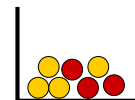


Probabilitat condicionada

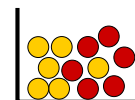
Exemple

Tenim un dau i dues caixes A i B. Les caixes contenen boles taronges i vermelles. Ara fem l'experiència següent: "Llancem el dau i si el resultat és menor de sis, traiem una bola de la caixa A. En cas contrari en traiem una de la caixa B".

Quina és la probabilitat de treure una bola taronja de la caixa B?



Caixa A



Caixa B

S : Treure un número menor de sis.

$$P(S) = \frac{n_{cf}}{n_{cp}} = \frac{5}{6}$$

T : Treure una bola taronja

B : Escollir la caixa B.

$$P(T \cap B) = P(T/B) \cdot P(B) = P(T/B) \cdot P(S) = \frac{6}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = P(\bar{S}) = \frac{1}{6}$$

Per Roger Mauricio Grañó

Sucesos independents

Diem que dos successos A i B són independents quan en esdevenir-ne un (p.e. A) l'altra (B) no queda en absolut afectat pel seu resultat.

La independència de dos successos qualssevol s'expressa com

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Quan els successos no són independents, cal definir el concepte de probabilitat condicionada.

Probabilitat condicionada

Parlem de successos condicionats o dependents quan un succés està afectat per altres successos aleatoris.

Diem que dos successos A i B són dependents quan un succés depèn de l'anterior.

Aleshores diem:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Per Roger Mauricio Grañó

Teorema de la probabilitat total

Sigui un conjunt de successos $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ amb probabilitats no nul·les. Sigui un esdeveniment B del que en coneixem les probabilitats condicionades $p(B/A_1) \dots p(B/A_n)$. Aleshores la probabilitat de B ve donada per:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

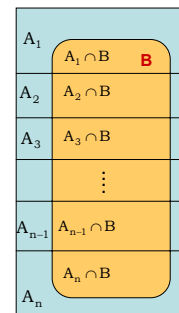
Demostració:

Considereu el següent diagrama de Venn

$$\begin{aligned} B &= (A_1 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \Rightarrow \\ P(B) &= P((A_1 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)) \Rightarrow \\ P(B) &= P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

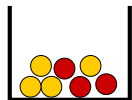
Per Roger Mauricio Grañó



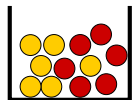
Exemple

Tenim un dau i dues caixes A i B. Les caixes contenen boles taronges i vermelles. Ara fem l'experiència següent: "Llancem el dau i si el resultat és menor de sis, traiem un bola de la caixa A. En cas contrari en traiem una de la caixa B".

Quina és la probabilitat de treure una bola taronja?



Caixa A



Caixa B

S : Treure un número menor de sis.

$$P(S) = \frac{ncf}{ncp} = \frac{5}{6}$$

T : Treure una bola taronja

A : Escollir la caixa A.

B : Escollir la caixa B.

$$P(B) = P(\bar{S}) = \frac{1}{6}; P(A) = P(S) = \frac{5}{6}$$

$$P(T) = P(T/B) \cdot P(B) + P(T/A) \cdot P(A) = \frac{6}{12} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{47}{84}$$

Per Roger Mauricio Grañó

Exemple

Tenim un dau i dues caixes A i B. Les caixes contenen boles taronges i vermelles. Ara fem l'experiència següent: "Llancem el dau i si el resultat és menor de sis, traiem un bola de la caixa A. En cas contrari en traiem una de la caixa B".

Quina és la probabilitat d'escollir la caixa B sabent que hem tret una bola vermella?

S : Treure un número menor de sis.

$$P(S) = \frac{ncf}{ncp} = \frac{5}{6}$$

T : Treure una bola taronja

A : Escollir la caixa A.

B : Escollir la caixa B.

$$P(B) = P(\bar{S}) = \frac{1}{6}; P(A) = P(S) = \frac{5}{6}$$

$$P(B/V) = \frac{P(B) \cdot P(V/B)}{P(V)} = \frac{P(B) \cdot P(V/B)}{P(B) \cdot P(V/B) + P(A) \cdot P(V/A)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{7}} = \frac{7}{37}$$

Per Roger Mauricio Grañó

Teorema de Bayes

Thomas Bayes va ser el primer en adonar-se que es poden calcular les probabilitats de les causes a partir de les conseqüències obtingudes dels esdeveniments

Segui un conjunt de successos $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ amb probabilitats no nul·les. Segui un esdeveniment B del que en coneixem les probabilitats condicionades $p(B/A_1) \dots p(B/A_n)$. Aleshores $P(A_i/B)$ ve donada per:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

El denominador és la probabilitat total P(B)

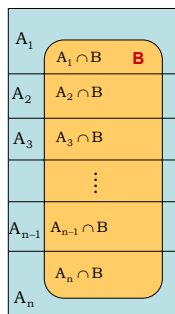
Demostració:

Considereu el següent diagrama de Venn

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B) \Rightarrow$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} = P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

Per Roger Mauricio Grañó



Diagrames d'arbre

És una de les maneres d'expressar la informació probabilística per a poder resoldre un problema amb més facilitat.

EXEMPLE

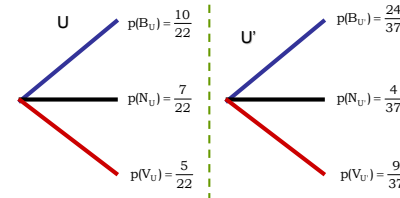
Tenim dues urnes U i U' amb les composicions següents: U = 10 boles blaves, 7 de negres i 5 de vermelles; U' = 24 boles blaves, 4 de negres i 9 de vermelles.

a) Ara traiem una bola de l'urna U i una bola de l'urna U'. Quina probabilitat hi ha que les dues boles siguin blaves? ([Exemple de successos independents](#))

U: Treure bola de l'urna U

U': Treure bola de l'urna U'

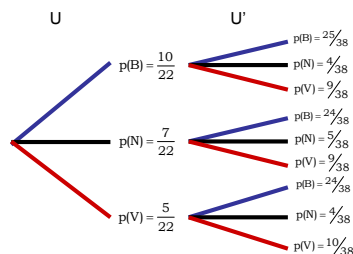
	B	N	V	Totals
U	10	7	5	22
U'	24	4	9	37



$$P(B_U \cap B_{U'}) = P(B_U) \cdot P(B_{U'}) = \frac{10}{22} \cdot \frac{24}{37} = \frac{120}{407} = 0,2948$$

b) Ara traiem una bola de l'urna U i la fem a l'urna U'. Després en traiem una de U'. Quina probabilitat hi ha que les dues boles siguin blaves? (Exemple de probabilitat condicionada)

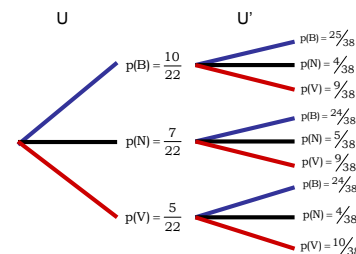
	B	N	V	Totals
U	10	7	5	22
U'	24	4	9	37



$$P(B_U \cap B_{U'}) = P(B_U) \cdot P(B_{U'} / B_U) = \frac{10}{22} \cdot \frac{25}{38} = 0,2990$$

Per Roger Mauricio Graó

d) Ara traiem una bola de l'urna U i la fem a l'urna U'. Després en traiem una de U'. Quina probabilitat hi ha que la bola de U sigui blava si la de U' sabem que és blava? (Exemple del Teorema de Bayes)



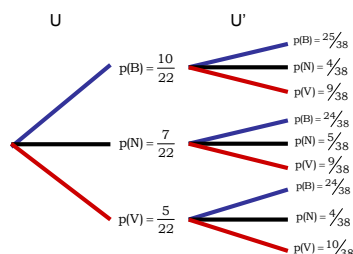
$$P(B_U / B_{U'}) = \frac{P(B_U) \cdot P(B_{U'} / B_U)}{P(B_{U'})} = \frac{\frac{10}{22} \cdot \frac{25}{38}}{\frac{269}{418}} = \frac{125}{269} = 0,4647$$

Veure l'apartat anterior.

Per Roger Mauricio Graó

c) Ara traiem una bola de l'urna U i la fem a l'urna U'. Després en traiem una de U'. Quina probabilitat hi ha que la segona sigui blava? (Exemple de probabilitat total)

	B	N	V	Totals
U	10	7	5	22
U'	24	4	9	37



$$P(B_{U'}) = P(B_U) \cdot P(B_{U'} / B_U) + P(N_U) \cdot P(B_{U'} / N_U) + P(V_U) \cdot P(B_{U'} / V_U) = \frac{10}{22} \cdot \frac{25}{38} + \frac{7}{22} \cdot \frac{24}{38} + \frac{5}{22} \cdot \frac{24}{38} = \frac{269}{418} = 0,6435$$

Per Roger Mauricio Graó

Taules de contingència

Per resoldre problemes de probabilitat condicionada és útil usar taules de doble entrada, és a dir **les taules de contingència**.

Les taules de contingència 2 x 2 tenen la següent forma:

	A	$\bar{A}$	Totals
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Totals	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

	Curats	No curats	Totals
Tractament nou	60	21	81
Tractament vell	43	36	79
	103	57	160

Veiem-ne un exemple:

Per intentar curar una malaltia s'ha aplicat un nou tractament a una part dels pacients malalts i un tractament vell a la resta. La taula de contingència ens mostra la relació de pacients curats segons els tipus de tractaments. Si triem una persona a l'atzar, quina és la probabilitat que :

- S'hagi curat? $p(\text{curat}) = \frac{103}{160}$
- S'hagi curat mb el nou tractament? $p(\text{curat} \cap \text{nou tractament}) = \frac{60}{160}$
- No s'hagi curat amb el tractament antic? $p(\text{no curat} \cap \text{tractament antic}) = \frac{36}{160}$

MATEMÀTIQUES 1rA

EXERCICIS DEL LLIBRE:

PG.287 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9

PG. 288 23, 24, 25, 26, 27

PG. 289. 30, 32, 34, 36, 37

MATEMÀTIQUES 1rB

EXERCICIS DEL LLIBRE:

PG.287 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9

PG. 288 23, 24, 25, 26, 27

PG. 289. 30, 32, 34, 36, 37