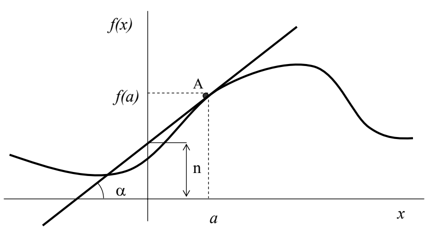
La derivada d'una funció.

Derivada d'una funció en un punt

Considereu la gràfica d'una funció qualsevol. Volem calcular el pendent de la recta tangent a la gràfica que passa pel punt A[*a*,*f(a)*].

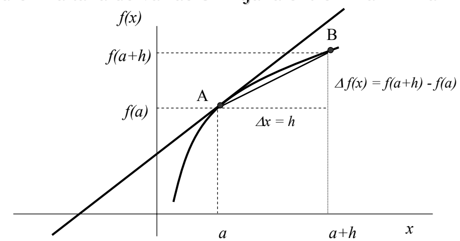


Sabem que la recta en qüestió tindrà una equació de la forma $y = m \cdot x + n$ on $m = tg\ \alpha$.

Però com trobem l'equació d'una recta si només coneixem un punt de la recta?

Taxa de variació mitjana entre dos punts

Ampliem la gràfica de la funció anterior al voltant del punt A[a,f(a)]. Calculem la taxa de variació mitjana entre x= a i x = a+h.



Definim la taxa de variació mitjana com

$$TVM(A,B) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \left.\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right|_{x=a}$$

Fixeu-vos que com més petit sigui el valor d'h , més semblant serà la TVM(A,B) al pendent de la recta tangent a la funció en el punt A.

Definició de derivada d'una funció en un punt

La derivada d'una funció f(x) en un punt x=a és el límit quan h tendeix a zero de la TVM:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \left.\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right|_{x=a} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

És a dir:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

I evidentment f '(a) coincideix amb el valor del pendent de la recta tangent en el punt A[a,f(a)].

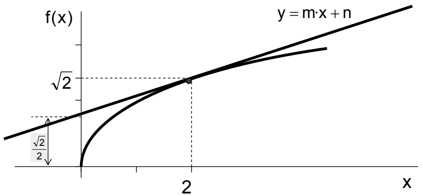
$$m = tg\alpha = f'(a)$$

Ara ja podem escriure l'equació de la recta tangent.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

EXEMPLE

Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)=\sqrt{x}$ en el punt A[2,f(2)].



$$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x)\Big|_{x=2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Bigg|_{x=2}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\Bigg|_{x=2}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\Bigg|_{x=2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\Bigg|_{x=2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\Bigg|_{x=2}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\Bigg|_{x=2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)\Rightarrow y=f'(2)\cdot(x-2)+f(2)\Rightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)+\sqrt{2}\Rightarrow$$

Taules de derivació de funcions simples

Cada cop que haguem de calcular la derivada d'una funció, hauríem de calcular el límit anterior. Ara, per estalviar temps, és millor aprendre la taula adjunta per així poder resoldre més ràpidament qualsevol problema de derivades.

$f(x)=cnt\Rightarrow f'(x)=0$
$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$
$f(x)=x^k\Rightarrow f'(x)=k\cdot x^{k-1}\ ;\ \forall k\in\Re$
$f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\operatorname{tg} x\Rightarrow f'(x)=1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
(*) $f(x)=\arcsin x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(*) $f(x)=\arccos x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(*) $f(x)=\operatorname{arctg} x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x)=a^x\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\ln a$
$f(x)=e^x\Rightarrow f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\log_b x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln b}$
$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Aquestes derivades són vàlides en tot el domini de les funcions indicades.

Exercici per nota

Trobeu la derivada de la funció f(x)=tg x a partir de la definició de derivada.

És a dir: $f(x)=\operatorname{tg} x\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}(x)}{h}=\ldots$

Regles de derivació

Com es calcula la derivada de $f(x)=\dfrac{3\cdot\sin x\cdot\sqrt{x^2-\operatorname{tg}x}}{1-\sqrt{x}\cdot e^x}+\ln x$?

Per calcular la derivada d'f(x) usarem les regles de derivació.

Derivada de la suma de dues funcions

Regla 1

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)\Rightarrow f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)$$

Demostració:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{[f_1(x+h)+f_2(x+h)]-[f_1(x)+f_2(x)]}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{[f_1(x+h)-f_1(x)]+[f_2(x+h)-f_2(x)]}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}=f_1'(x)+f_2'(x)$$

Exemple $f(x)=x^2+x\Rightarrow f'(x)=2x+1$

Derivada d'una funció per una cosntant

Regla 2

$$f(x)=k\cdot f_1(x)\Rightarrow f'(x)=k\cdot f_1'(x)$$

Demostració:

$$f(x)=k\cdot f_1(x)\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k\cdot f_1(x+h)-k\cdot f_1(x)}{h}$$
$$\lim_{h\to 0}k\cdot\left(\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}\right)=k\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}\right)=k\cdot f_1'(x)$$

Exemple $f(x)=3\cdot x^2\Rightarrow f(x)=3\cdot[x^2]\Rightarrow f'(x)=3\cdot[2x]=6x$

Derivada del producte de dues funcions

Regla 3

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\Rightarrow f'(x)=f_1'(x)\cdot f_2(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x)$$

Demostració:

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\Rightarrow f_1'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)\cdot f_2(x+h)-f_1(x)\cdot f_2(x)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)\cdot f_2(x+h)+f_1(x+h)\cdot f_2(x)-f_1(x+h)\cdot f_2(x)-f_1(x)\cdot f_2(x)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)\cdot[f_2(x+h)-\cdot f_2(x)]+[f_1(x+h)-f_1(x)]\cdot f_2(x)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)\cdot[f_2(x+h)-\cdot f_2(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{[f_1(x+h)-f_1(x)]\cdot f_2(x)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}f_1(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{[f_2(x+h)-\cdot f_2(x)]}{h}+f_2(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{[f_1(x+h)-f_1(x)]}{h}=f_1'(x)\cdot f_2(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x)$$

Exemple

$$f(x)=\sin x\cdot\cos x\Rightarrow f'(x)=[\sin x]'\cdot\cos x+\sin x\cdot[\cos x]'=\cos^2 x-\sin^2 x$$

Derivada de la inversa d'una funció

Regla 4

$$f(x)=\frac{1}{g(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demostració:

$$f(x)=\frac{1}{g(x)}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h\cdot[g(x+h)\cdot g(x)]}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{[g(x+h)\cdot g(x)]}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}=\frac{1}{[g(x)]^2}\cdot[-g'(x)]$$

Derivada de la divisió de funcions

Regla 5

$$f(x)=\frac{k(x)}{g(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{k'(x)\cdot g(x)-k(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Demostració:

$$f(x)=\frac{k(x)}{g(x)}\Rightarrow f(x)=k(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)\Rightarrow \text{(Per la regla 2)}\Rightarrow f'(x)=k'(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)+k(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)'\Rightarrow$$

$$\text{(Per la regla 3)}\Rightarrow f'(x)=k'(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)+k(x)\cdot\left(\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{k'(x)\cdot g(x)-k(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Derivada de la funció composta. (La regla de la cadena)

Regla 6

$$f(x)=k(g(x))\Rightarrow f'(x)=k'(g(x))\cdot g'(x)$$

Demostració:

$$f(x)=k(g(x))\Rightarrow f'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{d[k(g(x))]}{dx}=\frac{dk(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}=k'(g(x))\cdot g'(x)$$

Exemple $f(x)=\sin(\cos x)\Rightarrow f'(x)=\cos(\cos x)\cdot(-\sin x)=-\sin x\cdot\cos(\cos x)$

Exemple $f(x)=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Derivada de la funció inversa o recíproca

Regla 7

$$\left[f^{-1}\right]'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Demostració:

$$f(f^{-1}(x))=x\Rightarrow\frac{df(f^{-1}(x))}{dx}=\frac{dx}{dx}\Rightarrow\frac{df}{df^{-1}}\cdot\frac{df^{-1}}{dx}=1\Rightarrow\frac{df^{-1}}{dx}=\frac{1}{\frac{df}{df^{-1}}}\Rightarrow\left[f^{-1}\right]'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple

Demostrarem que la derivada de $f(x)=\arcsin x$ és $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f^{-1}(x)=\arcsin x\Rightarrow\left[f^{-1}\right]'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\cos(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x$

$y=\arcsin x$

$x=\sin y$

Exercici per nota

Trobeu la derivada de la funció f(x)=arctg x a partir de la regla 7.