

Aplicacions del càlcul de derivades

Creixement i decreixement en un interval

Concavitat i convexitat en un interval

Punts d'inflexió

Determinació de màxims i mínims locals

Representació gràfica de funcions

Creixement i decreixement en un interval

Considerem una funció $f(x)$ continua i derivable en l'interval obert (a,b) . Diem que la funció $f(x)$ és creixent (decreixent) en l'interval (a,b) si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) per a qualsevol valor x que compleixi $a < x < b$.

Si $f'(x) > 0; \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f(x)$ creixent en (a,b)

Si $f'(x) < 0; \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f(x)$ decreixent en (a,b)

Demostració

Si $f'(x) > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x+h) > f(x); \forall h > 0 \\ f(x+h) < f(x); \forall h < 0 \end{cases}$
 Si $h > 0 \Rightarrow x+h > x$ i a més $f(x+h) > f(x)$ creix en $(x, x+h)$
 Si $h < 0 \Rightarrow x+h < x$ i a més $f(x+h) < f(x)$ creix en $(x+h, x) \Rightarrow f(x)$ creix en (a,b)

Si $f'(x) < 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x+h) < f(x); \forall h > 0 \\ f(x+h) > f(x); \forall h < 0 \end{cases}$
 Si $h > 0 \Rightarrow x+h > x$ i a més $f(x+h) < f(x)$ decreix en $(x, x+h)$
 Si $h < 0 \Rightarrow x+h < x$ i a més $f(x+h) > f(x)$ decreix en $(x+h, x) \Rightarrow f(x)$ decreix en (a,b)

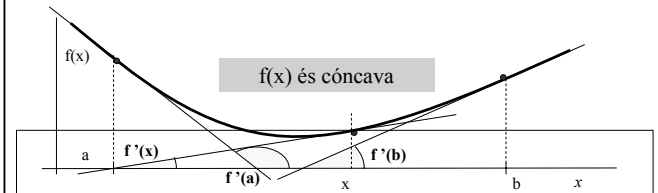
Concavitat en un interval

Considerem una funció $f(x)$ continua i derivable en l'interval obert (a,b) . Diem que la funció $f(x)$ és còncava en l'interval (a,b) si $f''(x) > 0$ per a qualsevol valor x que compleixi $a < x < b$.

Si $f''(x) > 0$ en $(a,b) \Leftrightarrow f(x)$ és còncava en (a,b)

Demostració

Si $f''(x) > 0$ en $(a,b) \Leftrightarrow f'(x)$ és creixent en (a,b)
 Si $x \in (a,b) \Rightarrow f'(a) < f'(x) < f'(b)$



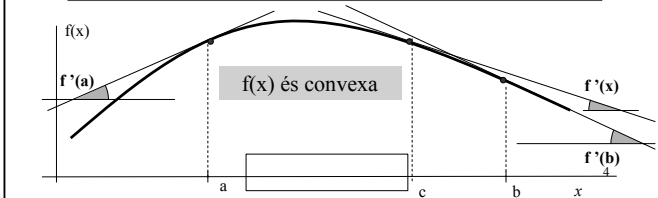
Convexitat en un interval

Considerem una funció $f(x)$ continua i derivable en l'interval obert (a,b) . Diem que la funció $f(x)$ és convexa en l'interval (a,b) si $f''(x) < 0$ per a qualsevol valor x que compleixi $a < x < b$.

Si $f''(x) < 0$ en $(a,b) \Leftrightarrow f(x)$ és convexa en (a,b)

Demostració

Si $f''(x) < 0$ en $(a,b) \Leftrightarrow f'(x)$ és decreixent en (a,b)
 Si $x \in (a,b) \Rightarrow f'(a) > f'(x) > f'(b)$



Punts d'inflexió

Sigui una funció $f(x)$ continua i derivable en l'interval obert (a,b) . Si es compleix que $f''(c) = 0$ i $f'''(c) \neq 0$, diem que la funció presenta un punt d'inflexió en $c \in (a,b)$.

$$\text{Si } f''(c) = 0; f'''(c) \neq 0 \Rightarrow x = c \text{ és punt d'inflexió}$$

Demostració:

Per reducció a l'absurd:

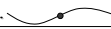
$$\text{Si } f''(c) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(c) > 0 \Rightarrow \text{En } x = c \text{ } f(x) \text{ còncava} \\ f''(c) < 0 \Rightarrow \text{En } x = c \text{ } f(x) \text{ convexa} \end{cases}$$

Hi ha dos tipus de punts d'inflexió:

1. El punt on la funció passa de convexa a còncava



2. El punt on la funció passa de còncava a convexa.



Màxims i mínims locals d'una funció

Considereu una funció $f(x)$ continua i derivable en l'interval (a,b) . Quan $f(x)$ presenta un màxim o mínim en $x = c$ ($a < c < b$) aleshores $f'(c) = 0$ i a més $f''(c) < 0$ o $f''(c) > 0$ respectivament.

$$\text{Si } f(c) \text{ és màxima} \Rightarrow f'(c) = 0 \text{ i } f''(c) < 0$$

$$\text{Si } f(c) \text{ és mínima} \Rightarrow f'(c) = 0 \text{ i } f''(c) > 0$$

Demostració

$$\text{Si } f(c) \text{ màxim} \Rightarrow \begin{cases} f(c+h) - f(c) \leq 0; \forall h > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \\ f(c+h) - f(c) \geq 0; \forall h < 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{En ser } f(x) \text{ derivable} \Rightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \Rightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

Representació gràfica d'una funció

L'objectiu de tot els que heu après en els apartats anteriors és la representació gràfica de funcions.

Per representar funcions seguireu els següents passos:

1. Trobareu el domini d' $f(x)$.

2. Buscareu les simetries.

- Simetria respecte l'eix y ($x=0$).

$$f(x) = f(-x)$$

- Simetria respecte la recta $y = x$.

$$f(x) = -f(-x)$$

3. Interseccions amb els eixos de coordenades

- Tall amb l'eix x ($y=0$). Resoldreu

$$f(x) = 0$$

- Tall amb l'eix y ($x=0$). Feu

$$f(0) = y$$

Per Roger Mauricio Grañó

7

4. Buscareu les asymptotes

$$\text{A.H.} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k \text{ A.H. per la dreta} \Rightarrow x = k \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k' \text{ A.H. per l'esquerra} \Rightarrow x = k' \end{cases}$$

$$\text{A.V.} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ A.V. per la dreta} \\ \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \pm\infty \text{ A.V. per l'esquerra} \end{cases}$$

A.O.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m; \text{pendent de A.O.} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - m \cdot x) = n; \text{ordenada a l'origen de A.O.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = m \cdot x + n \text{ A.O. per la dreta}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m'; \text{pendent de A.O.} \\ \lim_{x \rightarrow \mp\infty} (f(x) - m' \cdot x) = n'; \text{ordenada a l'origen de A.O.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = m' \cdot x + n' \text{ A.O. per l'esquerra}$$

5. Estudiareu el creixement i decreixement de la funció.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, \dots$ Possibles màxims i mínims locals.

A cada interval estudiareu el creixement. Sobre la recta situareu els punts que anul·len $f'(x)$ i els que estan fora del domini.

6. Determinareu màxims, mínims, punts d'inflexió i la curvatura a cada interval.

Resoldre $f''(x) = 0 \Rightarrow x_3, x_4, \dots$ Possibles punts d'inflexió

A cada interval estudiareu la curvatura (còncava – convexa). Sobre la recta situarem els punts que anul·len $f''(x)$ i els que estan fora del domini.

Exercici per nota

Representeu gràficament : $f(x) = x \cdot e^x$

EXEMPLES

Representeu gràficament :

$$f(x) = x^2 \cdot e^x$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

$$f(x) = \ln x + \sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$