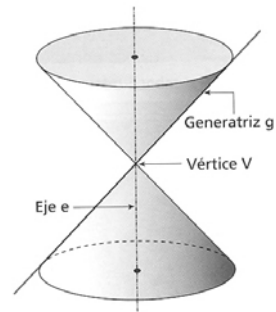


Tema 12. LES CÒNIQUES TANCADAES

- La circumferència
- L'el·lipse

Per Roger Mauricio Grañó

1

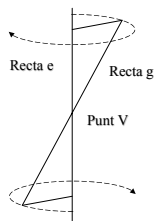


Dels dos cons invertits com els de la figura definim: La generatriu g , el vèrtex V i l'eix e .

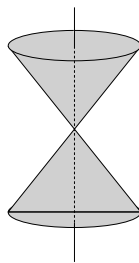
Per Roger Mauricio Grañó

3

Les còniques com a seccions d'un con



Considereu la recta g i la recta e que es tallen en el punt V . Si fem girar la recta g al voltant de la recta e es genera una figura de revolució cònica.



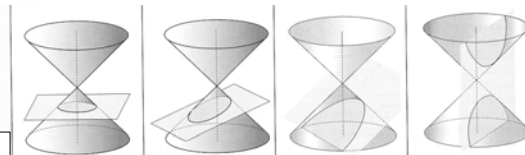
Per Roger Mauricio Grañó

2

Còniques no degenerades

Dels cons anteriors, s'obtenen les diferents *còniques no degenerades* quan es fa intersectar un pla amb els cons generats pel gir de la recta g sobre la recta e .

CÒNIQUES NO DEGENERADES.
El pla no passa per V



Circumferència

Quan el pla és perpendicular a l'eix e

El·lipse

Quan el pla talla l'eix e i la generatriu g

Paràbola

Quan el pla és paral·lel a la generatriu

Hipèrbola

Quan el pla és paral·lel a l'eix

Per Roger Mauricio Grañó

4

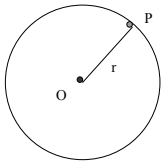
La circumferència

Estudi sintètic de la circumferència

La circumferència C és la corba definida per tots els punts geomètrics del pla que equidisten d'un punt fix O anomenat centre. Per definició esciuem:

$$C = \{P \in \mathbb{R}^2 / d(P, O) = r\}$$

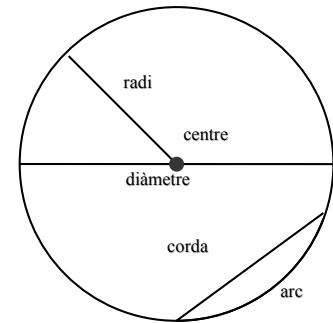
On r és la distància de qualsevol punt de la circumferència al centre O . r s'anomena radi.



Per Roger Mauricio Grañó

6

Elements de la circumferència



Per Roger Mauricio Grañó

7

Posicions relatives

D'un punt respecte una circumferència

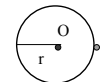
Punt exterior

$$d(A, O) > r$$



Punt tangent

$$d(A, O) = r$$



Punt interior

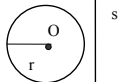
$$d(A, O) < r$$



D'una recta respecte d'una circumferència

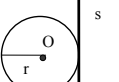
Recta exterior

$$d(s, O) > r$$



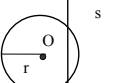
Recta tangent

$$d(s, O) = r$$



Recta interior

$$d(s, O) < r$$



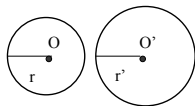
Per Roger Mauricio Grañó

8

D'una circumferència respecte una altra circumferència

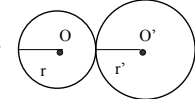
Circumferències
exterior

$$d(O, O') > r + r'$$



Circumferències
tangents exterior

$$d(O, O') = r + r'$$



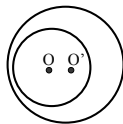
Circumferències
tangents interior

$$d(O, O') = r' - r$$



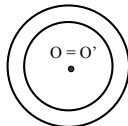
Circumferències interiors

$$d(O, O') < r' - r$$



Circumferències concèntriques

$$d(O, O') = 0$$



Per Roger Mauricio Grañó

9

$$d(P, O) = r \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Si desenvolupem l'equació anterior ens quedarà:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

Reordenant termes, tindrem:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

Si fem: $D = -2a$

$$E = -2b$$

$$F = (a^2 + b^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

També podem obtenir el centre de la circumferència i el radi a partir dels paràmetres D, E i F

$$a = -\frac{1}{2}D$$

$$b = -\frac{1}{2}E$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

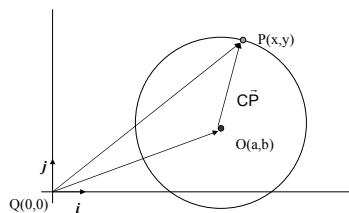
Per Roger Mauricio Grañó

11

Estudi analític de la circumferència

Equació general de la circumferència

Sigui $SR(Q, i, j)$ un sistema de referència del pla. Sigui la circumferència amb centre $O(a, b)$ i de radi r .



A partir de la definició anterior de la circumferència $d(P, O) = |PO| = r$ obtenim l'equació analítica de la circumferència.

Per Roger Mauricio Grañó

10

Equació reduïda de la circumferència

Quan la circumferència està centrada en l'origen de $Q(0,0)$, la seva equació queda molt simplificada.

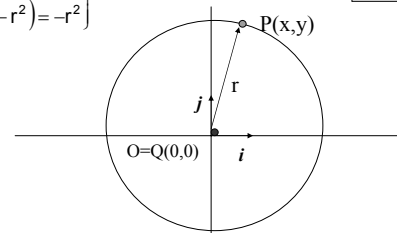
$$a = 0 ; b = 0$$

$$D = -2a = 0$$

$$E = -2b = 0$$

$$F = (a^2 + b^2 - r^2) = -r^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - r^2 = 0$$



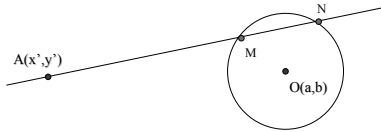
Per Roger Mauricio Grañó

12

Potència d'un punt respecte una circumferència

Definició

Sigui un punt **A**, una circumferència amb centre **O** i una recta **s** que passa per **A** i que talla la circumferència anterior.



Definim potència de A respecte de la circumferència com:

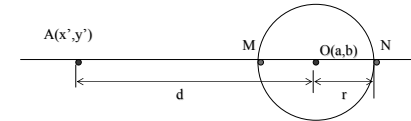
$$\text{Pot}_C(A) = d(A, M) \cdot d(A, N)$$

Per Roger Mauricio Grañó

13

És a dir, per calcular $\text{Pot}_C(A)$, prenguem la recta que prenguem, sempre obtindrem el mateix resultat.

Tenint en compte la demostració anterior i per simplificar el càlcul de la $\text{Pot}_C(A)$ podem prendre sempre la recta que passa per A i O.



$$\text{Pot}_C(A) = d(A, M) \cdot d(A, N) = (d - r) \cdot (d + r) = d^2 - r^2$$

Però **d** és la distància entre A i O. $d = \sqrt{(x' - a)^2 + (y' - b)^2}$

$$\text{Pot}_C(A) = d^2 - r^2 = (x' - a)^2 + (y' - b)^2 - r^2$$

Per Roger Mauricio Grañó

15

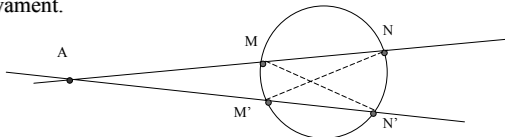
Lema

La potència d'un punt respecte una circumferència no depèn de la recta que seleccionem pel càlcul.

Demostració:

Prenguem dues rectes qualssevol que passin per A i que tallin la circumferència anterior.

Les rectes anteriors tallen la circumferència en M i N, i M' i N' respectivament.



Els triangles **AMN'** i **AM'N** són semblants per tenir un angle en comú. Ara aplicant el teorema de Thales tindrem:

$$\frac{d(A, M')}{d(A, M)} = \frac{d(A, N)}{d(A, N')} \Rightarrow d(A, M') \cdot d(A, N') = d(A, N) \cdot d(A, M) = \text{Pot}_C(A)$$

14

Important !

Si A és tangent a la circumferència $\Rightarrow \text{Pot}_C(A) = 0$

Si A és interior a la circumferència $\Rightarrow \text{Pot}_C(A) < 0$

Si A és exterior a la circumferència $\Rightarrow \text{Pot}_C(A) > 0$

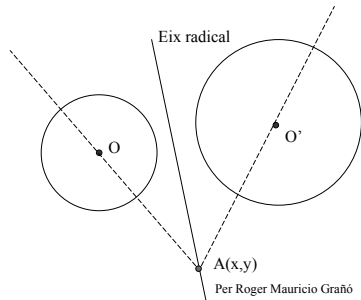
Per Roger Mauricio Grañó

16

Eix radical de dues circumferències

És la recta, els punts de la qual tenen potències iguals respecte cada una de les circumferències.

$$\text{Pot}_C(A) = \text{Pot}_{C'}(A)$$



17

Reordenant els termes:

$$2(a'-a)x - 2(b'-b)y + (a^2 - a'^2 + b^2 - b'^2 + r'^2 - r^2) = 0$$

Ens quedarà l'equació implícita d'una recta que resulta ser la de l'eix radical.

$$Lx + Ry + S = 0$$

Amb:

$$L = 2(a' - a)$$

$$R = -2(b' - b)$$

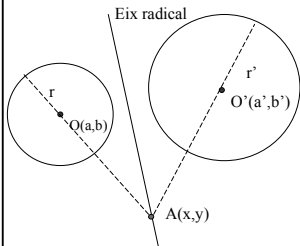
$$S = a^2 - a'^2 + b^2 - b'^2 + r'^2 - r^2$$

Per Roger Mauricio Grañó

19

Determinació de l'eix radical de dues circumferències

Per trobar l'equació de l'eix radical, partirem de la definició anterior.



$$\text{Pot}_C(A) = \text{Pot}_{C'}(A)$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = (x-a')^2 + (y-b')^2 - r'^2$$

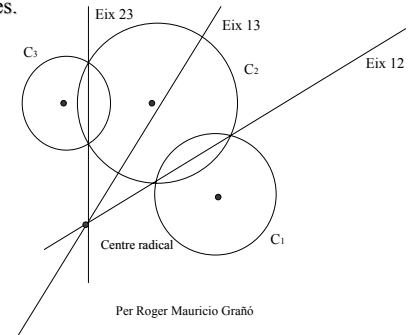
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = x^2 - 2a'x + a'^2 + y^2 - 2b'y + b'^2 - r'^2$$

$$-2ax + a^2 - 2by + b^2 - r^2 = -2a'x + a'^2 - 2b'y + b'^2 - r'^2$$

Centre radical de tres circumferències.

Anomenem centre radical de tres circumferències a un punt del pla que té igual potència respecte les tres circumferències.

S'obté fent la intersecció de dos dels tres eixos radicals de les tres circumferències.

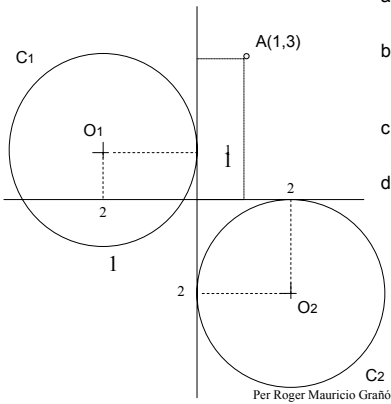


Per Roger Mauricio Grañó

20

EXEMPLE 1

- Considereu les circumferències de la figura:
- Trobeu les equacions de les circumferències.
 - Les interseccions de les circumferències amb els eixos de coordenades.
 - L'equació de l'eix radical de les dues circumferències.
 - La potència de punt A respecte la circumferència C1.



Per Roger Mauricio Grañó

21

L'el·lipse

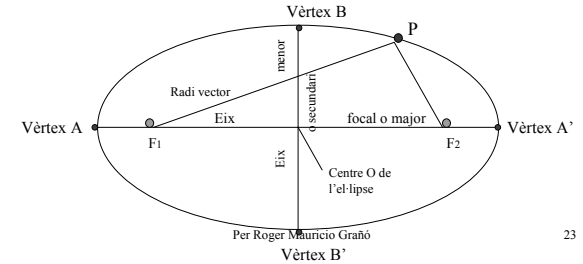
Estudi sintètic de l'el·lipse

Definició:

L'el·lipse és la corba del pla que la suma de la distància dels seus punts a dos punts fixos del pla anomenats focus, és constant.

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 / d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a\}$$

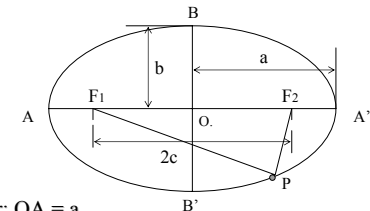
Elements de l'el·lipse



Per Roger Mauricio Grañó

23

Paràmetres de l'el·lipse



Semieix major: $OA = a$

Semieix menor: $OB = b$

Distància focal: $F_1F_2 = 2c$

Per altra banda: $d(F_1, A') + d(F_2, A') = 2c + (a - c) + (a - c) = 2a$

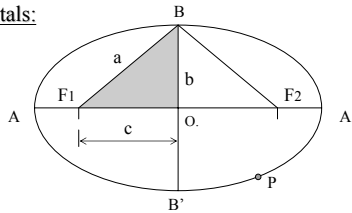
I segons la definició d'el·lipse: $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$

Per Roger Mauricio Grañó

24

Relacions mètriques en l'el·lipse

Relacions mètriques fonamentals:



Per a tot punt de l'el·lipse es compleix que $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$. El punt en B pertany a l'el·lipse i a més es compleix $d(F_1, B) = d(F_2, B)$. Tenint en compte això, tindrem:

$$\left. \begin{array}{l} d(F_1, B) + d(F_2, B) = 2a \\ d(F_1, B) = d(F_2, B) \end{array} \right\} \Rightarrow d(F_1, B) = d(F_2, B) = a$$

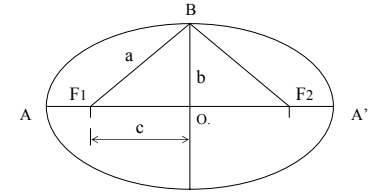
A més: $a^2 = b^2 + c^2$

Per Roger Mauricio Grañó

25

L'excentricitat es calcula de la següent manera: $e = \frac{c}{a}$

En ser $0 \leq c < a$, aleshores: $0 \leq e < 1$

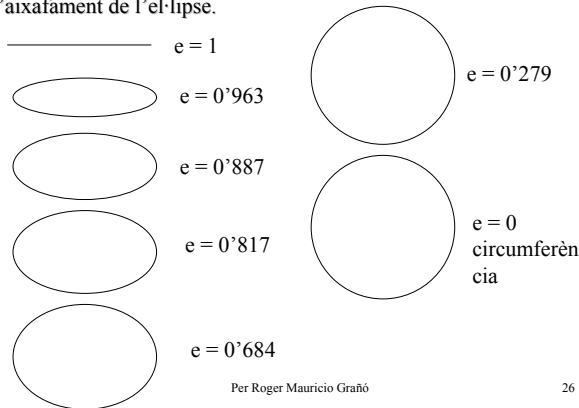


Per Roger Mauricio Grañó

27

Excentricitat:

És un paràmetre adimensional que permet mesurar el grau d'aixafament de l'el·lipse.



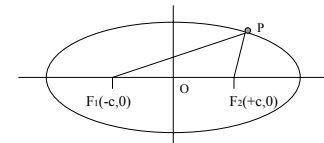
Per Roger Mauricio Grañó

26

Estudi analític de l'el·lipse

Equació reduïda de l'el·lipse

Considerem un sistema de referència $SR(Q, i, j)$ i una el·lipse amb centre O sobre Q i els focus $F_1(-c, 0)$ i $F_2(+c, 0)$.



L'equació reduïda de l'el·lipse s'obté a partir de la seva definició:

$$\begin{aligned} E &= \{P \in \mathbb{R}^2 / d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a\} \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ x^2 + c^2 - 2cx + y^2 &= 4a^2 + x^2 + c^2 + 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ -4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ cx + a^2 &= a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

28

$$\begin{aligned}
 cx + a^2 &= a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
 c^2x^2 + a^4 + 2a^2cx &= a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) \\
 c^2x^2 + a^4 + 2a^2cx &= a^2x^2 + 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2 \\
 (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\
 (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
 \end{aligned}$$

Tenint en compte que $b^2 = a^2 - c^2$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Que dividint per a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(x-a')^2 + (y-b')^2 = (x-c')^2 + (y-d')^2 - 4a\sqrt{(x-c')^2 + (y-d')^2} + 4a^2$$

$$x^2 + a'^2 - 2a'x + x^2 + b'^2 - 2b'y = x^2 + c'^2 - 2c'x + x^2 + d'^2 - 2d'y - 4a\sqrt{(x-c')^2 + (y-d')^2} + 4a^2$$

$$(a'^2 - c'^2 + b'^2 - d'^2 - 4a^2) + 2(c'-a')x + 2(d'-b')y = -4a\sqrt{(x-c')^2 + (y-d')^2}$$

$$A + Bx + Cy = -4a\sqrt{(x-c')^2 + (y-d')^2}$$

$$A^2 + 2ABx + 2ACy + B^2x^2 + 2BCxy + C^2y^2 = 16a^2((x-c')^2 + (y-d')^2)$$

$$A^2 + 2ABx + 2ACy + B^2x^2 + 2BCxy + C^2y^2 = 16a^2x^2 + 16a^2c'^2 - 32a^2c'x + 16a^2y^2 + 16a^2d'^2 - 32a^2d'y$$

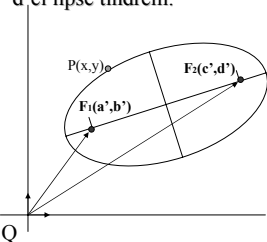
$$(B^2 - 16a^2)x^2 + (C^2 - 16a^2)y^2 + 2BCxy + (2AC + 32a^2d')y + (2AB + 32a^2c')x + (A^2 - 16a^2(d'^2 + c'^2)) = 0$$

És a dir que ens queda una equació de la forma :

$$Ex^2 + Fy^2 + Gxy + Hx + Jy + K = 0$$

Equació general de l'el·lipse

Les el·lipses no tenen perquè estar centrades sobre els eixos de coordenades de manera que per un cas general si apliquem la definició d'el·lipse tindrem:



$$\begin{aligned}
 E &= \{P \in \mathbb{R}^2 / d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a\} \Rightarrow \\
 \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2} + \sqrt{(x-c')^2 + (y-d')^2} &= 2a
 \end{aligned}$$

Passant una arrel a la dreta, elevat al quadrat i simplificant l'expressió ens quedarà:

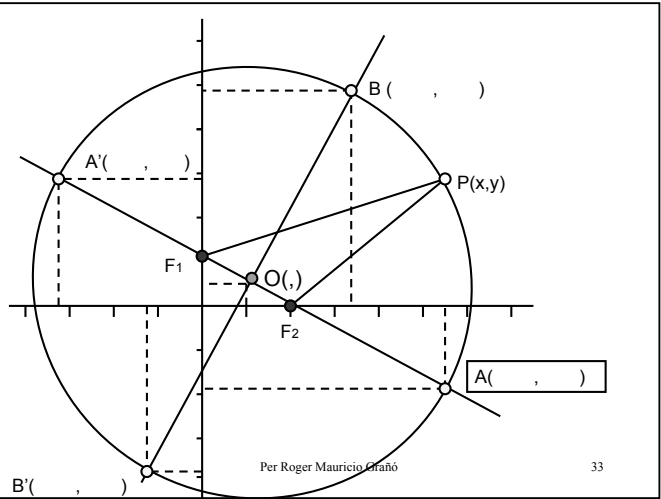
$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2} &= 2a - \sqrt{(x-c')^2 + (y-d')^2} \\
 (x-a')^2 + (y-b')^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c')^2 + (y-d')^2}\right)^2
 \end{aligned}$$

EXEMPLE 2

Els focus d'una el·lipse estan situats a $F_1(0, 1)$, $F_2(2, 0)$. El semieix major és $a = 5$.

- Trobeu les equacions de l'eix major i menor de l'el·lipse i la posició dels punts O, A, A', B i B'.
- Trobeu l'excentricitat de l'el·lipse anterior.
- Calculeu l'equació de l'el·lipse.





PROBLEMES DEL LLIBRE

- Pg. 148. 1,2a,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,17,19,20
- Pg. 149. 21,22