TEMA 8. TRIGONOMETRIA.

8.1. Graus i radians.

Com ja saben la circumferència es divideix en 360° o 2π radians. Per canviar d'unitats de graus a radians o a l'inrevés caldrà aplicar el factor de conversió anterior

$$\theta(\text{rad}) = \theta(\text{graus}) \cdot \frac{2\pi}{360} \quad \text{ó} \quad \theta(\text{graus}) = \theta(\text{radians}) \cdot \frac{360}{2\pi}$$

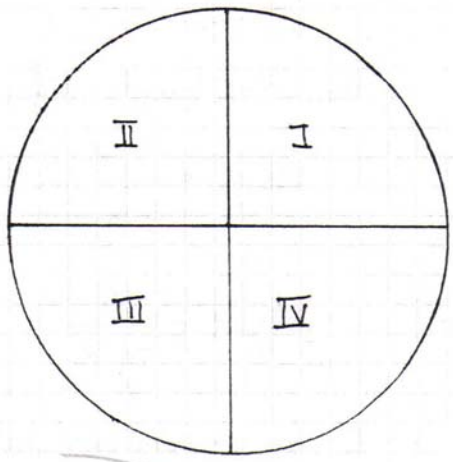
Tota la circumferència es divideix en quatre quadrants. Aquests quadrants venen definits per:

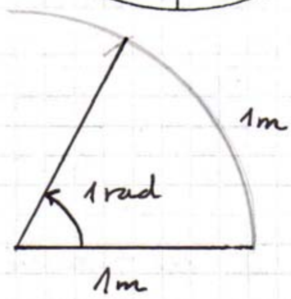
I quadrant ; Si $0° \le \theta(°) \le 90°$
Si $0 \le \theta(\text{rad}) \le \pi/2$.

II quadrant Si $90° \le \theta(°) \le 180°$
Si $\pi/2 \le \theta(\text{rd}) \le \pi$

III quadrant Si $180° \le \theta(°) \le 270°$
Si $\pi \le \theta(\text{rd}) \le \frac{3}{2}\pi$

IV quadrant Si $270 \le \theta(°) \le 360°$
Si $3/2\,\pi \le \theta(\text{rad}) \le 2\pi$.





- Els angles de 90° s'anomenen rectes
- Els angles de 180° s'anomenen plans
- Els angles de 360° s'anomenen complets

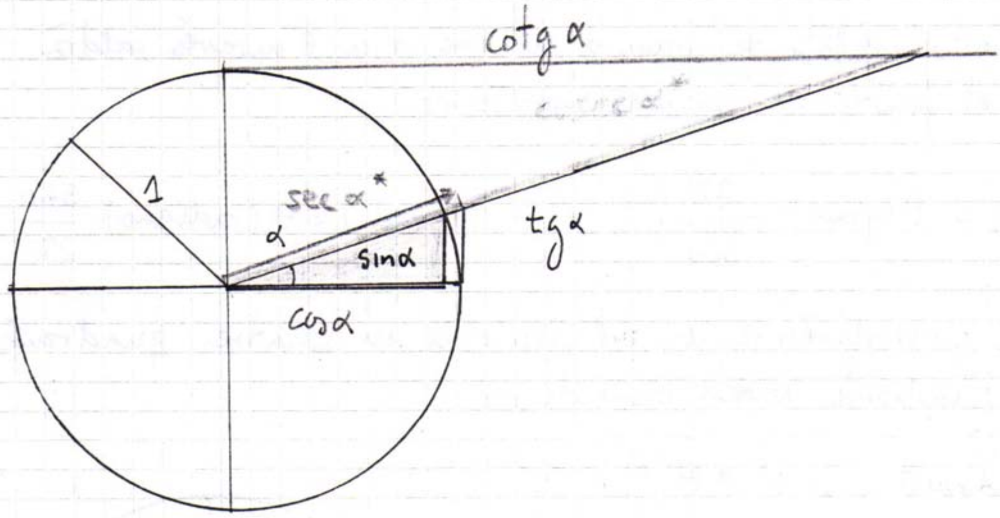
Ja per acabar direm que $1° = 0'017453\ldots$ rad
$1 \text{ rad} = 57'29558611\ldots°$

Els graus es subdivideixen en 60' i cada minut en 60".

$1° = 60' = 3600''$ ' minut d'arc   " segons d'arc.
$1' = 60''$

8.2. Raons trigonomètriques d'un angle.

Considerem una circumferència de radi unitat dividida en el quatre quadrants. Prenem un angle del I q. qualsevol.



Per altra banda definirem:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

Per la proporcionalitat de triangles del Th. de Thales tindrem que:

$$\frac{\text{tg}\,\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

A més del triangle representat a la figura podem extreure una de les equacions més importants de la trigonometria, la identitat fonamental.

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Dividint per $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \boxed{\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \longrightarrow \sec\alpha = \sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} \;*$$

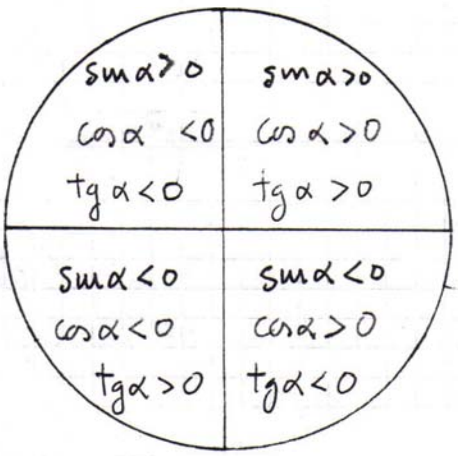
En canvi dividint per $\sin\alpha$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \boxed{1 + \cot g^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1 + \cot g^2\alpha}$$

8.3. Signe i valor de les raons trigonomètriques.

Considerem el cercle goniomètric ($R=1$) d'abans i els seus quadrants.



A més:

$$-1 \le \sin\alpha \le +1$$

$$-1 \le \cos\alpha \le +1$$

$$-\infty < tg\,\alpha < +\infty$$

Del I q. s'han de conèixer:

0°	0	1	0
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	$+\infty$
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$

· ANGLES

· Relacions:

Si $\beta + \alpha = 180^\circ$ $\Rightarrow$ $\sin\beta = \sin\alpha$; $\cos\beta = -\cos\alpha$; $tg\,\beta = -tg\,\alpha$

suplementaris

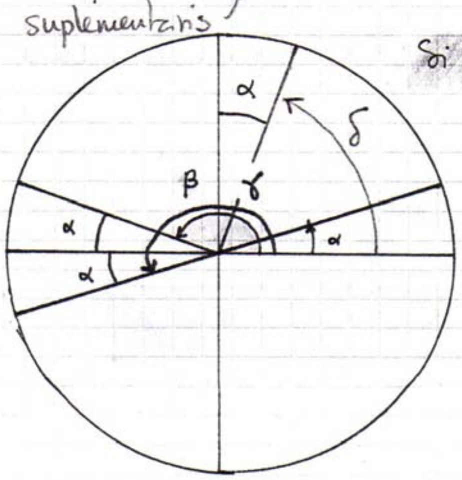
Si $\gamma - \alpha = 180^\circ$ $\Rightarrow$ $\sin\gamma = -\sin\alpha$;

$\cos\gamma = -\cos\alpha$; $tg\,\gamma = tg\,\alpha$

Si $\delta + \alpha = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha = \cos\delta$;

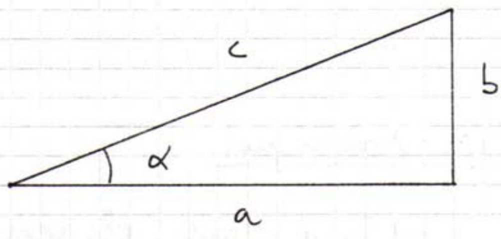
complementaris

$\sin\delta = \cos\alpha$; $tg\,\delta = \cot g\,\alpha$



8. 4. Resolució de triangles rectangles:

A partir de les raons trigonomètriques definides abans, podem trobar els catets i els angles d'un triangle rectangle qualsevol.



$$\sin\alpha = \frac{b}{c}$$

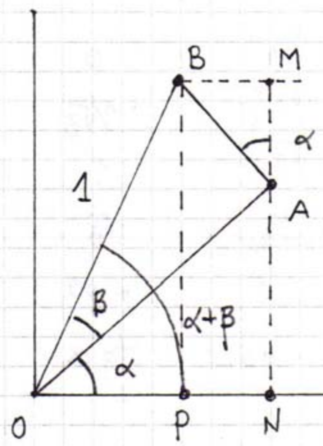
$$\cos\alpha = \frac{a}{c}$$

$$tg\,\alpha = b/a.$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{b} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{a} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{a}{b}$$

8. 5. Raons trigonomètriques de la suma i diferència d'angles.

Considerem la figura següent que defineix el triangle rectangle $O\hat{A}B$ rectangle. Si OB val 1, podem deduir:



$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{PB}}{\overline{OB}} = \overline{PB} = \overline{MN} =$$

$$= \overline{NA} + \overline{AM} = \overline{OA}\sin\alpha + \overline{AB}\cos\alpha$$

però $\cos\beta = \overline{OA}/\overline{OB} = \overline{OA}$ i

$\sin\beta = \overline{AB}/\overline{OB} = \overline{AB} \Longrightarrow$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OP}/\overline{OB} = \overline{OP} = \overline{ON} - \overline{PN} = \overline{ON} - \overline{BM} = \cos\alpha\cdot\overline{OA} - \sin\alpha\cdot\overline{AB}$$

$$= \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

ja que $\overline{OA} = \overline{OA}/\overline{OB} = \cos\beta$ i $\overline{AB} = \overline{AB}/\overline{OB} = \sin\alpha$.

per tant: $\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Dividint numerador i denominador per $\cos\beta$ i $\cos\alpha$.

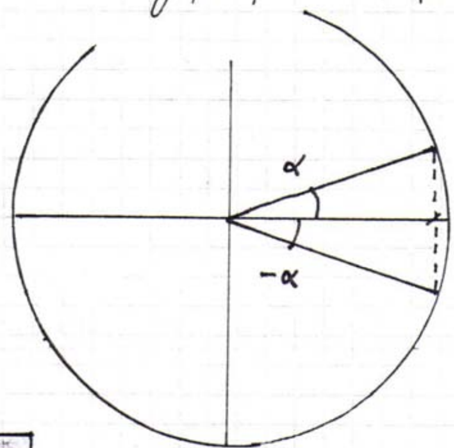
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha/\cos\alpha + \sin\beta/\cos\beta}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Per tant:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}$$

- Per trobar $\sin(\alpha-\beta)$; $\cos(\alpha-\beta)$ i $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ només s'ha de substituir el $\sin\beta$ el $\cos\beta$ i la $\operatorname{tg}\beta$ per $\sin(-\beta)$, $\cos(-\beta)$ i $\operatorname{tg}(-\beta)$ i sabent que.

$$-\beta = 2\pi - \beta \Rightarrow \begin{array}{l} \sin(-\beta) = -\sin\beta \\ \cos(-\beta) = \cos\beta \\ \operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta \end{array}$$



ens quedarà:

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}$$

8.6. Raons trigonomètriques de l'angle doble i meitat.

Per calcular $\sin(2\alpha)$ $\cos(2\alpha)$ i $tg(2\alpha)$ només hem de canviar β per α a $\sin(\alpha+\beta)$ $\cos(\alpha+\beta)$ i $tg(\alpha+\beta)$

Per tant quedarà

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\boxed{tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

De les expressions anteriors es dedueixen $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$ i $tg(\alpha/2)$. Vegem-ho:

Partim de $\cos(2(\frac{\alpha}{2})) = \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \Rightarrow$

$\sin^2(\alpha/2) = \cos^2(\alpha/2) - \cos(\alpha) \Rightarrow 1-\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos\alpha = \sin^2(\frac{\alpha}{2})$

$2\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = 1-\cos\alpha \Rightarrow$ $\boxed{\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$

Per trobar el cosinus $\cos(\frac{\alpha}{2})$:

$\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \sin^2(\frac{\alpha}{2}) + \cos\alpha \Rightarrow 2\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = 1+\cos\alpha$

$\cos^2(\alpha/2) = \frac{1+\cos\alpha}{2} \Rightarrow$ $\boxed{\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$

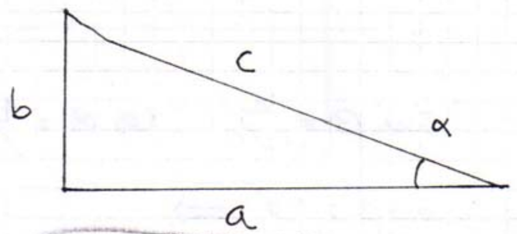
Per trobar la tangent dividim sin entre cosinus.

$$\boxed{tg\left(\alpha/2\right)} = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \boxed{\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}}$$

8.7. Resolució de triangles qualssevol.

Quan hom vol resoldre un triangle qualssevol pot usar les raons trigonomètriques dels angles i el teorema de Pitàgores sempre que el triangle sigui rectangle i altres teoremes. Quan el triangle no és rectangle caldrà aplicar dos teoremes que són de gran utilitat: El teorema del sinus i el teorema del cosinus.

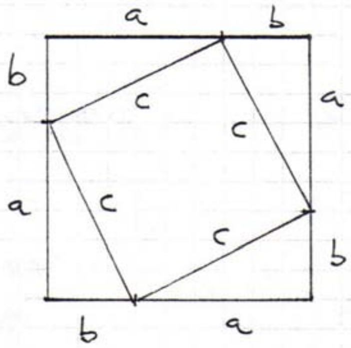
· RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES.



· Podem usar el Teorema de Pitàgores.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demostrem-lo Prenem un quadrat de costat L i dins hi inscrivim un quadrat de costat c.



Calculem la superfície de quadrat gran. S_1

$$S_1 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Calculem l'àrea dels quatre triangles

$$S_t = 4\,S_{1t} = 4\cdot\frac{ab}{2} = 2ab$$

I l'àrea del quadrat petit S_2:

$$S_2 = c^2$$

És evident que $S_2 + S_t = S_1 \Rightarrow c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow$

$c^2 = a^2 + b^2$. DEMOSTRAT!

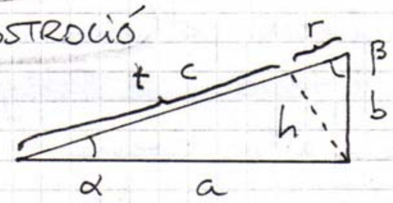
També es poden usar: El teorema del catet i el teorema de l'altura.

- Th. del catet

El quadrat d'un catet és la projecció del catet sobre la hipotenusa per la hipotenusa.

$$b^2 = r \cdot c \qquad a^2 = t \cdot c$$

DEMOSTRACIÓ



Usant les raons trigonomètriques d'α i β que són complementaris tenim:

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha &= b/c \\ \cos \beta &= r/b \end{aligned}\right\rangle \quad \sin \alpha = \cos \beta \quad \text{perquè} \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$b/c = r/b \implies b^2 = r \cdot c \quad \text{Demostrat!}$$

Anàlogament: $\sin \beta = a/c \quad \cos \alpha = t/a$

$\sin \beta = \cos \alpha$ pq $\alpha + \beta = 90^\circ \implies$

$a/c = t/a \rightarrow a^2 = t \cdot c$ Demostrat!

- Th. de l'altura.

L'altura^2 (al quadrat) és el producte de les projeccions anteriors:

$$h^2 = r \cdot t$$

Demostrem-ho: $h/t = \operatorname{tg} \alpha \qquad r/h = \operatorname{cotg} \beta$

A més $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$ pq. $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$h/t = r/h \rightarrow h^2 = t \cdot r \quad \text{Demostrat.}$$