TEMA 6.
ELS CAMPS CENTRALS

1. Introducció

"Entenem per camp central a tota pertorbació generada per una partícula en tots els punts del seu entorn".

Aquesta pertorbació que designarem per $\vec{C}$ existeix pel fet que la partícula en qüestió presenta una característica en particular que anomenem **c**.

Altres partícules que presentin la mateixa característica **c'** sentiran l'efecte de la pertorbació en forma de força

Hi ha dos tipus de camps centrals que compleixen les condicions anteriors, *el camp elèctric* i *el camp gravitatori.* En la taula adjunta apareixen les seves equivalències.

Camp central	$\vec{C}$	c	Equació del camp	$\vec{F}=c'\cdot\vec{C}$	K: Cnt. Coulomb G: Cnt. gravitació universal
Camp elèctric	$\vec{E}$	Q	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F}=q'\cdot\vec{E}$	$K=8{,}99\cdot10^{9}\frac{N\cdot m^2}{C^2}$
Camp gravitatori	$\vec{g}$	M	$\vec{g}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F}=m'\cdot\vec{g}$	$G=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$

6.1.- EL CAMP GRAVITATORI

1. El camp gravitatori

Una massa pertorba tots els punts del seu voltant generant un camp gravitatori en cada un d'aquests punts. Aquest camp és central i atractiu, i ve expressat per l'equació següent:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

on ***G*** és la constant de la gravitació universal que val $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

r és la distància de la massa al punt (mesurada en metres), ***M*** és la massa que crea la gravetat (mesurada en quilograms) i $\boldsymbol{u_r}$ és el vector unitari.

La gravetat és doncs una pertorbació vectorial i les seves unitats són éls **N/kg** o **m/s²**.

De l'expressió del camp gravitatori, distingim:

$$\vec{g} = -\underbrace{G \cdot \frac{M}{r^2}}_{\text{mòdul}} \cdot \underbrace{\vec{u}_r}_{\text{vector unitari}}$$

El camp gravitatori és atractiu i va dirigit cap a la massa

EXEMPLES

Calculeu el valor del camp gravitatori creat pel planeta Terra just sobre els punts de la seva superfície. Dades: $M = 5{,}99 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6.379$ km.

La gravetat que ens demanen és el mòdul, ja que ens demanen simplement el valor del vector gravetat, és a dir:

$$|\vec{g}| = \left| -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r \right| = \left| -G\frac{M}{r^2} \right| \cdot |\vec{u}_r| = G\frac{M}{r^2}$$

Aleshores si calculem el valor del camp obtenim:

$$|\vec{g}| = G\frac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}99 \cdot 10^{24}}{6.379.000^2} = 9{,}81\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

Calculeu la gravetat a 2.000 km de la superfície de la Terra. Preneu les dades de l'exemple anterior.

$$|\vec{g}| = G\frac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}99 \cdot 10^{24}}{(6.379.000 + 2.000.000)^2} = 5{,}69\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

Com podeu comprovar la gravetat terrestre no sempre val 9,81 m/s², és a dir que com més ens allunyem del centre de la Terra, menor és el valor de la gravetat terrestre.

EXEMPLES

On s'anul·la el valor de la gravetat terrestre?

La gravetat terrestre no s'anul·la mai. Això és així perquè la gravetat depèn de paràmetres no nuls que es multipliquen i divideixen.

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

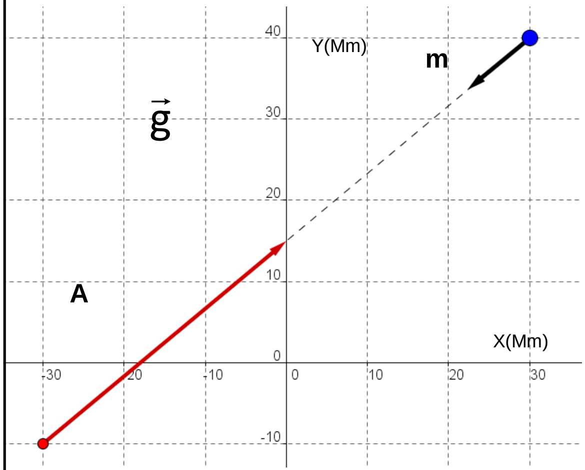
$$\text{Si } \lim_{r \to \infty}\left(G\frac{M}{r^2} \right) = 0$$

Només es pot extrapolar que la gravetat s'allunya quan la distància a la terra és enorme, és a dir que tendeix a infinit.

EXEMPLES

Calcula el camp gravitatori que crea una massa m de 10^{+20} kg en el punt A. La massa està situada en el punt (30Mm,40Mm) el punt A situat a (-30Mm,-10Mm).

El primer que fareu sempre és representar gràficament la posició de A i M



Després expressarem la posició de A i M respecte O.

$$\vec{r}_A = -30\vec{i} - 10\vec{j}\,\text{Mm}$$

$$\vec{r}_M = -30\vec{i} - 40\vec{j}\,\text{Mm}$$

Calculeu la posició de A respecte M.

$$\vec{r}_A - \vec{r}_M = -60\vec{i} - 50\vec{j}\,\text{Mm}$$

EXEMPLES

Ara el què cal fer és la determinació del vector unitari:

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_m}{\left|\vec{r}_A - \vec{r}_m\right|} = \frac{(-30\vec{i} - 10\vec{j}) - (30i + 40j)}{\left|\vec{r}_{AM}\right|} = \frac{-60\vec{i} - 50\vec{j}}{\sqrt{(-60)^2 + (-50)^2}} = \frac{-60\vec{i} - 50\vec{j}}{10\sqrt{61}}$$

$$\vec{u}_r = -\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{61}}\vec{j}$$

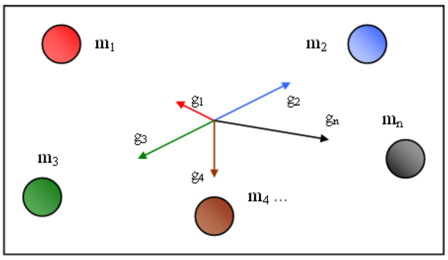
$$\vec{g} = -G\frac{m}{r^2}\cdot\vec{u}_r = -6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{10^{+20}}{(10\sqrt{61}\cdot10^6)^2}\cdot\left(-\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{61}}\vec{j}\right) =$$

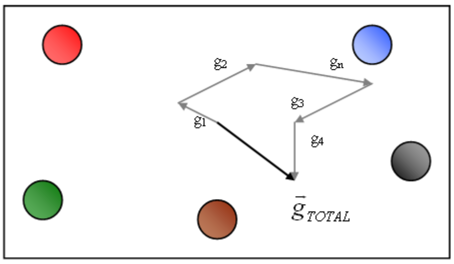
$$= 8{,}40\cdot10^{-7}\,\vec{i} + 7{,}00\cdot10^{-7}\,\vec{j}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

2. Addició de camps gravitatoris.

Quan en una zona de l'espai hi ha més d'una massa, cada massa pertorba els punts del seu voltant creant un camp gravitatori. Així doncs en un punt de l'espai hi haurà els efectes combinats de cada una de les masses que té al voltant. Aquest efecte s'expressa com la suma de camps en un mateix punt.

$$\vec{g}_T = \sum_{k=1}^{n} \vec{g}_k$$





3. La llei de la gravitació universal de Newton.

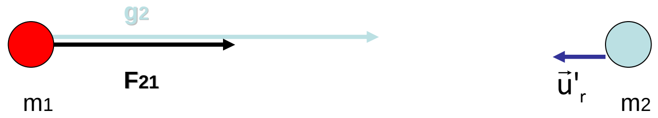
Quan una massa **m'** se situa dins d'un camp gravitatori sentirà l'acció d'una força **F'** que és la resposta a la interacció del camp **g** amb la massa **m'**. L'expressió que relaciona m', g i F' és:

$$\vec{F}' = m' \cdot \vec{g}$$

Quan dues masses se situen una al costat de l'altre la interacció mútua dels respectius camps i de les masses crearà forces sobre elles iguals i contràries (3ª llei de Newton)

$$\vec{F}_{12} = m_1 \cdot \vec{g}_2 = m_1 \cdot \left(-G \frac{m_2}{r^2} \vec{u}_r{}' \right) \qquad \vec{F}_{21} = m_2 \cdot \vec{g}_1 = m_2 \cdot \left(-G \cdot \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_r \right)$$

Veiem això amb més claredat

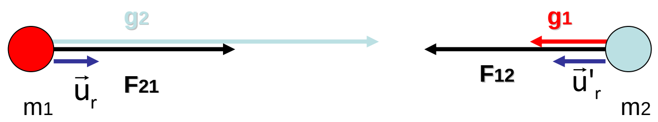


$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r^2}\vec{u}'_r$$

$$\vec{F}_{21} = m_1\cdot\vec{g}_2 \rightarrow \vec{F}_{21} = m_1\cdot\left(-G\frac{m_2}{r^2}\cdot\vec{u}'_r\right) \longrightarrow \vec{F}_{21} = -G\frac{m_2\cdot m_1}{r^2}\cdot\vec{u}'_r$$

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{F}_{12} = m_2\cdot\vec{g}_1 \rightarrow \vec{F}_{12} = m_2\cdot\left(-G\frac{m_1}{r^2}\cdot\vec{u}_r\right) \longrightarrow \vec{F}_{12} = -G\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}\cdot\vec{u}_r$$



$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_2 \cdot m_1}{r^2}\cdot\vec{u}'_r$$

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\cdot\vec{u}_r}$$

$$-\vec{u}_r = \vec{u}'_r$$

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_2 \cdot m_1}{r^2}\cdot\vec{u}'_r \rightarrow \vec{F}_{21} = -G\frac{m_2 \cdot m_1}{r^2}\cdot(-\vec{u}_r) \rightarrow \vec{F}_{21} = +G\frac{m_2 \cdot m_1}{r^2}\cdot\vec{u}_r$$

3a llei de Newton

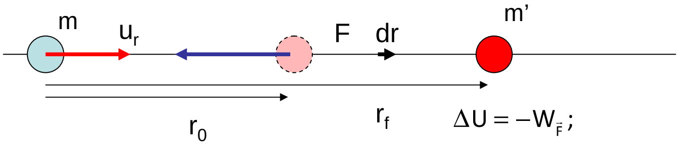
$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$$

$$\boxed{|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|}$$

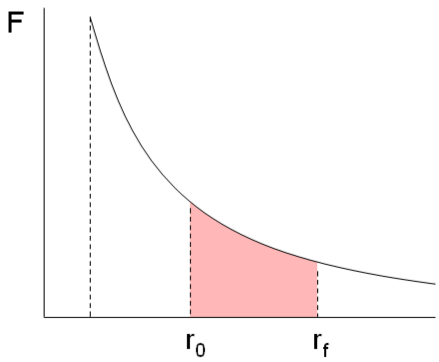
$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\vec{u}_r}$$

5. Energia potencial gravitatòria

La força provocada per dues masses és una força conservativa ja que la seva expressió depèn de la posició, a més de ser una força central. Així doncs podem definir una funció energia potencial associada a la força gravitatòria.



$$\Delta U = -W_{\vec{F}};$$



$$W_{\vec{F}} = \int_{r_0}^{r_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^{r_f} -G\frac{m\cdot m'}{r^2}\cdot u_{\vec{r}}\cdot d\vec{r} =$$

$$-G\cdot m\cdot m'\cdot\int_{r_0}^{r_f}\frac{1}{r^2}\cdot dr = -G\cdot m\cdot m'\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r_f} =$$

$$-G\cdot m\cdot m'\cdot\left[-\frac{1}{r_f}+\frac{1}{r_0}\right] = G\cdot m\cdot m'\cdot\left[\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_0}\right]$$

$$\Delta U = -W_{\vec{F}} \rightarrow U_f - U_0 = -\left(G\cdot m\cdot m'\cdot\left[\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_0}\right]\right)$$

$$U_f - U_0 = -G\cdot m\cdot m'\cdot\left(\frac{1}{r_f}-\frac{1}{r_0}\right) \rightarrow \boxed{U = -G\frac{m\cdot m'}{r}}$$

I l'equació mgh?

Demostreu que l'equació Ep = mgh és una aproximació de $U = -G\dfrac{m \cdot m'}{r}$

$$\Delta U = U_f - U_0 = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r_f} - \left(-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r_0}\right) = -G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_0}\right) =$$

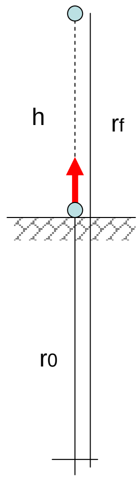
$$= -\left(G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}\right) \cdot R_T^2 \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_0}\right) = -g \cdot R_T^2 \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right) =$$

$$= -m \cdot g \cdot R_T^2 \cdot \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right) = -m \cdot g \cdot R_T^2 \cdot \left(\frac{R_T - (R_T + h)}{R_T \cdot (R_T + h)}\right) =$$

$$= -m \cdot g \cdot R_T^2 \cdot \left(\frac{-h}{R_T^2 + h \cdot R_T}\right) = -m \cdot g \cdot R_T \cdot \left(\frac{-h}{R_T \cdot (R_T + h)}\right) = m \cdot g \cdot \left(\frac{h}{1 + \frac{h}{R_T}}\right)$$

Aleshores, si $h \ll R_T$ tenim:

$$\Delta U = \lim_{\frac{h}{R_T} \to 0} m \cdot g \cdot \left(\frac{h}{1 + \frac{h}{R_T}}\right) = m \cdot g \cdot h$$



Exemple

Disparem verticalment des del nivell del mar un projectil de massa ***m = 25 kg****, observant que assoleix una altura de 150 m. Calculeu la variació d'energia potencial gravitatòria que pateix el projectil en qüestió.*

a) Usant l'equació correcte de l'energia potencial gravitatòria.

b) Usant l'equació aproximada de l'energia potencial gravitatòria (mgh)

Dades: $M_{TERRA} = 5{,}99 \cdot 10^{24}$ *kg i* $R_{TERRA} = 6.379$ *km.*

6. Potencial gravitatori

Com hem vist la força entre dues masses ve donada pel producte entre la massa el camp elèctric.

De forma anàloga podem fer el mateix amb l'energia potencial gravitatòria

$$\vec{F} = -G\frac{m \cdot m'}{r^2}\vec{u}_r = m \cdot \left(-G\frac{m'}{r^2}\vec{u}_r \right) = m \cdot \vec{g}'$$

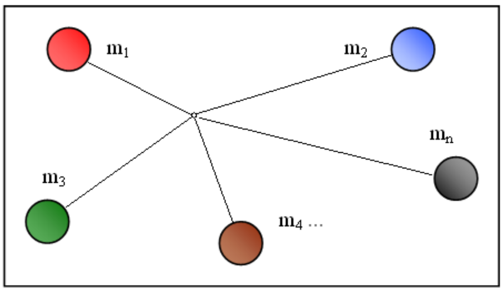
$$U = -G\frac{m \cdot m'}{r} = m \cdot \left(-G \cdot \frac{m'}{r} \right) = m \cdot V'$$

Veiem que el terme que apareix entre parèntesis el designem amb la lletra **V**. Aquest terme s'anomena ***potencial gravitatòri***. El potencial gravitatori és una magnitud molt útil ja que ens permetrà resoldre problemes amb major facilitat. El **potencial gravitatori** es mesura en volts ([V] =1J/kg).
El potencial gravitatori i el camp gravitatori són dues magnituds que estan íntimament relacionades. Qualsevol massa crea en els punts de l'espai dues pertorbacions el camp i el potencial gravitatori de forma simultània.

6. Addició dels potencials gravitatoris

Quan en una zona de l'espai hi ha més d'una massa, cada massa pertorba els punts del seu voltant creant un potencial gravitatori. Així doncs en un punt de l'espai hi haurà els efectes combinats de cada una de les masses que té al voltant. Aquest efecte s'expressa com la suma de potencials en un mateix punt.

$$V_T = \sum_{i=1}^{N} V_i$$

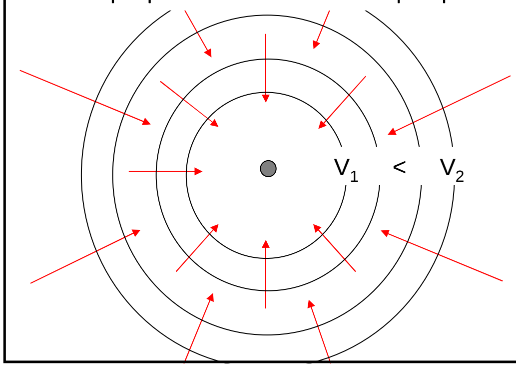


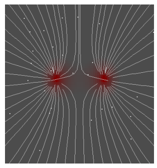
6. Relació entre el potencial i el camp gravitatori.

El treball mecànic que exerceix la força F sobre una massa es pot calcular de dues formes.

$$\left.\begin{aligned} dW_{\vec{F}} &= \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ dW_{\vec{F}} &= -dU \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dU \Rightarrow m\cdot\vec{g}\cdot d\vec{r} = -m\cdot dV \Rightarrow -\vec{g}\cdot d\vec{r} = dV$$

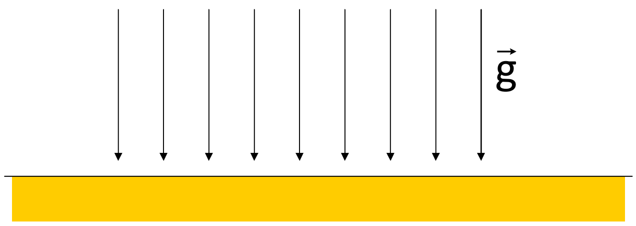
De l'equació anterior deduïm que si ens movem en el sentit del camp gravitatori el potencial gravitatori disminueix, si ho fem en contra el potencial augmenta i si ens movem perpendicularment al camp el potencial no canvia.





Camps gravitatoris uniformes

En zones properes a les superfícies dels planetes, el camp gravitatori es pot considerar uniforme i perpendicular al terra del planeta.



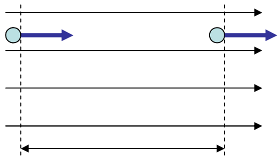
La relació entre el camp i el potencial en el seu interior ve donada per l'equació següent, en la qual g es pot considerar constant.

$$\Delta V = -\vec{g}\cdot\Delta\vec{r}$$

EXEMPLE

En una zona de l'espai existeix un camp pràcticament constant i de valor g = 5,2 m/s². Situem en el si del camp una massa de 25 kg, calculeu:

a) La força que actua sobre la massa en qüestió.
b) La variació de l'energia potencial gravitatoria que pateix la massa en moure's una distància de 11 m.
c) La velocitat que adquireix la massa si inicialment estava aturada.



a) $\vec{F} = m \cdot \vec{g} \to \vec{F} = 25 \cdot (5{,}2\,\vec{i}) = 130\,\vec{i}\ \mathrm{N}$

b) $\Delta U = m \cdot \Delta V = 25 \cdot (-57{,}2) = -1430\,\mathrm{J}$

$\Delta V = -\vec{g} \cdot \Delta \vec{r} \to \Delta V = -(5{,}2\,\vec{i}) \cdot (11\,\vec{i}) = -57{,}2\ \mathrm{J/kg}$

c) $\Delta E_m = 0 \to \Delta E_c + \Delta U = 0 \to \Delta E_c + \Delta U = 0 \to$

$\Delta E_c + \Delta U = 0 \to \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \Delta U = 0$

$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -\Delta U \to v^2 = -\frac{2 \cdot \Delta U}{m} = -\frac{2 \cdot (-1430)}{25} = 114{,}4\ \mathrm{m^2/s^2} \to v = 10{,}69\,\mathrm{m/s}$

$\Delta E_c = E_{cf} - E_{co} \to \Delta E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - 0$

Energia d'un sistema de partícules

Suposem que tenim un sistema de partícules com el de la figura. Les interaccions mútues (forces gravitatòries) són conservatives i per tant, l'energia mecànica del sistema es manté constant. L'energia mecànica del sistema es calcula com la suma d'energies mecàniques.

$$E_m = \sum_{K=1}^{N} E_{m_K}$$

Aquesta energia mecànica és la suma de l'energia cinètica i l'energia potencial gravitatòria del sistema.

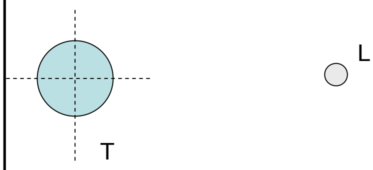
Per determinar-ne el valor cal aplicar la següent relació

$$E_m = \sum_{k=1}^{N} E_{C_K} + \sum_{K \neq L} U_{KL}$$

On E_m és l'energia mecànica del sistema E_{C_K} és l'energia cinètica de la partícula k i U_{KL} és l'energia potencial de les partícules relatives dos a dos.

Exemples

Considera el sistema Terra Lluna. Considereu la Terra aturada i la Lluna que gira al voltant de la Terra. Troba l'elergia mecànica del sistema respecte la Terra.



$$E_m = E_{m_T} + E_{m_L} = 0 - 3{,}64 \cdot 10^{+28}\,\text{J}$$

$$E_{m_T} = E_{C_T} + U_{TT} = 0 + 0 = 0$$

$$E_{m_L} = E_{C_L} + U_{TL} = \frac{1}{2} \cdot M_L \cdot v^2 - G\frac{M_T \cdot M_L}{r} = -3{,}64 \cdot 10^{+28}\,\text{J}$$

$$E_{C_L} = 3{,}64 \cdot 10^{+28}\,\text{J} \ ; \ U_{TL} = -7{,}28 \cdot 10^{+28}\,\text{J}$$

Exemples

Considera el sistema format per Mart, Phobos i Deimos. Considereu la Phobos i Deimos giren al voltant de Mart. Troba l'elergia mecànica del sistema respecte Mart.

Dades: M_{Mart}=6,42··10^{+23} J ; M_{Deimos} = 2,40·10^{+15} kg ; M_{Phobos} = 10,6·10^{+15} kg

r_{MD} = 23.500 km ; r_{MP} = 9.400 km

$$E_m = E_{m_M} + E_{m_D} + E_{m_{PH}} = 0 - \text{J} -$$

$$E_{m_M} = E_{C_M} + U_{MM} = 0 + 0 = 0$$

$$E_{m_D} = E_{C_D} + U_{MD} = \frac{1}{2} \cdot M_D \cdot v^2 - G\frac{M_M \cdot M_D}{r_{MD}} = \text{J}$$

$$E_{C_D} = \text{J} \ ; \ U_{MD} = \text{J}$$

$$E_{m_{PH}} = E_{C_{PH}} + U_{MPH} = \frac{1}{2} \cdot M_{PH} \cdot v^2 - G\frac{M_M \cdot M_{PH}}{r_{M-PH}} = \text{J}$$

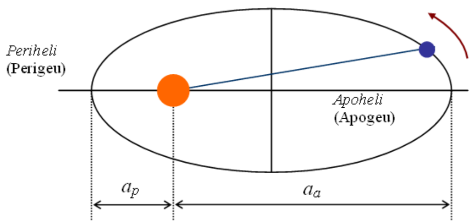
$$E_{C_{PH}} = \text{J} \ ; \ U_{M-PH} = \text{J}$$

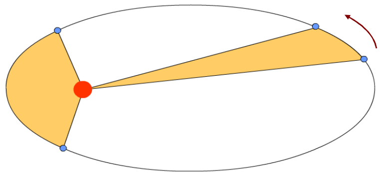
Les lleis de Kepler

Entre els anys 1600 i 1620 Johanes Kepler va deduir les tres lleis fonamentals que permeten explicar el moviment dels planetes al voltant del Sol. La seva deducció va ser totalment experimental a partir de les observacions astronòmiques molt precises de la trajectòria del planeta Mart. Les dades astronòmiques eren anotacions de l'astrònom italià Ticho Brahe. Així doncs el moviment dels planetes al voltant del Sol o dels satèl·lits al voltant d'un planeta es resumeixen en tres lleis.

Les lleis de Kepler

1. Tots els planetes (*satèl·lits*) descriuen òrbites el·líptiques amb el Sol (*planeta*) situat en un dels focus de l'el·lipse
2. La recta que uneix el planeta (*satèl·lit*) i el Sol (*planeta*) escombra àrees iguals en temps iguals
3. El quadrat del període orbital el·líptic del planeta (*satèl·lit*) al voltant del Sol (*planeta*) és proporcional al cub del semieix major de la trajectòria el·líptica descrita. La constant de proporcionalitat depèn de la massa de l'objecte central, mai de la massa de l'objecte que gira



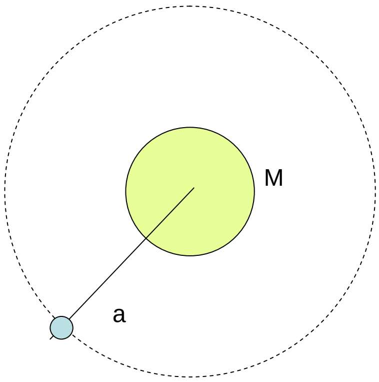


$$T^2 = C \cdot a^3$$

$$a = \frac{a_p + a_a}{2}$$

Les lleis de Kepler

El valor de la constant C de la 3a llei de Kepler es dedueix a partir de la força centrípeta i gravitatòria per a òrbites circulars. $T^2 = C \cdot r^3$



$$F_c = F_G \rightarrow G\frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot a_c$$

$$G\frac{M}{r^2} = a_c \rightarrow G\frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$$

$$\text{Si} \quad v = \omega r \quad \text{i} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$G\frac{M}{r} = (\omega r)^2 \rightarrow G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi}{T} \cdot r\right)^2$$

$$G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^2 \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} \cdot r^3$$

$$C = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} \cdot r^3$$

EXEMPLES

Determineu la massa del Sol si el període de la Terra és d'1 any i la distància promig entre la terra i el Sol és de 150.000.000 km.

$$T = 1 \text{ any} = 365.25 \text{ dies} = 31.555.875 s$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_{sol}} \cdot r^3 \rightarrow M_{sol} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2} \rightarrow M_{sol} = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \cdot \frac{(150 \cdot 10^{+9})^3}{31.555.875^2} = 2{,}00 \cdot 10^{+30} \text{ kg}$$

Calculeu el període orbital de la lluna al voltant de la Terra, mesurat en dies.
Dades: $M_{TERRA} = 5{,}99 \cdot 10^{24}$ kg, $D_{TERRA\text{-}LLUNA} = 384.000$ km

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_{TERRA}} \cdot r^3 \rightarrow = T^2 = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}99 \cdot 10^{+24}} \cdot (384 \cdot 10^{+6})^3 = 5{,}59 \cdot 10^{+12} s^2$$

$$T = \sqrt{5{,}59 \cdot 10^{+12}} \rightarrow T = 2.36.377.04 \text{ s} \rightarrow 27{,}38 \text{dies}$$

L'ENERGIA MECÀNICA DELS COSSOS CEL·LESTES

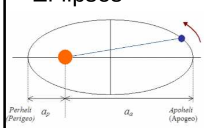
Kepler només va poder observar una de les possibles trajectòries dels cossos celestes. Realment hi ha més trajectòries possibles. Totes elles pertanyen a la família de les corbes còniques.

Distingim:

Òrbites tancades: El·lipses, Circumferència

Òrbites obertes: Paràbola, Hipèrbola

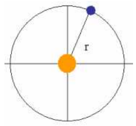
El·lipses



$0 < e < 1$

$E_m < 0$

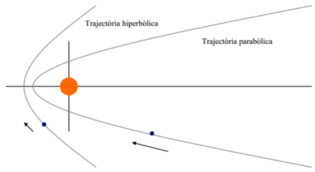
Circumferència



$e = 0$

$E_m < 0$

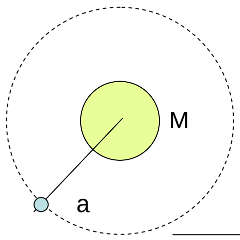
Paràbola / Hipèrbola



Paràbola: $e = 1$, $E_m = 0$

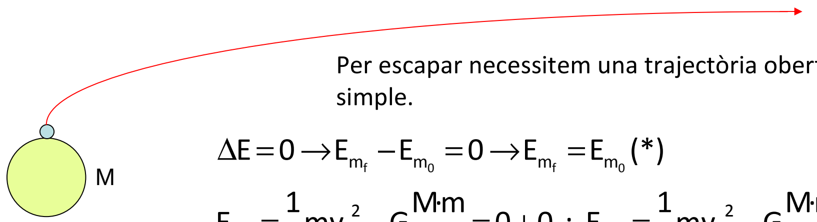
Hipèrbola: $e > 1$, $E_m > 0$

Velocitat orbital i velocitat d'escapament



$$F_c = F_G \rightarrow G\frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot a_c \rightarrow G\frac{M}{r^2} = a_c \rightarrow G\frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

$$G\frac{M}{r} = v^2 \rightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$



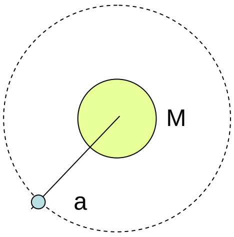
Per escapar necessitem una trajectòria oberta, la més simple.

$$\Delta E = 0 \rightarrow E_{m_f} - E_{m_0} = 0 \rightarrow E_{m_f} = E_{m_0} \; (*)$$

$$E_{m_f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{M \cdot m}{r_f} = 0 + 0 \; ; \; E_{m_0} = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{M \cdot m}{R}$$

$$(*) \rightarrow \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{M \cdot m}{R} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}v_e^2 = G\frac{M}{R} \rightarrow v_e = \sqrt{2 \cdot G\frac{M}{R}}$$

Energia mecànica dels cossos en òrbita circular.

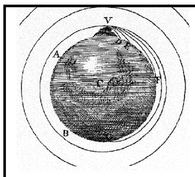


Quan un cos està en òrbita circular al voltant d'un altre, podem calcula la seva energia mecànica.

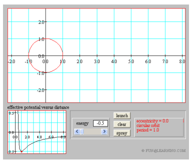
$$E_m = E_C + U \rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G\frac{M \cdot m}{r} \rightarrow E_m = -\frac{1}{2}U - U$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}U < 0} \; ; \; \boxed{E_C = -\frac{1}{2}U > 0}$$

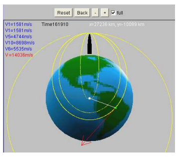
$$\text{velocitat orbital } v^2 = G\frac{M}{r} =$$



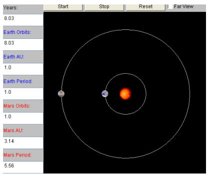
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-1Gravitacion/CannonNewton/Newtonian%20Mountain.htm



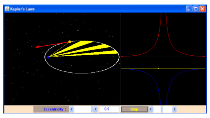
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-1Gravitacion/EnergiaOrbitas/Energ%C3%ADayOrbita.htm



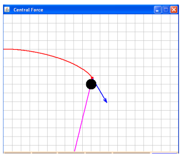
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-1Gravitacion/Orbitas%20de%20Proyectiles%20y%20satelites/OrbitasProyectiles.html



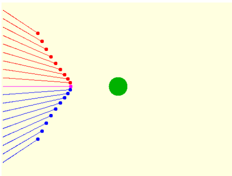
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-1Gravitacion/LeyKepler3/Kepler.htm



http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-1Gravitacion/LeyesKepler/LeyesKeplerEnergia.htm



http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-1Gravitacion/FuerzasCentrales1/FuerzasCentrales1.htm



http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/lentiscal/2-CD-Fiisca-TIC/2-1Gravitacion/FuerzasCentrales2/FuerzasCentrales.htm

Anar a la diapositiva 9.