ELS NOMBRES COMPLEXOS

El conjunt **C**

La necessitat dels nombres complexos

Resoleu l'equació: $x^2 + x + 1 = 0$

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

En el conjunt dels nombres reals aquesta equació no té solució. D'aquí surgeix la necessitat del conjunt dels nombres complexos. Veiem ara que l'equació té dues solucions.

En conclusió: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

La unitat imaginària *i*

Per resoldre l'equació anterior, cal definir la unitat imaginària *i*.

Per definició diem que : $\sqrt{-1} \equiv i$

Aleshores :

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \\ x_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \end{aligned}}$$

Que són les dues solucions de l'equació inicial.

Forma binòmica dels nombres complexos

Forma binòmica. Anomenem nombre complex en forma binòmica a l'expressió: $z = a + bi$

El nombre **a** s'anomena part real.

Si $b = 0 \Rightarrow z = a + 0i \Rightarrow z = a \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$
Concretament diem que **z = a** és un nombre real pur

El nombre **b** s'anomena part imaginària.

Si $a = 0 \Rightarrow z = 0 + bi \Rightarrow z = bi \in C$.

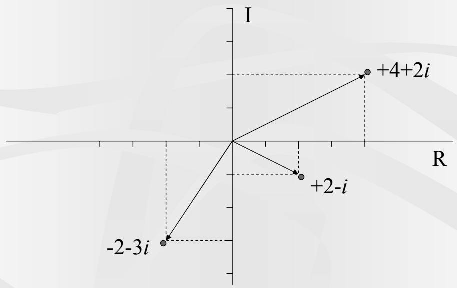
Concretament diem que **z = bi** és un nombre imaginari pur

Complex conjugat. Diem que dos nombres complexos són conjugats si tenen parts reals iguals i parts imaginàries contràries.

El complex conjugat de $z = a + bi$ s'escriu: $\bar{z} = a - bi$

Representació gràfica dels nombres complexos

Els nombres complexos es representen com vectors en el pla R, I.
A la figura es mostren tres exemples.



Conseqüència

Els mòduls d'un nombre complex i del seu conjugat són iguals

$$\left.\begin{array}{l} z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \bar{z} = a - bi \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{|z| = |\bar{z}|}$$

Definicions prèvies

Mòdul d'un nombre complex. Anomenem mòdul d'un nombre complex |**z**| al valor determinat per:

$$z = a + b \cdot i$$
$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

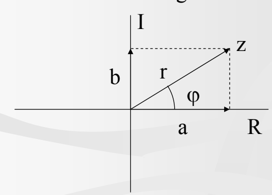
Argument d'un nombre complex. Anomenem argument d'un nombre complex **φ** al valor determinat per:

$$z = a + b \cdot i$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Cal tenir present que **φ** és l'angle que forma el vector que uneix O amb el punt z, amb l'eix **R**. Sempre s'ha de complir $\mathbf{0 \le \varphi \le 2\pi}$, segons el quadrant on estigui situat z.

Forma trigonomètrica i polar d'un nombre complex

Fixeu-vos en la figura:



Tenint en compte que z = a + b·*i*

$$b = r \cdot \sin\varphi$$
$$a = r \cdot \cos\varphi$$

$$z = a + b \cdot i = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi$$

Forma trigonomètrica → $\boxed{z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)}$

Forma polar → $\boxed{z = r_{\varphi}}$

Complex conjugat. El complex conjugat en forma trigonomètrica s'escriu $\boxed{\bar{z} = r(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)}$ i en forma polar s'escriu $\boxed{\bar{z} = r_{(-\alpha)}}$

Operacions amb nombres complexos en forma binòmica

Suma i resta.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + i\cdot(b \pm d)$$

Producte.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z_1 \cdot z_2 = (a + ib)\cdot(c + id) = ac - bd + i\cdot(ad + bc)}$$

Conseqüència

El quadrat del mòdul d'un nombre complex és el producte d'un complex pel conjugat

$$\left.\begin{array}{l} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z\cdot\bar{z} = (a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2}$$

Operacions amb nombres complexos en forma polar

Producte.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + bi = r(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha) = r_\alpha \\ z_2 = c + di = r'(\cos\beta + i\cdot\sin\beta) = r'_\beta \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_\alpha\cdot r'_\beta = [r(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)][r'(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)] = \\ &= r\cdot r'\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) + i\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha) = \\ &= r\cdot r'\cdot(\cos(\alpha+\beta) + i\cdot\sin(\alpha+\beta)) = (r\cdot r')_{(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1\cdot z_2 = r_\alpha\cdot r'_\beta = (r\cdot r')_{(\alpha+\beta)}}$$

Quocient.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id}\cdot\frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\cdot\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}}$$

Potència:

$$z = a + bi \Rightarrow \boxed{z^n = (a + bi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot a^{(n-k)}\cdot(b\cdot i)^k}$$

Binomi de Newton

Quocient.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \frac{r_\alpha}{r'_\beta}\cdot\frac{r'_{-\beta}}{r'_{-\beta}} = \frac{r_\alpha\cdot r'_{-\beta}}{(r')^2} = \frac{(r\cdot r')_{(\alpha-\beta)}}{(r')^2} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{(\alpha-\beta)}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{(\alpha-\beta)}}$$

Potència.

$$z = r_\alpha \Rightarrow z^n = (r_\alpha)^n = r_\alpha\cdot r_\alpha\cdot\overset{n)}{\ldots}\cdot r_\alpha = (r^n)_{\alpha+\alpha+\overset{n)}{\ldots}+\alpha} = (r^n)_{n\alpha}$$

$$\boxed{z^n = (r^n)_{n\alpha}}$$

Radicació

$$z^n = (r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha} = R_{\beta+2k\pi} \Rightarrow \begin{cases} R = r^n \Rightarrow \sqrt[n]{R} = r \\ n\alpha = \beta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}; \forall k < n; k \in N \end{cases}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{r_\beta} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}}$$

Conclusió: Tot nombre complex, té n arrels d'índex n

EXEMPLE

Sigui Z = 2-7i i S = -3+4i. Calcula:

1. Z + S
2. $\overline{Z}$
3. |Z|, |S|, i els seus arguments.
4. Z·S
5. Z^5
6. Z / S
7. S^{-2}
8. $(S)^{-1/5}$