

TEMA 4

Polinomis

Un polinomi és una funció real de variable real on a un valor x se li assigna un valor $p(x)$. La funció $p(x)$ s'anomena polinomi de grau n si s'expressa de la següent forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

on n , a_i , $a_i x^i$, a_0 i x són:

- n : indica el grau del polinomi $p(x)$ (grau $(p(x))$). És un nombre natural ($n \in \mathbf{N}$).
- a_i són els coeficients reals ($a_i \in \mathbf{R}$, $i=1, \dots, n$) del polinomi del polinomi $p(x)^1$.
- $a_i x^i$ és el monomi de grau i del polinomi $p(x)$.
- a_0 : terme independent del polinomi $p(x)$. És el coeficient del monomi de grau zero.
- x : indeterminada o variable x del polinomi $p(x)$.

Alguns polinomis s'anomenen de forma diferent en funció del nombre de monomis que els formen. Llavors parlem de *monomis*, *binomis* o *trinomis*. Si tenen més de tres monomis s'anomenen *polinomis* de forma general.

4.1. Principi d'igualtat.

Siguin els polinomis $p(x)$ i $q(x)$.

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_n \cdot x^n + \dots + b_m \cdot x^m$$

Diem que els dos polinomis són iguals si i només si tenen el mateix grau ($\text{grau}(p(x)) = \text{grau}(q(x))$) i si tots els coeficients d'igual grau de cada polinomi són coincidents dos a dos.

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow m = n \text{ i } a_j = b_j, j = 0, 1, 2 \dots n$$

4.2. Valor numèric d'un polinomi.

Sigui el polinomi $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$. Si substituïm la variable x per un valor $a \in \mathbf{R}$, diem que $p(a)$ és el valor numèric del polinomi per a $x = a$ i val:

$$p(a) = a_0 + a_1 \cdot a + a_2 \cdot a^2 + \dots + a_n \cdot a^n$$

4.3. Suma de polinomis.

Siguin dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$ amb grau $(p(x)) < \text{grau}(q(x))$

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \\ q(x) &= b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_m \cdot x^m \end{aligned} \right\} n, m \in \mathbf{N} \text{ i } n < m$$

Aleshores definim la suma de polinomis $(p(x) + q(x))$ com:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot x + (a_2 + b_2) \cdot x^2 + \dots + (a_n + b_n) \cdot x^n + \dots + (0 + b_m) \cdot x^m$$

De la suma deduïm que: $\text{grau}(p(x) + q(x)) \leq \max(\text{grau}(p(x)), \text{grau}(q(x)))$.

¹ Si els coeficients $a_i \in \mathbf{R}$ diem que $p(x) \in \mathbf{R}[x]$, és a dir que el polinomi té coeficients reals.

• **Propietats de la suma de polinomis.**

1. Propietat associativa.
 $(p(x) + q(x)) + r(x) = p(x) + (q(x) + r(x))$
2. Propietat commutativa.
 $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$
3. Existència del polinomi neutre respecte de la suma.
 $p(x) + n(x) = p(x) \Rightarrow n(x) = 0$
4. Existència de l'element simètric respecte de la suma.
 $p(x) + p^*(x) = 0 \Rightarrow p^*(x) = -p(x)$

4.4. Producte de polinomis.

▪ *Producte de dos monomis.*

Siguin dos monomis $a_i \cdot x^i$ i $b_j \cdot x^j$ qualssevol. Definim producte dels monomis com:

$$(a_i \cdot x^i)(b_j \cdot x^j) = a_i \cdot b_j \cdot x^{i+j}$$

▪ *Producte de polinomis*

Siguin dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$ qualssevol:

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \\ q(x) &= b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_m \cdot x^m \end{aligned} \right\} \text{ amb } n, m \in \mathbb{R}.$$

Aleshores definim el producte de polinomis $(p(x) \cdot q(x))$ com la suma de tot els productes de monomis dos a dos.

$\begin{array}{c} q(x) \\ \backslash \\ p(x) \end{array}$	b_0	$b_1 \cdot x$	$b_2 \cdot x^2$	...	$b_m \cdot x^m$
a_0	$a_0 \cdot b_0$	$a_0 \cdot b_1 \cdot x$	$a_0 \cdot b_2 \cdot x^2$	...	$a_0 \cdot b_m \cdot x^m$
$a_1 \cdot x$	$a_1 \cdot b_0 \cdot x$	$a_1 \cdot b_1 \cdot x^2$	$a_1 \cdot b_2 \cdot x^3$	...	$a_1 \cdot b_m \cdot x^{m+1}$
$a_2 \cdot x^2$	$a_2 \cdot b_0 \cdot x^2$	$a_2 \cdot b_1 \cdot x^3$	$a_2 \cdot b_2 \cdot x^4$	...	$a_2 \cdot b_m \cdot x^{m+2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$a_n \cdot x^n$	$a_n \cdot b_0 \cdot x^n$	$a_n \cdot b_1 \cdot x^{n+1}$	$a_n \cdot b_2 \cdot x^{n+2}$	...	$a_n \cdot b_m \cdot x^{m+n}$

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_i \cdot b_j \cdot x^{i+j} \right)$$

Del producte de polinomis veiem que es compleix que grau $(p(x) \cdot q(x)) = \text{grau}(p(x)) + \text{grau}(q(x))$.

▪ *Propietats del producte de polinomis.*

1. Propietat associativa.
 $(p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x) = p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x))$
2. Propietat commutativa.
 $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$
3. Propietat distributiva respecte de la suma de polinomis.

$$(p(x) + q(x)) \cdot r(x) = p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot r(x)$$

4. Existència del polinomi neutre respecte del producte.

$$p(x) \cdot n(x) = p(x) \Leftrightarrow n(x) = 1$$

5. No hi ha element simètric respecte del producte.

EXEMPLE

Siguin els polinomis $p(x)$ i $q(x)$.

$$p(x) = 3 \cdot x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$q(x) = 4 \cdot x^4 - x^2 + 4x + 2$$

- Calculeu-ne la suma i el producte, és a dir $p(x) + q(x)$ i $p(x) \cdot q(x)$.

$$p(x) + q(x) = 4 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1$$

$p(x) \backslash q(x)$	2	$4 \cdot x$	$-x^2$	$0 \cdot x^3$	$4 \cdot x^4$
-1	-2	$-4 \cdot x$	x^2	0	$-4 \cdot x^4$
x	$2 \cdot x$	$4 \cdot x^2$	$-x^3$	0	$4 \cdot x^5$
$-2 \cdot x^2$	$-4 \cdot x^2$	$-8 \cdot x^3$	$2 \cdot x^4$	0	$-8 \cdot x^6$
$3 \cdot x^3$	$6 \cdot x^3$	$12 \cdot x^4$	$-3 \cdot x^5$	0	$12 \cdot x^7$

$$p(x) \cdot q(x) = 12 \cdot x^7 - 8 \cdot x^6 + x^5 + 10 \cdot x^4 - 3 \cdot x^3 + x^2 - 2 \cdot x - 2$$

- Calculeu el polinomi simètric de $p(x)$

$$p^*(x) = -p(x) = -3 \cdot x^3 + 2x^2 - x + 1$$

4.5. Potència d'un polinomi.

Sigui $p(x)$ un polinomi de grau n . Sigui $m \in \mathbb{N}$. La potència m -èsima de $p(x)$ (escriurem $[p(x)]^m$) com:

$$[p(x)]^m = p(x) \cdot \dots^m \cdot p(x)$$

El resultat que s'obté és un polinomi de grau $m \cdot n$. (grau $[p(x)]^m = m \cdot n$)

- Binomi de Newton.

Sigui $p(x)$ un binomi de la forma $p(x) = x + a$. Sigui $m \in \mathbb{N}$. Aleshores la potència m -èsima de $p(x)$ s'expressa com:

$$[p(x)]^m = (x + a)^m = A_0 \cdot x^m + A_1 \cdot a \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot a^2 \cdot x^{m-2} + \dots + A_{m-2} \cdot a^{m-2} \cdot x^2 + A_{m-1} \cdot a^{m-1} \cdot x + A_m \cdot a^m$$

on A_i és el coeficient del monomi de grau i del polinomi $[p(x)]^m = (x + a)^m$ i venen donats per:

$$A_i = \binom{m}{i} = \frac{m!}{(m-i)! \cdot i!}$$

Igualant terme a terme² ens queda:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ a + d = 1 \\ b + e = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -2 \\ e = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} c(x) = 3 \cdot x \\ r(x) = -2 \cdot x + 1 \end{cases}}$$

També podem trobar el *polinomi quocient* i el *polinomi resta* de la divisió, a partir de l'algoritme de la divisió, que és un mètode molt més senzill.

$$\begin{array}{r} p(x) \\ r(x) \end{array} \bigg/ \begin{array}{l} q(x) \\ c(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot x^3 \quad + x + 1 \quad \bigg| \quad x^2 + 1 \\ -3x^3 \quad -3x \quad \hline -2x \quad +1 \end{array}$$

- Si $r(x)$ és nul, direm que la divisió entre $p(x)$ i $q(x)$ és exacte i aleshores escriurem $p(x) = c(x) \cdot q(x)$. En aquest cas direm que $p(x)$ és múltiple de $q(x)$ i ho escriurem com $p(x) = q(x) \cdot c(x)$, o direm que $q(x)$ és divisor de $p(x)$ i ho expressem com $q(x) \mid p(x)$.

4.7. Divisió per Ruffini.

La divisió per Ruffini permet dividir de forma senzilla dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$ sempre i quan el divisor $q(x)$ sigui de la forma $x - a$. El mètode permet obtenir el quocient i la resta de la divisió.

Lema: La resta de la divisió per Ruffini sempre és un polinomi de grau zero és a dir $r(x) = r$.

Demostració.

La demostració és immediata perquè en dividir $p(x)$ entre $x - a$, el grau de la resta $\text{grau}(r(x))$, serà sempre menor al grau de $x - a$ ($\text{grau}(r(x)) < \text{grau}(x - a)$), i per tant $\text{grau}(r(x)) = 0 < 1$.

² És a dir aplicant el principi d'igualtat entre polinomis.

EXEMPLE

Dividiu per Ruffini els següents polinomis:

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = 3x^4 + 2x - 6 \\ q(x) = x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow p(x) = c(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ -(+1) & & -3 & +3 & -3 & +1 \\ \hline & 3 & -3 & +3 & -1 & -5 \end{array}$$

$r(x) = -5$

$\downarrow$

$$3x^4 + 2x - 6 = (3x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \cdot (x + 1) + (-5)$$

$$c(x) = 3x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

4.8. Teorema del residu.

Sigui un polinomi $p(x)$ de grau $n \geq 1$ i sigui $q(x)$ un polinomi de grau 1 de la forma $x - a$. La resta de la divisió de $p(x)$ entre $q(x)$ coincideix amb el valor de $p(x)$ per $x = a$, és a dir $p(a) = r$.

Demostració.

Partim de $p(x) = c(x) \cdot (x - a) + r$. Si calculeu ara el valor de $p(x)$ per $x = a$, ens quedarà $p(a) = c(a) \cdot (a - a) + r \Rightarrow p(a) = r$

4.9. Arrels d'un polinomi.

Sigui un polinomi $p(x)$ de grau n (amb $n \geq 1$). Diem que $x = \alpha$ és una arrel real de $p(x)$ si i només si $p(\alpha) = 0$.

Per determinar les arrels d'un polinomi podem aplicar diferents mètodes en el següent ordre i sempre provant de l'1 al 3.

1. Resoldre l'equació polinòmica resultant.
2. En cas que l'equació polinòmica sigui irresoluble, podem intentar trobar possibles arrels enteres del polinomi fent de la divisió per Ruffini. Un cop en localitzem una, trobarem les altres arrels aplicant la divisió per Ruffini sobre el quocient de la divisió, sempre i quan no haguem obtingut prèviament una equació resoluble.
3. En cas que l'equació polinòmica sigui irresoluble, i el polinomi tingui només arrels racionals o irracionals, les buscarem gràficament.

EXEMPLE

Trobeu les arrels enteres del polinomi $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

1. $p(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ equació irresoluble.

2. Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & +2 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & -1 & +2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & [0] \end{array} \Rightarrow x = -1$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \text{equació resoluble} \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Teorema: Un polinomi $p(x)$ de grau n sempre té com a màxim n arrels reals.

Teorema: Sigui un polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ amb coeficients enters. Si existeix una arrel α de $p(x)$ i que més és entera, aleshores el terme independent del polinomi $p(x)$ serà sempre un múltiple de α .

Demostració.

Sigui $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ i $p(\alpha) = 0$. Tenim:

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n = 0 \Rightarrow a_0 = -(a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n) \Rightarrow$$

$$a_0 = -(a_1 + a_2\alpha + \dots + a_n\alpha^{n-1}) \cdot \alpha \Rightarrow a_0 = \alpha \cdot \text{[alguna suma]}.$$

Aquest teorema és de molta utilitat a l'hora de trobar les arrels enteres pel mètode de Ruffini perquè només haurem de provar aquells valors que divideixin de forma exacte el terme independent.

EXEMPLE

Trobeu les arrels enteres del polinomi $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 3$.

En ser els coeficients del polinomi $p(x)$ nombres enters podem aplicar el teorema anterior. El teorema ens assegura que només haurem de buscar per Ruffini les arrels enteres 1, -1, 3, i -3 ja que són els únics valors que divideixen de forma exacte el terme independent.

Provem doncs:



2	-3	2	3		2	-3	2	3
-3	-6	27	-87		+3	6	9	33
2	-9	29	-84		2	3	11	36

	2	-3	2	3		2	-3	2	3
+1		2	-1	1					
	2	-1	1	4		-1	-2	5	-7
						2	-5	7	-4

En ser les totes les restes diferents de zero, arribem a la conclusió que aquest polinomi NO té arrels enteres.

4.10. Factorització de polinomis.

Teorema. Sigui un polinomi $p(x)$ de grau n i siguin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (amb $k \leq n$) k arrels reals diferents dos a dos, de $p(x)$. Aleshores podem expressar el polinomi $p(x)$ com:

$$p(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k) \cdot q(x)$$

on $q(x)$ és un polinomi de grau $n-k$ que no es pot factoritzar, és a dir que no té arrels reals. Si $k = n$, el polinomi $q(x)$ és de grau zero.

Demostració:

Suposem que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ són les arrels d'un polinomi $p(x)$ de grau n . En aquest cas $p(x)$ és divisible de forma exacte per $x - \alpha_1$:

$$p(x) = c_1(x) \cdot (x - \alpha_1) \Rightarrow p(\alpha_1) = c_1(\alpha_1) \cdot (\alpha_1 - \alpha_1) = 0$$

en ser α_2 la segona arrel de $p(x)$ tenim que $p(\alpha_2) = 0$. Per tant substituint en la relació anterior ens queda:

$$p(\alpha_2) = c_1(\alpha_2) \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0 \\ c_1(\alpha_2) = 0 \end{cases}$$

Veiem que α_2 és una arrel del quocient de la segona divisió. Per tant podem expressar $c_1(x)$ com :

$$c_1(x) = c_2(x) \cdot (x - \alpha_2)$$

i per tant $p(x)$ es pot escriure com:

$$p(x) = c_1(x) \cdot (x - \alpha_1) = c_2(x) \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$$

Si anem aplicant de forma reiterada el raonament anterior arribarem a la conclusió que :

$$p(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k) \cdot q(x)$$

i en no haver més arrels de $p(x)$, $q(x)$ no s'anul·larà per a cap valor real.

EXEMPLE

Factoritzeu el polinomi $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Les arrels de $p(x)$ són $+1, -1, +2$ i -2 i són simples. Aleshores ens quedarà:

$$p(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x - (+1))(x - (-1))(x - (+2))(x - (-2))1 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot 1$$

EXEMPLE

Factoritzeu el polinomi $p(x) = x^4 + 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x - 1$.

Quan les arrels són múltiples diem que el polinomi presenta una factorització amb multiplicitat. Per exemple:

$$p(x) = x^4 + 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x - 1 = (x + 1)^3 \cdot (x - 1).$$

- Polinomi irreductible.

Un polinomi $q(x)$ de grau n (amb $n \geq 1$) diem que és irreductible en $\mathbf{R}[x]$ si només és divisible de forma exacte per ell mateix o per qualsevol polinomi de grau zero.

Per exemple $x^2 + 1$, $x^4 + x^2 + 1$, $x^6 + x^4 + x + 1$ són irreductibles. Però a la pràctica com s'identifica un polinomi irreductible?

1. Els polinomis de grau zero ($q(x) = a$) són irreductibles.
2. Tots els polinomis de la forma $x \pm a$ són irreductibles perquè es poden dividir per ell mateix i per qualsevol polinomi de grau zero.
3. Tot polinomi de grau n (amb $n > 1$) diem que és irreductible en $\mathbf{R}[x]$, quan aquest no presenta cap arrel real. Per exemple:

$$p(x) = x^4 + 1 \Rightarrow x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = -1 \text{ no té solució en } \mathfrak{R}$$

$$q(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \text{ no té solució en } \mathfrak{R}$$

Els polinomis irreductibles NO es poden factoritzar.