

# TEMA 3.

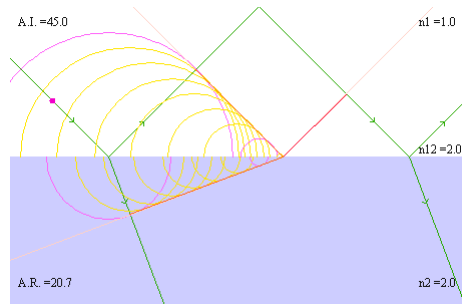
## Interferència d'ones

### 1. Introducció

En aquest tema es pretén estudiar diversos fenòmens que es produeix quan dues ones es propaguen per una zona comuna de l'espai o quan ones bi o tridimensionals travessen forats petits. Per entendre'ls cal conèixer dos principis físics fonamentals: **El principi de Huygnes** i **el principi de superposició**.

## 2. El principi de Huygens

El principi de Huygens ens diu que tot punt al què li arriba una ona es comporta com un emissor de ones.

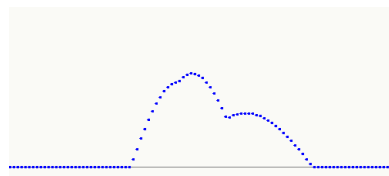


Animació del principi de Huygens

3

## 3. El principi de superposició

Segons aquest principi, dues ones independents quan coincideixen en un mateix punt de l'espai es superposen i continuen el seu camí tal i com ho feien anteriorment sense veure alterada cap propietat.



Animació del principi de superposició.

4

#### 4. Fenòmens d'interferència

En aquest apartat estudiarem dos tipus d'interferències:

5. Interferència de dues ones semblants desfasades un angle  $\delta$ .
6. Interferència de dues ones de freqüències semblants.

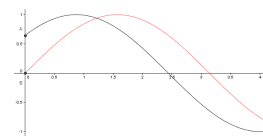
5

#### 5. Interferència de dues ones iguals desfasades $\delta$

Les ones en qüestió són:

$$\Psi_1(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \delta)$$

$$\Psi_2(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$



Matemàticament, la interferència s'expressa com la suma de les dues funcions d'ona.

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \delta) + A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

Traiem A factor comú:

$$\Psi(x, t) = A \cdot (\underbrace{\cos(\omega t - kx + \delta)}_{\alpha} + \underbrace{\cos(\omega t - kx)}_{\beta})$$

Si tenim en compte la relació trigonomètrica de sota i que

$$\begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{2} = \omega t - kx + \frac{\delta}{2} \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = +\frac{\delta}{2} \end{cases}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

6

## 5. Interferència de dues ones iguals desfasades $\delta$

La interferència de les ones  $\psi_1$  i  $\psi_2$  quedarà expressada com:

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = \underbrace{2 \cdot A}_{A'} \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t - kx + \frac{\delta}{2}\right)$$

On  $A'$  és l'amplitud de la interferència.

Ara les preguntes que hem de respondre són:

1. Per a quins valors de  $\delta$  s'anul·la l'amplitud de la interferència?

$$\text{Si } A' = 0 \rightarrow \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{\delta}{2} = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2} \dots \rightarrow \delta = \pm(2m+1) \cdot \pi$$

Interferència destructiva

2. Per a quins valors de  $\delta$  és màxima l'amplitud de la interferència?

$$\text{Si } A' = \pm 2A \rightarrow \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = \pm 1 \rightarrow \frac{\delta}{2} = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \dots \rightarrow \delta = \pm 2m \cdot \pi$$

Interferència constructiva

7

## 5. Interferència de dues ones iguals desfasades $\delta$

### EXEMPLE ANIMAT



Ondas 2.2

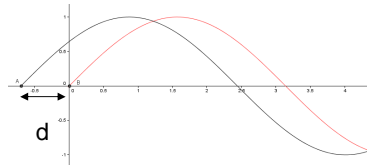
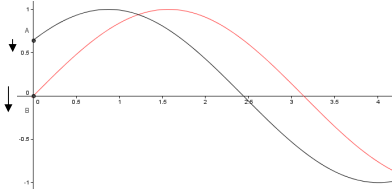
Generarem dues ones que tenen iguals freqüències i amplituds, però amb diferents angles de desfasament i n'observarem els efectes.

	Ona 1	Ona 2	Amplitud de la interferència
Cas 1	$\varphi_0 = 0^\circ$	$\varphi_0 = 30^\circ$	$A' = 2A \cdot \cos(15^\circ) = 1,9319 \cdot A$
Cas 2	$\varphi_0 = 0^\circ$	$\varphi_0 = 60^\circ$	$A' = 2A \cdot \cos(30^\circ) = \sqrt{3} \cdot A$
Cas 3	$\varphi_0 = 0^\circ$	$\varphi_0 = 120^\circ$	$A' = 2A \cdot \cos(60^\circ) = A$
Cas 4	$\varphi_0 = 0^\circ$	$\varphi_0 = 150^\circ$	$A' = 2A \cdot \cos(75^\circ) = 0,5176 \cdot A$

8

## 5. Interferència de dues ones iguals desfasades $\delta$

Com es generen dues ones iguals desfasades  $\delta$ ?



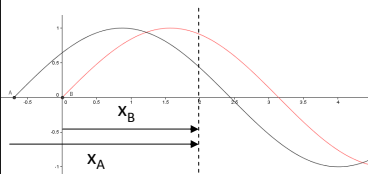
1. A partir de focus emissors que vibren desfasats.

2. A partir de focus emissors que vibren coherentment però que estan separats una distància  $d$ .

En aquest cas,  $\delta$  està relacionat amb  $d$  perquè les ones per arribar a un mateix punt del medi han de recórrer camins diferents.

9

## 5. Interferència de dues ones iguals desfasades $\delta$



$$\Psi_A(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx_A)$$

$$\Psi_B(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx_B) = A \cos(\omega t - kx_A + kd)$$

$$x_B = x_A - d$$

Comparant aquestes expressions amb

$$\Psi_1(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

$$\Psi_2(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \delta)$$

$$\delta = kd \rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d$$

Reescrivim la solució de la diapositiva número 7.

1. Per a quins valors de  $d$  s'anul·la l'amplitud de la interferència?

$$\text{Si } A' = 0 \rightarrow \delta = \pm(2m+1) \cdot \pi \rightarrow d = \frac{\pm(2m+1) \cdot \lambda}{2} \quad \text{Interferència destructiva}$$

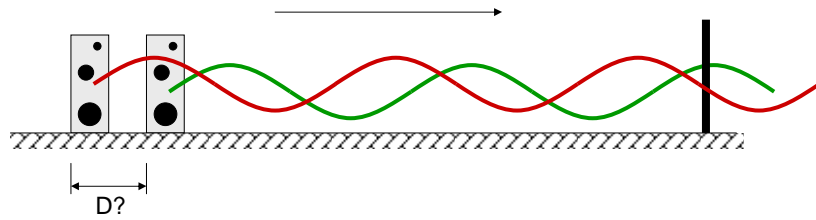
2. Per a quins valors de  $d$  és màxima l'amplitud de la interferència?

$$\text{Si } A' = \pm 2A \rightarrow \delta = \pm 2m \cdot \pi \rightarrow d = \pm m \cdot \lambda \quad \text{Interferència constructiva} \quad 10$$

### Exemple

Dos altaveus de música emeten ones sonores d'igual freqüència i amplituds iguals.  
( $f = 440\text{Hz}$  ;  $v_{so} = 340\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

- Quina distància hauríem de separar els altaveus per tal que un observador alineat amb els altaveus no senti res de res?
- Què passaria si es varia la freqüència del so a 570Hz?



11

### 6. Interferència de dues ones amb freqüències semblants

Es interessant estudiar el cas d'interferència de dues ones amb freqüències semblants

Les ones en qüestió són:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 t - k_1 x) \\ \Psi_2(x, t) &= A_2 \cdot \cos(\omega_2 t - k_2 x) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \text{Per fer-ho fàcil } A_1 = A_2 = A \\ \omega_1 \approx \omega_2; \\ v_1 = v_2 = v ; (\text{medi no dispersiu}) \end{cases}$$

Matemàticament, la interferència s'expressa com la suma de les dues funcions d'ona

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = A \cdot \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cdot \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$\Psi(x, t) = A \cdot (\underbrace{\cos(\omega_1 t - k_1 x)}_{\alpha} + \underbrace{\cos(\omega_2 t - k_2 x)}_{\beta})$$

Si tenim en compte la relació trigonomètrica de sota i que

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{2} = \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \cdot t - \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) \cdot x \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) \cdot t - \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \cdot x \end{cases}$$

$\omega_p$                        $k_p$   
 $\omega_m$                        $k_m$

## 6. Interferència de dues ones amb freqüències semblants

La interferència de les ones  $\psi_1$  i  $\psi_2$  quedarà expressada com:

$$\Psi(x, t) = 2 \cdot \underbrace{A \cdot \cos(\omega_m \cdot t - k_m \cdot x)}_{A'} \cdot \cos(\omega_p \cdot t - k_p \cdot x)$$

On  $A'$  és l'amplitud de l'ona interferència.

Veiem doncs que l'ona interferència està formada per dues ones sobreposades.

1. L'ona interferència de freqüència promig a les originals,  $\omega_p$  i amb una velocitat de propagació  $v_p$
2. L'ona envolcall, que forma part de l'amplitud. La freqüència d'aquest envolcall és la semiresta de les freqüències originals,  $\omega_m$  i amb una velocitat de propagació  $v_g$  (anomenada velocitat de grup).

13

## Exemple

Demostreu que per a medis no dispersius, la velocitat de grup i la velocitat de propagació, són iguals. Trobeu-ne de pas el seu valor:

$$v_p = \frac{\omega_p}{k_p} = \frac{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}{\frac{k_1 + k_2}{2}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = \frac{v \cdot k_1 + v \cdot k_2}{k_1 + k_2} = v$$

$$\text{Però : } \omega_1 = v \cdot k_1 ; \omega_2 = v \cdot k_2$$

$$v_g = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}{\frac{k_1 - k_2}{2}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{v \cdot k_1 - v \cdot k_2}{k_1 - k_2} = v$$

$$\text{Però : } \omega_1 = v \cdot k_1 ; \omega_2 = v \cdot k_2$$

14

### Exemple

Determineu per a medis no dispersius el valor de:  $\lambda_m$ ,  $\lambda_p$ ,  $f_m$  i  $f_p$ .

Dades:  $v_1=v_2=v$ ,  $f_1$  i  $f_2$

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \rightarrow f_p = \frac{\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{2\pi} = \frac{\frac{\omega_1}{2\pi} + \frac{\omega_2}{2\pi}}{2} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

$$v = v_p = \lambda_p \cdot f_p \rightarrow \lambda_p = \frac{v}{f_p} \rightarrow \lambda_p = \frac{2v}{f_1 + f_2}$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \rightarrow f_m = \frac{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)}{2\pi} = \frac{\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}}{2} = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

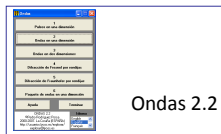
$$v = v_g = \lambda_m \cdot f_m \rightarrow \lambda_m = \frac{v}{f_m} \rightarrow \lambda_m = \frac{2v}{f_1 - f_2}$$

$$\lambda_p \neq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

$$\lambda_m \neq \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$$

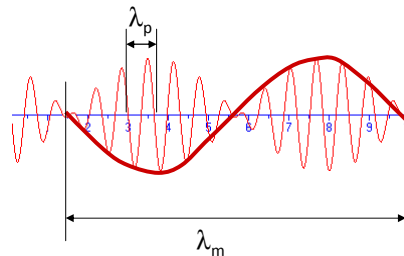
### 6. Interferència de dues ones amb freqüències semblants

Exemple animat



Generarem dues ones que tenen velocitats de propagació i amplituds iguals (medi no dispersiu), però freqüències semblants. Se sobreentén que les longitud d'ona també seran semblants per l'exemple de la diapositiva anterior.

	Ona 1	Ona 2
Cas d'estudi	$\lambda_1 = 0,5m$	$\lambda_2 = 0,4m$

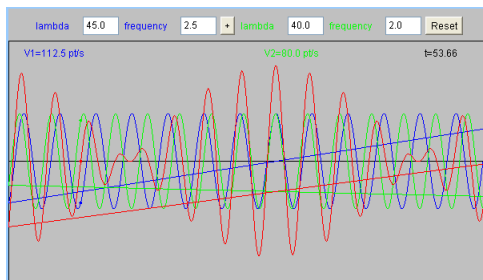




## 7. Medis dispersius

Fins ara teníem en compte que els medis eren no dispersius. La conseqüència immediata d'això era que  $v$ ,  $v_g$  i  $v_p$  eren coincidents.

Entenem per **medi dispersiu** aquell medi en el que les ones viatgen a velocitats diferents segons la freqüència de l'ona. En aquest cas la interferència d'ones de freqüències semblants dóna eL que es veu a l'animació, una ona interferència que te una velocitat diferent a les dues originals.



$$v_1 = \lambda_1 \cdot f_1 = 70,5 \text{ m/s}$$

$$\lambda_1 = 47 \text{ m}$$

$$f_1 = 1,5 \text{ Hz}$$

$$v_2 = \lambda_2 \cdot f_2 = 80 \text{ m/s}$$

$$\lambda_2 = 40 \text{ m}$$

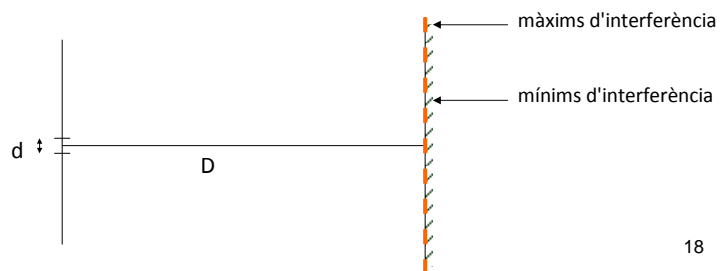
$$f_2 = 2 \text{ Hz}$$

17

## 8. L'eperiment de Young

Aquest experiment efectuat el 1901 va ser determinant per establir el caràcter ondulatori de la llum. Sir George Young (18..-19--) va realitzar el muntatge comentat a sota

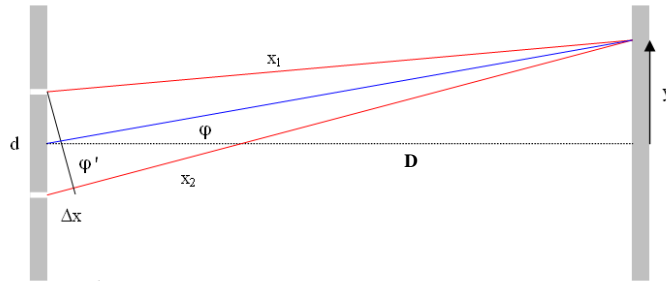
Considerem dos focus puntuals separats una distància  $d$ . Els dos focus estan situats a una distància  $D$  d'una paret vertical. Els dos focus emeten llum amb la mateixa freqüència i a més ho fan en fase. Amb aquestes dues condicions podem observar que a sobre de la paret es formaran línies molt il·luminades (màxims d'interferència) i zones fosques (mínims d'interferència). A la figura s'observa aquest fenomen. Les zones fosques corresponen a la interferència destructiva. Les zones més brillants a la interferència constructiva.



18

## 8. L'èperiment de Young

Per determinar la posició d'aquests màxims i mínims farem una càlcul senzill.



1.  $d \ll D \rightarrow \varphi \approx \varphi'$
2.  $\varphi \approx \varphi' \approx 0 \rightarrow \sin \varphi \approx \varphi$  i  $\text{tg } \varphi' \approx \varphi'$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \varphi' \approx \varphi' = \frac{\Delta x}{d} \\ \text{tg } \varphi \approx \varphi = \frac{y}{D} \end{array} \right\} \rightarrow \varphi' \approx \varphi \rightarrow \frac{\Delta x}{d} = \frac{y}{D} \rightarrow y = D \cdot \frac{\Delta x}{d}$$

19

## 8. L'èperiment de Young

$$y = D \cdot \frac{\Delta x}{d}$$

Es formaran zones fosques quan es compleixi la condició d'interferència destructiva

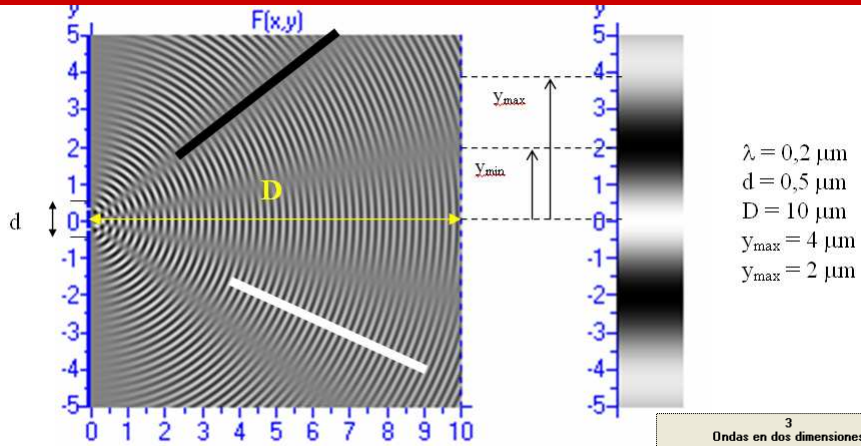
$$\Delta x = \frac{2n+1}{2} \cdot \lambda \longrightarrow y_{\text{foscor}} = \frac{D}{d} \left( \frac{2n+1}{2} \cdot \lambda \right)$$

Es formaran zones il·luminades quan es compleixi la condició d'interferència constructiva.

$$\Delta x = n \cdot \lambda \longrightarrow y_{\text{llum}} = \frac{D}{d} (n \cdot \lambda)$$

20

### 8. L'eperiment de Young

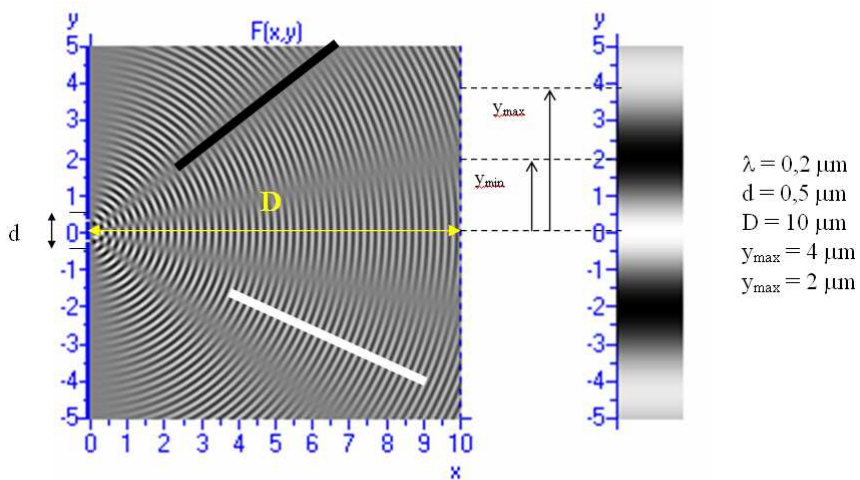


- Les franges de màxima brillantor estan a  $0 \mu\text{m}$  i les segones a  $4 \mu\text{m}$  i a  $-4 \mu\text{m}$ .

$$y_{\text{max}} = \frac{D}{d}(n\lambda) = \begin{cases} n = +1 \Rightarrow y_{\text{max}} = \frac{D}{d}(+1 \cdot \lambda) = \frac{10}{0,5} \cdot 0,2 = 4 \mu\text{m} \\ n = 0 \Rightarrow y_{\text{max}} = \frac{D}{d}(0 \cdot \lambda) = 0 \mu\text{m} \\ n = -1 \Rightarrow y_{\text{max}} = \frac{D}{d}(-1 \cdot \lambda) = \frac{10}{0,5} \cdot (-0,2) = -4 \mu\text{m} \end{cases}$$

21

### 8. L'eperiment de Young



- Les zones fosques estan a  $2 \mu\text{m}$  i  $-2 \mu\text{m}$ .

$$y_{\text{max}} = \frac{D}{d} \left( \frac{2n+1}{2} \cdot \lambda \right) = \begin{cases} n = 0 \Rightarrow y_{\text{max}} = \frac{D}{d} \left( \frac{2 \cdot 0 + 1}{2} \cdot \lambda \right) = \frac{10}{0,5} \cdot 0,1 = 2 \mu\text{m} \\ n = -1 \Rightarrow y_{\text{max}} = \frac{D}{d} \left( \frac{2 \cdot (-1) + 1}{2} \cdot \lambda \right) = \frac{10}{0,5} \cdot (-0,1) = -2 \mu\text{m} \end{cases}$$

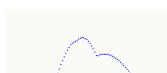
22

## ACTIVITATS

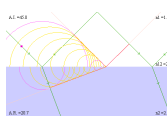
LLIBRE DE TEXT	ACTIVITATS
-PG. 225	<b>10</b>
-PG. 228	<b>11, 12</b>
-PG. 236	<b>13, 14, 15, 16</b>
MOODLE	ACTIVITATS
FULL 3	<b>2, 5, 6, 8</b>

23

## Índex d'applets



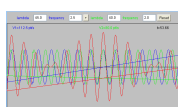
<http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-5VibracionesyOndas/ondas/ondas2.htm>



<http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-5VibracionesyOndas/PrincipioHuygens/PrincipioHuygens.htm>



Ondas 2.2



<http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-5VibracionesyOndas/SuperposicionOndas/SuperPosicion1/superposicionondas.htm>

24