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\text{Unitats} \quad : \quad [K] = 1\, ^{N}\!/_{m}$$

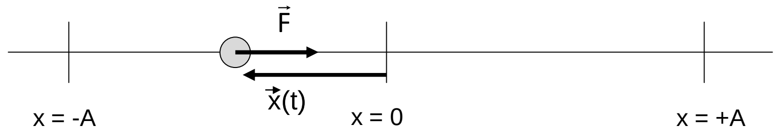
## 8. PERÍODE DEL M.H.S.

Si una massa oscil·la per l'acció d'una molla, podem calcular el temps que la massa repeteix el moviment a partir de la massa **m** i de la constant elàstica de la molla **K**.

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{K}{m}}} \rightarrow \boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K}}}$$

1. El període d'oscil·lació només depèn de la massa i de la constant K. L'amplitud no afecta al valor del període.
2. La fórmula del període només és vàlida per masses sotmeses a forces conservatives. L'acció de la fricció farà que la fórmula anterior no tingui sentit.

## 8. ENERGIA POTENCIAL ELÀSTICA

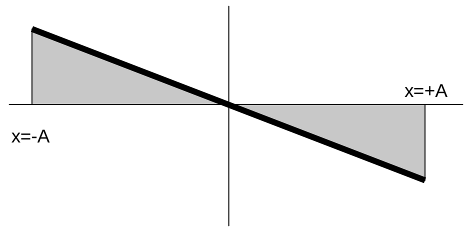



La força de Hooke, responsable del mhs, és una força conservativa[1]. De primer sabeu que les forces conservatives tenen associada una funció escalar anomenada energia potencial i que ve definida per:

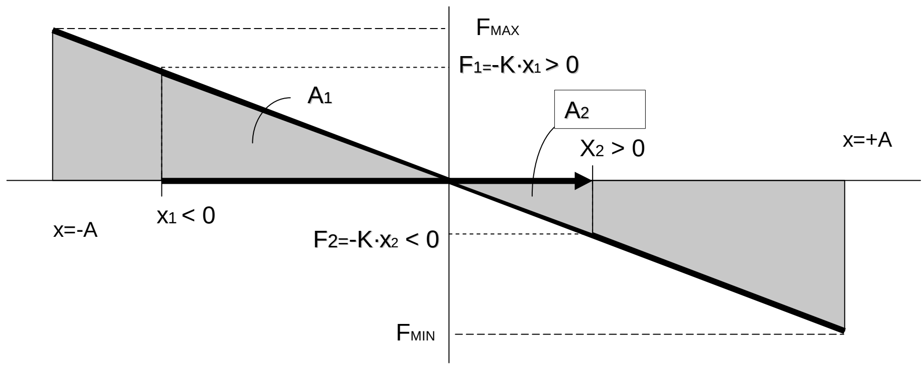
$$\Delta U = -W_{\vec{F}_c}$$

Recordeu que en el cas de les forces que depenen de la posició el càlcul del treball es feia a través de la gràfica F-x. En el cas de la llei de Hooke la força F és lineal.

$$\vec{F} = -K\cdot\vec{x}$$




## 8. ENERGIA POTENCIAL ELÀSTICA




$$\Delta U_e = -W_{\vec{F}_c} \rightarrow U_{e2} - U_{e1} = -W_F \rightarrow U_{e2} - U_{e1} = \frac{1}{2}\cdot K\cdot x_2^2 - \frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1^2$$

$$W_{\vec{F}} = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1^2 - \frac{1}{2}\cdot K\cdot x_2^2$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\cdot F_1\cdot(-x_1) = \frac{1}{2}\cdot(-K\cdot x_1)\cdot(-x_1) = \frac{1}{2}\cdot K\cdot x_1^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot F_2\cdot x_2 = \frac{1}{2}\cdot(-K\cdot x_2)\cdot(x_2) = -\frac{1}{2}\cdot K\cdot x_2^2$$

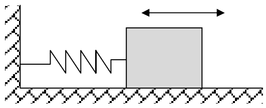
$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2}$$

## 8. ENERGIA MECÀNICA DEL M.H.S.

A 1r de batxillerat vareu veure que l'energia mecànica d'una partícula és la suma de l'energia cinètica i de les energies potencials.

$$E_m = E_C + U_g + U_e = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + m\cdot g\cdot h + \frac{1}{2}K\cdot r^2$$

En el cas que l'oscil·lació harmònica <u>fos horitzontal</u>, l'altura es pot considerar zero i la r passarà a ser x.



$$E_m = E_C + U_e = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + \frac{1}{2}K\cdot x^2$$

Si substituïm la velocitat per la seva expressió i reordenem, ens quedarà:

$$v = \mp\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$E_m = E_C + U_e = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + \frac{1}{2}K\cdot x^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\mp\omega\sqrt{A^2 - x^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2$$

Poso l'elongació com **r** perquè si poses **x** donaria a entendre que sempre l'elongació ha de ser perpendicular a h i això no té perquè ser així.

## 8. ENERGIA MECÀNICA DEL M.H.S.

K està relacionada amb $\omega$ i m.

$$K = m\cdot\omega^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2 = \frac{1}{2}\cdot K\cdot\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}\cdot K\cdot x^2$$

En aquest cas l'energia mecànica valdrà:

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2}$$

Nota: Només quan la massa oscil·la sense fricció en el pla horitzontal.

## 9. EXEMPLES DE M.H.S.

Una molla de constant K = 100 $N \cdot m^{-1}$ té lligada a l'extrem una massa de 0,5kg. La massa està recolzada sobre una superfície plana sense fricció. Separem la massa15cm del punt d'equilibri i deixem oscil·lar el sistema lliurement. Trobeu:

a) La força que actua sobre la massa just en el moment que deixem la massa.

b) L'energia potencial elàstica que té la massa.

c) L'energia mecànica d la massa en aquest punt i en qualsevol punt de la trajectòria.

d) La velocitat de vibració de la massa a 2cm del punt d'equilibri.

e) La freqüència i el període de les oscil·lacions.

f) El temps que triga la massa en passar pel punt d'equilibri.

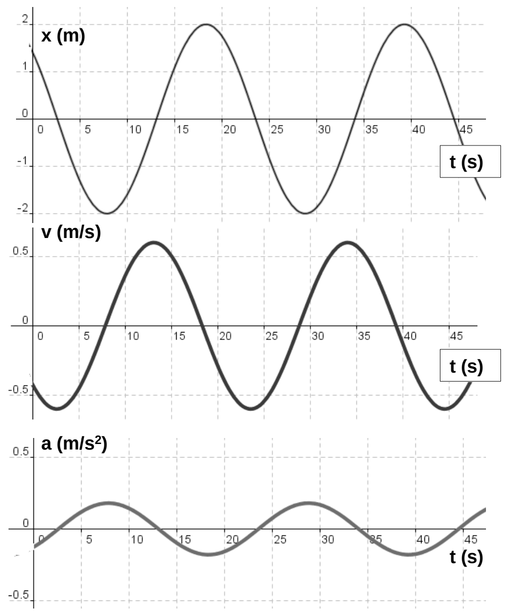
PER FER A CASA…

g) Trobeu l'energia mecànica de la massa anterior si la fem oscil·lar en el pla vertical.

## 10. GRÀFIQUES DEL MOVIMENT HARMÒNIC SIMPLE HORITZONTAL

Veiem com són les gràfiques x-t, v-t i a-t del m.h.s.

$$A = 2m \ ; \ \omega = 0{,}3 rad \cdot s^{-1} \ ; \ \varphi_0 = \frac{\pi}{4} rad$$




$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x(t) = 2 \cdot \cos\left(0{,}3t + \frac{\pi}{4}\right) \quad m$$

$$v(t) = -\omega A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = -0{,}3 \cdot 2 \cdot \sin\left(0{,}3 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$v(t) = -0{,}6 \cdot \sin\left(0{,}3 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \quad m/s$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

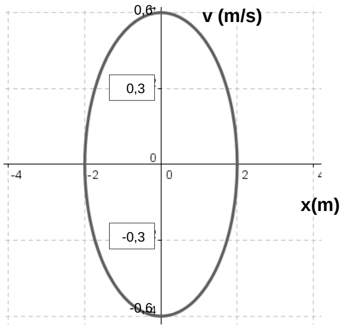
$$a(t) = -0{,}3^2 \cdot 2 \cdot \cos\left(0{,}3 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a(t) = -0{,}18 \cdot \cos\left(0{,}3 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) \quad m/s^2$$

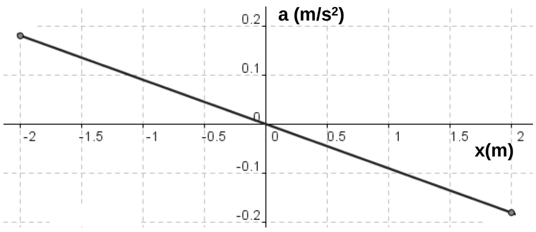
## 10. GRÀFIQUES DEL MOVIMENT HARMÒNIC SIMPLE HORITZONTAL

Ara veurem com son les gràfiques v-x, a-x del m.h.s.

$$A = 2\,\text{m} \;\; ; \;\; \omega = 0{,}3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \;\; ; \;\; \varphi_0 = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$$




$$v = \mp\omega\sqrt{A^2 - x^2} \rightarrow v = \mp 0{,}3\cdot\sqrt{2^2 - x^2}$$

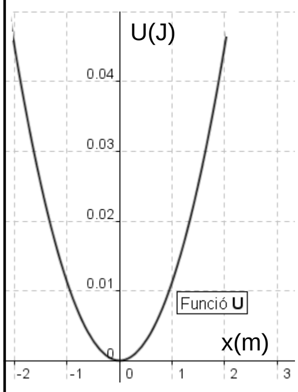


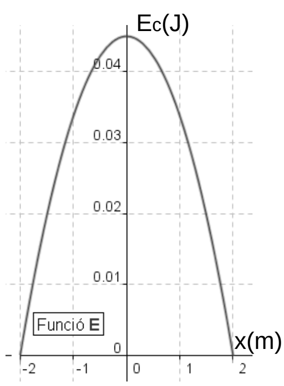

$$a = -\omega^2\cdot x \rightarrow a = -0{,}3^2\cdot x$$

## 10. GRÀFIQUES DEL MOVIMENT HARMÒNIC SIMPLE HORITZONTAL

Ara veurem com son les gràfiques U-x, Ec-x del m.h.s.

$$A = 2\,\text{m} \;\; ; \;\; \omega = 0{,}3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \;\; ; \;\; m = 0{,}25\,\text{kg}$$




$$U_e = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}\left(m\omega^2\right)x^2$$

$$U_e = \frac{1}{2}\cdot\left(0{,}25\cdot 0{,}3^2\right)x^2$$

$$U_e = 0{,}01125\cdot x^2 \quad \text{J}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

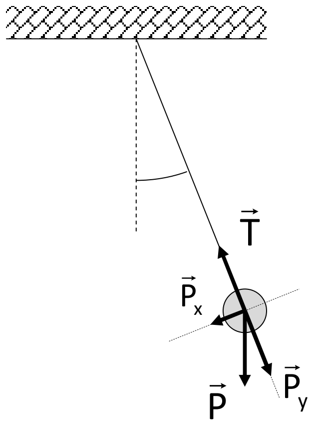
$$E_c = \frac{1}{2}\cdot 0{,}25\cdot 0{,}3^2\cdot\left(2^2 - x^2\right)$$

$$E_c = 0{,}01125\cdot\left(2^2 - x^2\right) \quad \text{J}$$

## 11. EL PÈNDOL OSCIL·LANT

Considerem un pèndol de longitud **L** I massa **m** tal com mostra la figura. Si l'apartem de la vertical un angle θ observarem que comença a pendular lliurement. Si es compleix que θ ~ 0 el moviment que descriu la massa és un **moviment harmònic simple**.

Per demostrar això, partirem de la 2a llei de Newton per al pèndol.




$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{cases} x: -P_x = m \cdot a_t \\ y: T - P_y = m \cdot a_c \end{cases}$$

Si tenim en compte que :

$$a_t = \alpha \cdot L \rightarrow a_t = \ddot{\theta} \cdot L$$

I que per angles molt petits

$$\text{Si } \theta \approx 0 \rightarrow \sin\theta \approx \theta$$

Ens quedarà que

$$(*) \rightarrow a_t = -g \cdot \sin\theta \rightarrow (*) \rightarrow \ddot{\theta} \cdot L = -g \cdot \theta$$

## 11. EL PÈNDOL OSCIL·LANT

Comparem l'equació final amb la del m.h.s.

Equació del pèndol

$$\ddot{\theta} \cdot L = -g \cdot \theta \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \cdot \theta}$$

Equació del mhs

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

La comparació ens permet determinar la fórmula del període d'oscil·lqació del pèndol.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

- El període d'ocilació del pèndol depèn de **L** i **g**.

-No depèn de **m**.

-No depèn de **θ.**

## EXEMPLE

a) Determineu la longitud d'un pèndol que ens permeti comptar el pas del temps en cada oscil·lació. (1 s per oscil·lació))

b) Quin seria el període del pèndol si uns astronautes se l'emportessin a la lluna?

c) Quant s'hauria d'escurçar el cordill per tal que el període coincidís amb el de la Terra?

$g_L = 1,6\ m \cdot s^{-2}$ , $g_T = 9,81\ m \cdot s^{-2}$

## ACTIVITATS

| LLIBRE DE TEXT | ACTIVITATS |
|---|---|
| -Pag 23.<br>-Pag 24. | **17, 18, 19, 20**<br>**21, 22, 23** |
| MOODLE | ACTIVITATS |
| - FULL 1. MHS | **P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9**<br>**P9**. Falten dues dades: K = 100 N/m, m = 0,2 kg |
| LLIBRE DE TEXT | |
| -Pg 41.<br>-Pg 42<br>-Pg 59<br>-Pg 62 | **19, 20**<br>**21, 22, 23, 24**<br>**22**<br>**25** |