TEMA 4.
ONES ESTACIONÀRIES

1. Introducció

Fins ara hem estudiat les ones quan es propaguen sempre per un medi infinit, obert i sense límits. En la immensa majoria dels casos això no és real. Per exemple:

1. Una habitació tancada. Les ones sonores es propaguen i reboten a les parets.
2. Ones sísmiques. Es propaguen per l'interior de la Terra que té una grandària finita.
3. Una corda que oscil·la lligada a una paret .

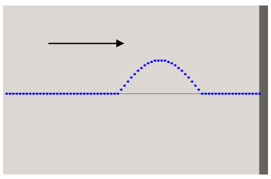
En aquests casos es poden produir el que anomenem ones estacionàries. Les ones estacionàries són un cas particular d'interferència de dues ones que viatgen en sentits oposats molt interessant i que convé estudiar.

2. Reflexió d’ones unidimensionals

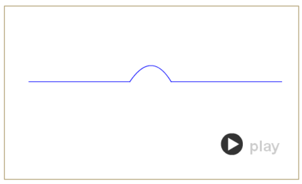
Abans d’endinsar-nos en les ones estacionàries ens convé respondre dues preguntes:

1. Què li passa a un pols d’ona que en viatjar per una corda, es troba l’extrem lligat a la paret?
2. I si l’extrem es lliure?

Respondrem la pregunta a partir de dues animacions.



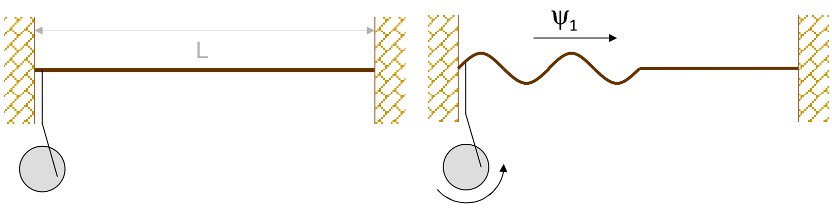
Animació extrem lligat



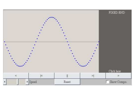
Animació extrem lliure

3. Ones estacionàries en una corda lligada pels dos extrems

Considereu una corda de longitud **L** com la de la figura i que està lligada pels dos extrems. Per l’extrem esquerra es generen ones a través d’un cigonyal connectat a un pistó que fa oscil·lar la corda tensa.



Les ones generades arribaran a l’extrem fix de la dreta , es reflectiran i interferiran amb elles mateixes. El resultat d’aquesta superposició és una ona que sota certes freqüències de vibració es pot considerar estacionària. Veiem això amb més detall.



Animació
Ona estacionària. **Corda amb extrems lliures**.

3. Ones estacionàries en una corda lligada pels dos extrems

Matemàticament l'explicació anterior es pot escriure de la següent forma:

Ona incident $\longrightarrow$ $\Psi_1 = A \cdot \cos(\omega t - kx)$

Ona reflectida $\longrightarrow$ $\Psi_2 = -A \cdot \cos(\omega t + kx)$

Ona interferència $\longrightarrow$ $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A \cdot \cos(\omega t - kx) - A \cdot \cos(\omega t + kx) \rightarrow$

$$\Psi = A \cdot (\cos(\underbrace{\omega t - kx}_{\alpha}) - \cos(\underbrace{\omega t + kx}_{\beta})) = \ldots (*)$$

Amb l'ajut de la relació trigonomètrica: $\cos\alpha - \cos\beta = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

I que $\begin{cases} \frac{\alpha - \beta}{2} = -kx \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \omega t \end{cases}$

$$(*) \quad \Psi = 2 \cdot A \cdot \sin(-kx) \cdot \sin(\omega t)$$

L'ona interferència que s'obté s'ha d'arreglar perquè els arguments no siguin negatius

3. Ones estacionàries en una corda lligada pels dos extrems

$$\Psi = 2 \cdot A \cdot \sin(-kx) \cdot \sin(\omega t) = 2 \cdot A \cdot \sin(kx) \cdot \sin(-\omega t) = 2 \cdot A \cdot \sin(kx) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Caracterísitiques de les ones estacionàries

L'ona interferència que obtenim té les següents característiques:

1. La freqüència de vibració coincideix amb la de l'ona incident ψ_1 .
2. L'amplitud de l'ona interferència està modulada i val : $A' = 2 \cdot A \cdot \sin(kx)$
3. Quan es forma una ona estacionària (anomenat estat estacionari) apareixen punts de la corda que no vibren mai. Aquests punts s'anomenen nodes. Per determinar la seva posició cal igualar A' a zero.

$$A' = 0 \rightarrow 2 \cdot A \cdot \sin(kx) = 0 \rightarrow \sin(kx) = 0$$

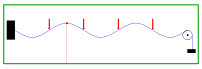
$$kx = \pm n\pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = \pm n\pi \rightarrow \boxed{x = \pm n \cdot \frac{\lambda}{2}} \longrightarrow \text{Posició dels nodes en la corda}$$

$$n = 0,1,2\ldots$$

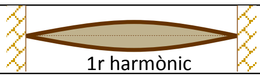
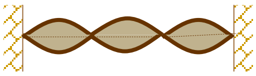
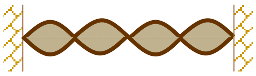
3. Ones estacionàries en una corda lligada pels dos extrems

Estats estacionaris de vibració. Es produeixen per a certes freqüències de vibració.

$$\lambda \cdot f = v \rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$



Animació d'ones estacionàries
f_1=1Hz ; v=2m/s ; L=1m

		Nodes			Freqüència **f = v/λ**
 1r harmònic	$\lambda_1 = 2L$	$x = n\frac{\lambda}{2}$	n=0 n=1	x=0 X=L	$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$
 2n harmònic	$\lambda_2 = L$		n=0 n=1 n=2	x=0 $x = L/2$ x = L	$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} \rightarrow f_2 = 2 \cdot f_1$
 3r harmònic	$\lambda_3 = \frac{2}{3}L$		n=0 n=1 n=2 n=3	x = 0 $x = L/3$ $x = 2L/3$ x = L	$f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{3v}{2L} \rightarrow f_3 = 3 \cdot f_1$
 4t harmònic	$\lambda_4 = \frac{L}{2}$		n=0 n=1 n=2 n=3 n=4	x = 0 $x = L/4$ $x = L/2$ $x = 3L/4$ x = L	$f_4 = \frac{v}{\lambda_4} = \frac{2v}{L} \rightarrow f_4 = 4 \cdot f_1$

Exemples

Tenim una corda de longitud L = 0,5 m i de massa m = 0,05 kg sotmesa a una tensió T = 100 N. Trobeu la velocitat de propagació de les ones, la freqüència fonamental de vibració i la del tercer harmònic.

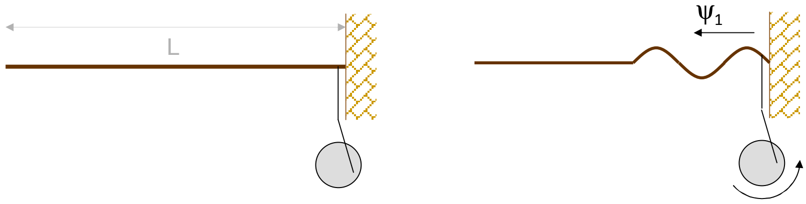
Considereu una corda de longitud L lligada pels dos extrems en la que es generen ones estacionàries l'equació de les quals ve donada per:

$$\Psi = 0{,}2 \cdot \sin(3x) \cdot \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Determineu la longitud de la corda i la velocitat de propagació de les ones, sabent que la coda vibra segons el 5è harmònic.

4. Ones estacionàries en una corda amb un extrem lliure

Considereu una corda de longitud **L** com la de la figura i que està lligada per un extrem. Per l'extrem de la dreta es generen ones a través d'un cigonyal connectat a un pistó que fa oscil·lar la corda tensa.



Les ones generades arribaran a l'extrem lliure de l'esquerra, es reflectiran i interferiran amb elles mateixes. El resultat d'aquesta superposició és una ona que sota certes freqüències de vibració es pot considerar estacionària. Veiem això amb més detall.

4. Ones estacionàries en una corda amb un extrem lliure

Matemàticament l'explicació anterior es pot escriure de la següent forma:

Ona incident ⟶ $\Psi_1 = A\cdot\cos(\omega t + kx)$

Ona reflectida ⟶ $\Psi_2 = A\cdot\cos(\omega t - kx)$

Ona interferència ⟶ $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A\cdot\cos(\omega t + kx) + A\cdot\cos(\omega t - kx)$

$$\Psi = A\cdot(\cos(\underbrace{\omega t + kx}_{\alpha}) + \cos(\underbrace{\omega t - kx}_{\beta})) = \ldots(*)$$

Amb l'ajut de la relació trigonomètrica: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

I que $\begin{cases} \dfrac{\alpha-\beta}{2} = kx \\ \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \omega t \end{cases}$

$$(*) \quad \Psi = 2\cdot A\cdot\cos(kx)\cdot\cos(\omega t)$$

4. Ones estacionàries en una corda amb un extrem lliure

$$\boxed{\Psi = 2\cdot A\cdot\cos(kx)\cdot\cos(\omega t)}$$

Caracterísitiques de les ones estacionàries

L'ona interferència que obtenim té les següents característiques:

1. La freqüència de vibració coincideix amb la de l'ona incident ψ_1 .
2. L'amplitud de l'ona interferència està modulada i val : $A' = 2\cdot A\cdot\cos(kx)$
3. Quan es forma una ona estacionària (anomenat estat estacionari) apareixen punts de la corda que no vibren mai. Aquests punts s'anomenen nodes. Per determinar la seva posició cal igualar A' a zero.

$$A' = 0 \rightarrow 2\cdot A\cdot\cos(kx) = 0 \rightarrow \cos(kx) = 0$$

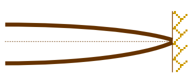
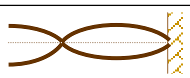
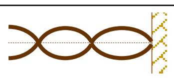
$$kx = \frac{2n+1}{2}\pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = \frac{2n+1}{2}\pi \rightarrow \boxed{x = \frac{(2n+1)}{4}\cdot\lambda} \longrightarrow \text{Posició dels nodes en la corda}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

4. Ones estacionàries en una corda amb un extrem lliure

Estats estacionaris de vibració. Es produeixen per a certes freqüències de vibració.

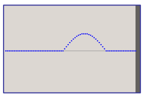
$$\lambda\cdot f = v \rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

		Nodes			Freqüència **f = v/λ**
 1r harmònic	$\lambda_1 = 4L$	$x = \frac{2n+1}{4}\lambda$	n=0	x=L	$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L}$
 3r harmònic	$\lambda_3 = \frac{4L}{3}$		n=0 n=1	x=L/3 x=L	$f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{3v}{4L} \rightarrow f_3 = 3\cdot f_1$
 5è harmònic	$\lambda_5 = \frac{4L}{5}$		n=0 n=1 n=2	x = L/5 x=3L/5 x= L	$f_5 = \frac{v}{\lambda_5} = \frac{5v}{4L} \rightarrow f_5 = 5\cdot f_1$

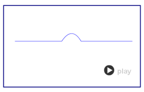
ACTIVITATS

LLIBRE DE TEXT	ACTIVITATS
-PG. 231 -PG. 232 -PG. 236	**13, 14, 15** **16** **17, 18, 19, 20, 21, 22**
MOODLE	ACTIVITATS
FULL 3	**1, 3, 4 7, 9**

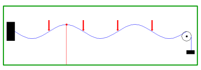
Índex d'applets



http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-5VibracionesyOndas/ondas/ondas6.htm



extrem lliure.swf



http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/estacionarias/estacionarias.html#Actividades