

TEMA 6.

EQUACIONS I INEQUACIONS

6.1. Igualtat i equació.

- Igualtat : Són totes les expressions matemàtiques on apareix un $=$.
- Identitat : Igualtat matemàtica que és certa o falsa per a qualsevol valor de les seves variables.

$2x - 3 = 3x - 3 - x$	Identitat certa per a tot $x \in \mathbf{R}$.
$2 = 3$	Identitat falsa.

- Equació : Igualtats que estan formades per incògnites i nombres reals i que en alguns casos representen una identitat certa o una identitat falsa. Els valors de les incògnites que fan la identitat certa s'anomenen arrels o solucions de l'equació.

$2x - 3 = 3x - 3$	Identitat certa per a x igual a zero. ($x = 0$)
$2xy = 3 \cdot (x + y)$	Identitat certa pels valors $x = \frac{3y}{2y+3}$ amb $y \in \mathbf{R}$

Diem que dues equacions són equivalents si i només si tenen les mateixes solucions.

$2x - 3 = 0$	Equacions equivalents ja que tenen la mateixa solució. $x = \frac{3}{2}$
$8x - 9 = 2x$	

6.2. Propietats de les igualtats.

1. Si sumem o restem el mateix valor a cada costat de l'igual d'una identitat certa, la nova identitat és certa.

$$A = B \Rightarrow A \pm C = B \pm C$$

2. Si multipliquem o dividim pel mateix valor a cada costat de l'igual d'una identitat certa, la nova identitat és certa.

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} A \cdot C = B \cdot C \\ \frac{A}{C} = \frac{B}{C} ; \forall C \neq 0 \end{cases}$$

D'aquí deduïm que :

1. $A + C = B \Rightarrow A = B - C$
2. $A \cdot C = B \Rightarrow A = \frac{B}{C} ; \forall C \neq 0$

6.3. Tipus d'equacions.

Podem classificar les equacions segons:

1. El nombre d'incògnites.
2. El terme on la x està elevada a la major potència (només en les equacions polinòmiques)
3. El nombre de solucions.
 - Diem que l'equació és compatible si té una o més d'una solució.
 - Diem que l'equació és incompatible si no té solució.
4. On està situada la incògnita.
 - Logarítmiques.
 - Exponencials.
 - Polinòmiques.
 - Radicals
 - Trigonomètriques
5. Segons el conjunt al que pertany la solució de l'equació
 - Enteres.
 - Fraccionàries
 - Irracionals
 - Reals.

6.4. Resolució d'equacions.

Quan hem de resoldre una equació haurem de seguir els següents passos.

1. Eliminar denominadors.
2. Operar els parèntesis.
3. Agrupar termes iguals
4. Simplificar.
5. Aïllar la incògnita.
6. Comprovar la solució.

• Mètode de factorització.

- Si el producte de dos nombres ha de ser zero, aleshores un dels nombres ha de ser zero.

$$A \cdot B = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Podem aplicar aquest mètode en:

1. Equacions amb polinòmiques que es poden factoritzar.
$$2x^3 - 10x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(2x^2 - 1) = 0$$
2. Equacions amb funcions trigonomètriques.
$$\cos(x) \cdot \sin(x)$$
3. Equacions amb radicals.

$$(x+1)\sqrt{x-1} = 0$$

6.5. Equacions de segon grau.

Hi ha dos tipus d'equacions de segon grau, les equacions incompletes i l'equació completa.

Equacions de segon grau incompletes.

Són les que presenten la forma:

$$1. \quad ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2. \quad ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

$$3. \quad ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}; \text{ Si } c < 0$$

amb $a \neq 0$.

Equació de completa segon grau.

Són les que tenen la forma $ax^2 + bx + c = 0$. La incògnita es troba aplicant la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostració.

Per resoldre aquesta equació, aplicarem les propietats del punt 4.2. per obtenir una equació de segon grau incompleta.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow 4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 0 \Rightarrow 4a \cdot (ax^2 + bx + c) + b^2 = b^2 \Rightarrow$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2 \Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Ara factoritzant ens quedarà:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow \begin{cases} (2ax + b) = +\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow 2ax = -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ (2ax + b) = -\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow 2ax = -b - \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

6.6. Nombre de solucions d'una equació de segon grau.

Equacions incompletes.

Les equacions incompletes de la forma $ax^2 = 0$ tenen una única solució $x = 0$

Les equacions incompletes de la forma $ax^2 + bx = 0$ tenen sempre dues solucions $x=0$ i $x = -b/a$.

Les equacions incompletes de la forma $ax^2+c=0$ tenen dues solucions ($x=+(-c/a)^{1/2}$ i $x=-(-c/a)^{1/2}$) sempre que $c<0$ i cap solució si $c > 0$.

Equacions completes

Les equacions completes tenen dues solucions quan $b^2 - 4ac > 0$.

Les equacions completes tenen una solució única quan $b^2 - 4ac = 0$.

Les equacions completes no tenen solucions quan $b^2 - 4ac < 0$.

6.7. Equacions amb radicals.

Les equacions radicals són equacions en que apareix la incògnita sot el signe de l'arrel.

Resolució.

Per resoldre aplicarem els següents passos:

1. S'aïlla un radical en un dels membres de la igualtat i es passa la resta de termes, radicals i no radicals, a l'altra membre.
2. S'eleva els dos membres a la potència de l'índex del radical.
3. Si encara hi ha algun radical, es repeteixen els passos 1 i 2.
4. Es resol l'equació sense radicals.
5. Es comproven les solucions obtingudes en l'equació inicial.

EXEMPLES

- Resoleu l'equació $\sqrt[3]{x} - x = 0$.

$$\sqrt[3]{x} - x = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = x \Rightarrow x = x^3 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Ara comprovem les solucions.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{0} - 0 = 0 \\ \sqrt[3]{1} - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 1 = 0 \\ \sqrt[3]{-1} - (-1) = 0 \Rightarrow -1 + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Els tres valors són solucions vàlides.}$$

- Resoleu l'equació $x - \sqrt{x} = 2$.

$$x - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow (x - 2)^2 = x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 16}}{2} = \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ara comprovem la solució.

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 \Rightarrow 4 - \sqrt{4} = 2 \\ x = 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1} \neq 2 \end{array} \right\} \text{Veiem que } x = 4 \text{ és solució i } x = 1 \text{ no}$$

6.8. Inequacions

Una inequació té la mateixa expressió que una equació, però enlloc de trobar el símbol igual (=) entre els dos membres de l'equació, trobarem un dels símbols de desigualtat {<, >, ≥, ≤}.

Hem de tenir present que per resoldre una inequació podem aplicar les relacions d'ordre per a la suma i el producte vistes en el tema 2.

Problemes.

EXAMPLE

Resoleu la inequació següent : $\frac{x+1}{2} + \frac{x}{5} \leq 2x - \frac{2x+3}{7}$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2} + \frac{x}{5} \leq 2x - \frac{2x+3}{7} &\Rightarrow \frac{35x+35}{70} + \frac{14x}{70} \leq \frac{140x}{70} - \frac{20x+30}{70} \Rightarrow 35x+35+14x \leq 140x-20x-30 \\ -71x &\leq -65 \Rightarrow -1 \times (-71x \leq -65) \Rightarrow 71x \geq 65 \Rightarrow x \geq \frac{65}{71} \end{aligned}$$