Tema 12.
Les còniques obertes

-La paràbola

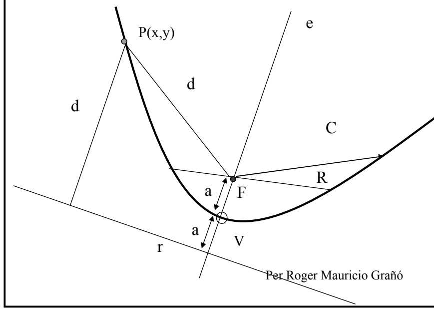
-La hipèrbola

La paràbola

Estudi sintètic de la paràbola

Definició:

La paràbola és el lloc geomètric donat pels punts del pla que equidisten d'una recta fixa anomenada *directriu* i d'un punt fix anomenat *focus*.

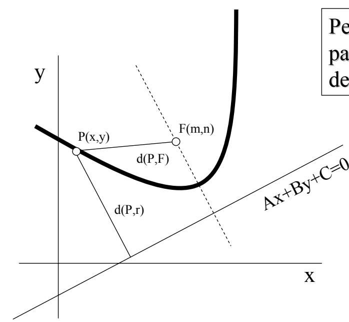


$$d(P, r) = P(P, F)$$

Elements de la paràbola.

- Focus F
- Vèrtex V
- Directriu r
- Paràmetre a
- L'eix de simetria e
- Radi vector R
- Corda focal C

Estudi analític de la paràbola



Per fer l'estudi analític de la paràbola partirem de la definició.

$$d(P, r) = P(P, F) \Rightarrow \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{(x - m)^2 + (y - n)^2} \Rightarrow \text{Ara elevem al quadrat.}$$

$$\frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2} = (x-m)^2 + (y-n)^2 \Rightarrow$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 + 2ABxy + 2ACx + 2BCy + C^2 = (A^2+B^2)\left((x-m)^2+(y-n)^2\right) \Rightarrow$$

$$\cancel{A^2x^2} + \cancel{B^2y^2} + 2ABxy + 2ACx + 2BCy + C^2 =$$
$$\cancel{A^2x^2} + \cancel{B^2y^2} + A^2m^2 - 2A^2mx + A^2y^2 + A^2n^2 - 2A^2ny + B^2x^2 - 2B^2mx + B^2n^2 - 2B^2ny$$

$$0 = A^2m^2 - 2A^2mx + A^2y^2 + A^2n^2 - 2A^2ny + B^2x^2 - 2B^2mx + B^2n^2 - 2B^2ny$$
$$-2ABxy - 2ACx - 2BCy - C^2$$

Reordenant:

$$0 = B^2x^2 + A^2y^2 - 2ABxy + \left(-2A^2m - 2B^2m - 2AC\right)x + \left(-2A^2n - 2BC - 2B^2n\right)y +$$
$$\left(A^2m^2 + A^2n^2 + B^2n^2 - C^2\right)$$

$$\boxed{B^2x^2 + A^2y^2 + Lxy + Qx + Ry + S = 0}$$

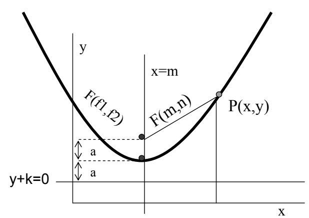
Equació reduïda de la paràbola amb eix de simetria vertical.

Partirem de la paràbola que té com a eix de simetria l'eix $x = x_0$ i com a directriu $y = k$.

$$\text{Recta directriu}: 0x + y + k = 0 \Rightarrow A = 0; B = 1; C = +k$$

$$\text{Focus}: \ F(m,n)$$

$$x^2 - 2mx + (-2k - 2m)y + n^2 - k^2 = 0 \Rightarrow x^2 + Qx + Ry + S = 0$$



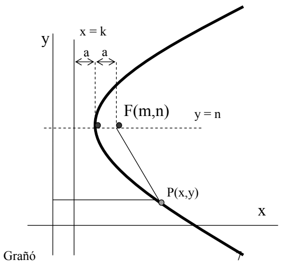
Equació reduïda de la paràbola amb eix de simetria horitzontal.

Partirem de la paràbola que té com a eix de simetria l'eix $y = y_0$ i com a directriu $x = k$.

$$\text{Recta directriu}: x + k = 0 \Rightarrow A = 1; B = 0; C = +k$$

$$\text{Focus}: \ F(m,n)$$

$$y^2 - 2ny + (-2k - 2m)x + n^2 + m^2 - k^2 = 0 \Rightarrow y^2 + Q'y + R'x + S' = 0$$



Exemple:

Trobeu l'equació de la paràbola que té com a focus el punt F(2,1) i com a directriu la recta -5x + 2y +1 = 0

Apliquem la definició de paràbola

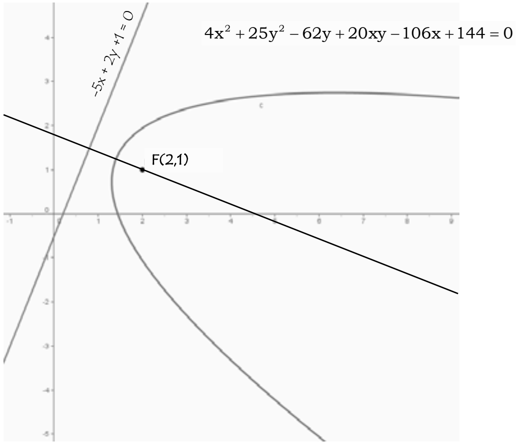
$$d(F,P) = d(P,r) \Rightarrow \frac{|-5x+2y+1|}{\sqrt{29}} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2};$$

$$\frac{25x^2 + 4y^2 + 1 + 4y - 10x - 20xy}{29} = (x-2)^2 + (y-1)^2;$$

$$\frac{25x^2 + 4y^2 + 1 + 4y - 10x - 20xy}{29} = x^2 + 4 - 4x + y^2 - 2y + 1;$$

$$25x^2 + 4y^2 + 1 + 4y - 10x - 20xy = 29x^2 + 116 - 116x + 29y^2 - 58y + 29$$

$$\boxed{0 = 4x^2 + 25y^2 - 62y + 20xy - 106x + 144}$$

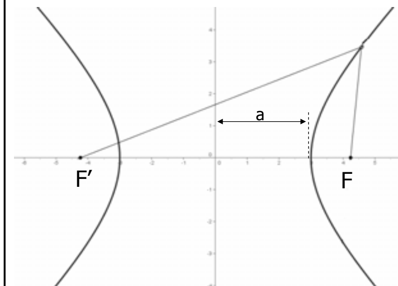


La hipèrbola

Estudi sintètic de la hipèrbola

Definició:

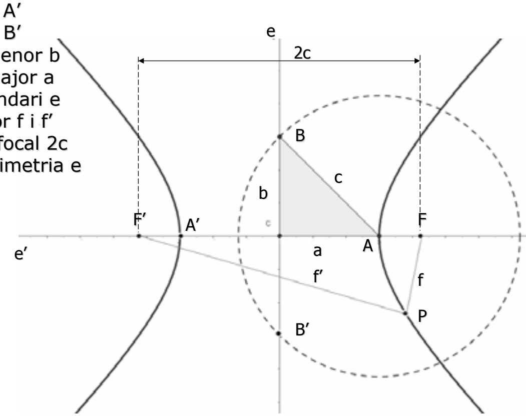
La hipèrbola és el lloc geomètric donat pels punts del pla tals que la diferència de distàncies a dos punts fixs del pla, anomenats focus, es manté constant.



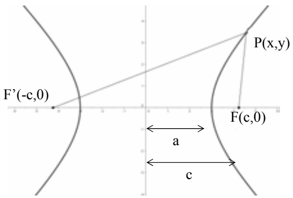
$$d(C,F') - d(F,C) = 2a$$

Elements de la hipèrbola

-Focus F i F′
- Vèrtex A i A′
- Vèrtex B i B′
- semieix menor b
- semieix major a
- L′eix secundari e
- Radi vector f i f′
- Distància focal 2c
- Eixos de simetria e i e′



Equació reduïda de la hipèrbola



Quan la hipèrbola està centrada a l'origen de coordenades obtenir l'equació de la hipèrbola és més simple.

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\cancel{x^2} + c^2 + 2cx + \cancel{y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} + c^2 - 2cx + \cancel{y^2} + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

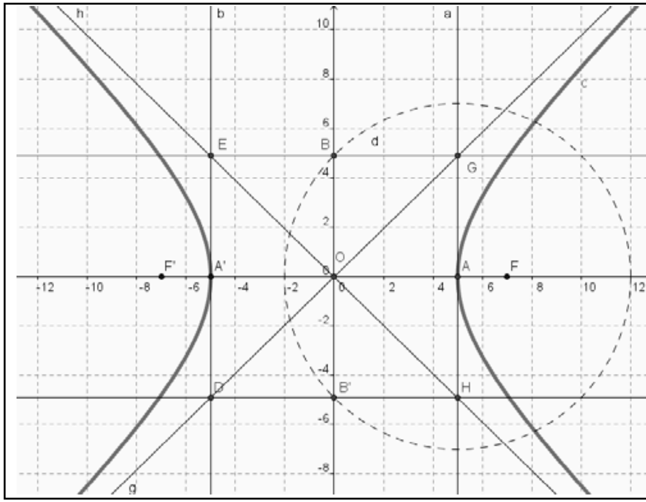
$$-4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \Rightarrow a^2 \cdot \left((x-c)^2 + y^2\right) = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$a^2 \cdot \left(x^2 + c^2 - 2cx + y^2\right) = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1}$$

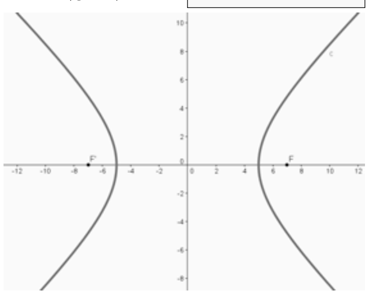


Exemple:

Trobeu l'equació de la hipèrbola que té com a focus els punts F(-7,0) i F'(7,0) amb a = 5.

Deduïm que c = 7.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1 \Rightarrow \boxed{24x^2 - 25y^2 = 600}$$



Elements de la hipèrbola

Relació mètrica fonamental: $c^2 = a^2 + b^2$

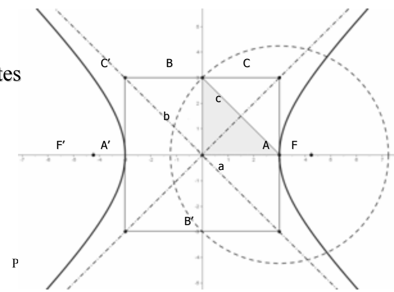
Exentricitat: $e = \dfrac{c}{a}$

Assimptotes: Són les rectes que passen pel centre de la hipèrbola i pels punts C i C'. La hipèrbola s'aproxima a elles a l'infinit.

Quan la hipèrbola està centrada a l'origen de coordenades, les assimptotes es calculen per:

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$



Exemple:

Trobeu l'equació de la hipèrbola que té com a focus el punt F(2,1) i F'(4,5) amb a = 1

En no estar centrada cal aplicar la definició d'hipèrbola

$$|d(P,F)-d(P,F')| = 2a$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} = 2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = \left(2+\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}\right)^2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = 4+(x-4)^2+(y-5)^2+4\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$$

$$x^2+4-4x+y^2+1-2y = 4+x^2+16-8x+y^2+25-10y+4\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$$

$$-40+4x+8y = 4\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} \Rightarrow -10+x+2y = \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$$

$$100+x^2+4y^2-20x-40y+4xy = x^2+16-8x+y^2+25-10y$$

$$59+3y^2-12x-30y+4xy = 0$$

$$3y^2-12x-30y+4xy+59 = 0$$