

CÀLCUL DE PROBABILITATS

Experiment aleatori

DEFINICIÓ

Diem que un experiment és aleatori si sota certes condicions específiques...

- ...es pot obtenir més d'un resultat possible en l'experiment
- ...coneixem a priori quins són tots els possibles resultats de l'experiment.
- ..., per a cada realització de l'experiment, desconeixem a priori el resultat concret que sortirà d'entre tots els possibles.

EXEMPLES

Llançar un dau de 6 cares.

Escollir una carta a l'atzar.

Extreure una bola d'una caixa que està plena de boles de colors.

Etc...

Per Roger Mauricio Grañó

Definicions prèvies.

-Experiència: Conjunt d'experiments dels quals n'esperem un conjunt de resultats imprevisibles però esperats.

-Prova: Realització d'una experiència que ens conduirà a un conjunt de resultats aleatoris.

-Succés segur: Conjunt de tots els resultats possibles d'una prova.

-Succés elemental: Succés que representa cada un dels resultats que es poden obtenir en una prova.

-Succés: Qualsevol agrupació d'esdeveniments elementals.

-Succés contrari: És el conjunt de resultats que no inclou un conjunt de resultats considerats en un succés.

-Succés impossible: Que no es pot produir mai.

Per Roger Mauricio Grañó

Successos incompatibles: Successos que no es poden produir de forma simultània.

Unió de successos: Aquell succés en el qual només ocorre com a mínim un dels successos units.

Successos simultanis: Aquell succés que engloba el conjunt d'esdeveniments que ocorren a la vegada.

Inclusió de successos: Diem que un succés S està inclòs dins d'un altre T si quan passa S sempre passa T

Per Roger Mauricio Grañó

Nomenclatura

Succés segur	E
Succés elemental	$\{e_i\}$
Succés qualsevol	T, S_1 , S_2 , A, B, C...
Succés contrari	$\bar{S}$
Succés impossible	$\emptyset$
Unió de successos	$S \cup T \cup R$
Successos simultanis	$S \cap T \cap R$
Successos incompatibles	$S \cap T = \emptyset$
Inclusió de successos	$S \subset T \text{ ó } S \rightarrow T$

Per Roger Mauricio Grañó

Propietats de la relació entre successos

- Si $S = T \Leftrightarrow S \subset T \text{ i } T \subset S$
- Si $S \subset T \Rightarrow \bar{T} \subset \bar{S}$
Si $\bar{T} \subset \bar{S} \Rightarrow S \subset T \Rightarrow S \subset T \Leftrightarrow \bar{T} \subset \bar{S}$

$$3. \begin{cases} \bar{\bar{S}} = S \\ E = S \cup \bar{S} \\ S \cap \bar{S} = \emptyset \\ \bar{E} = \emptyset \end{cases}$$

- Lleis de Morgan:

$$\overline{S \cup T} = \bar{S} \cap \bar{T}$$

$$\overline{S \cap T} = \bar{S} \cup \bar{T}$$

Per Roger Mauricio Grañó

EXEMPLE

En llançar un dau, hom espera una col·lecció de resultats possibles. Aleshores segons les definicions anteriors nosaltres parlem de:

Experiència:	Llançar daus.	
Prova:	Llançar el dau una vegada.	
Succés segur:	Que surti algun nombre de 1 a 6 ambdós inclosos	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Succés elemental: És cada un dels possibles resultats.	Que surti 1, que surti 2,...	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$
Succés:	- Que surti parell: - Que surti senar: - Que surti menor de 4:	$S_1 = \{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$ $S_2 = \{1, 3, 5\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$ $S_3 = \{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$
Successos incompatibles	- Que surti parell i senar a la vegada.	$S = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset$
Succés contrari	- Que no surti múltiple de 3.	$S = \{1, 2, 4, 5\}$
Unió de successos	- Que surti parell o senar	$S = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\}$

Per Roger Mauricio Grañó

- La unió i la intersecció de successos compleixen les propietats associativa i commutativa.

$$S \cup T = T \cup S$$

$$S \cap T = T \cap S$$

$$S \cup (T \cap P) = (S \cup T) \cap P$$

$$S \cap (T \cup P) = (S \cap T) \cup P$$

- La intersecció de successos és distributiva respecte la unió.

$$S \cup (T \cap P) = (S \cup T) \cap (S \cup P)$$

- La unió de successos és distributiva respecte la intersecció.

$$S \cap (T \cup P) = (S \cap T) \cup (S \cap P)$$

Per Roger Mauricio Grañó

Freqüència relativa d'un succés S

Fem N proves d'una experiència. Sigui S un succés possible dins la prova. Diem que la freqüència relativa de S és en nombre de vegades F(S) que ha succeït S d'entre el conjunt de les N proves que hem fet. La freqüència s'expressarà com $f(S)$.

$$h(S) = \frac{f(S)}{N}$$

Evidentment es complirà que:

$$1.0 \leq h(S) \leq 1$$

$$2.h(E) = 1$$

$$3.h(S \cup T) = h(S) + h(T) \text{ si i només si } S \cap T = \emptyset. \quad (S \text{ i } T \text{ successos incompatibles})$$

La llei dels grans nombres

Si $N \rightarrow \infty$ aleshores $f(S)$ s'estabilitza i tendeix a un valor $P(S)$ constant que anomenarem probabilitat del succés S.

Per Roger Mauri
Definició poc pràctica de probabilitat

$$P(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} h(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{f(S)}{N} \right)$$

EXEMPLE D'APLICACIÓ DE LA REGLA DE LAPLACE

Tenim tres caixes, A amb 79 boles blanques, 53 vermelles i 68 negres, B amb 157 boles blanques, 106 vermelles i 137 negres, i C amb 317 boles blanques, 212 vermelles i 271 negres. Si traiem una bola de cada caixa quina és la probabilitat que surti blanca en cada cas? Per a quina caixa és més probable treure una bola blanca?

$$B_j : \text{Treure una bola blanca de la caixa } j. \quad P(B_A) = \frac{79}{200} = 0,395$$

$$V_j : \text{Treure una bola vermella de la caixa } j. \quad P(B_B) = \frac{157}{400} = 0,3925$$

$$N_j : \text{Treure una bola negra de la caixa } j. \quad P(B_C) = \frac{317}{800} = 0,39625$$

REGLA DE LAPLACE

$$P(B_j) = \frac{\text{nombre de casos favorables}}{\text{nombre de casos possibles}}$$

És més probable per la caixa C.

Per Roger Mauricio Grañó

Definició clàssica de probabilitat. La regla de Laplace.

Enunciada per *Pierre Simon Laplace* (1749-1827).

Siguin n successos incompatibles dos a dos $S_1, \dots, S_n$ tals que les seves probabilitats són coincidents. $P(S_1) = \dots = P(S_n)$. Aleshores es complirà que:

$$\left. \begin{array}{l} E = S_1 \cup \dots \cup S_n \\ P(E) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P(E) = P(S_1) + \dots + P(S_n) \Rightarrow 1 = nP(S_1) \Rightarrow P(S_1) = \frac{1}{n}$$

Si T és un succés format per la unió de k successos de l'apartat anterior. ($T = S_1 \cup \dots \cup S_k$). Aleshores la probabilitat de T s'escriurà com:

$$P(T) = P(S_1 \cup \dots \cup S_k) = P(S_1) + \dots + P(S_k) = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

que es coneix com **regla de Laplace**. "La probabilitat d'un succés T format per successos equiprobables i incompatibles dos a dos s'escriu com el quocient de casos favorables entre casos possibles".

$$P(S_j) = \frac{\text{nombre de casos favorables}}{\text{nombre de casos possibles}}$$

Per Roger Mauricio Grañó

AXIOMES DE LA PROBABILITAT

Per Roger Mauricio Grañó

La regla de Laplace presenta limitacions en la seva aplicació perquè només es vàlida quan els successos elementals de l'espai mostrat són equiprobables.

Definició axiomàtica de probabilitat

La definició axiomàtica necessita de la :

1. Teoria de conjunts. *Àlgebra de Boole*.
2. Teoria de la mesura. (Kolmogorov 1903-1941) que reprèn la idea de la *lleis dels grans nombres*.

La teoria de la mesura es basa en *tres propietats de les freqüències relatives*.

Realitzem una experiència amb un nombre N de proves, obtenint una sèrie de resultats A, B, C,... que estan inclosos en l'espai mostrat E.

- La freqüència relativa d'un esdeveniment és positiva o nul·la. $f(A) \geq 0$
- La freqüència relativa de l'esdeveniment segur és u. $f(E) = 1$
- La freqüència relativa de la unió de dos successos incompatibles és la suma de les freqüències de cada succés per separat.

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B).$$

Per Roger Mauricio Grañó

Teoremes resultants dels axiomes de la probabilitat

Teorema 1.

Si $S_1, \dots, S_n$ són successos incompatibles dos a dos, aleshores:

$$P(S_1 \cup \dots \cup S_n) = P(S_1) + \dots + P(S_n)$$

Demostració: Trivial per l'axioma [A3]

Teorema 2.

Si S un succés de E i $\bar{S}$ el seu contrari. aleshores $P(\bar{S}) = 1 - P(S)$

Demostració: Sabem que $P(E) = 1$ i que $S \cup \bar{S} = E$. Aleshores:

$$\left. \begin{array}{l} P(S \cup \bar{S}) = P(E) \\ S \cap \bar{S} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow P(S) + P(\bar{S}) = 1 \Rightarrow P(\bar{S}) = 1 - P(S)$$

Per Roger Mauricio Grañó

Axiomes de la probabilitat

Ja sabem que les freqüències s'estabilitzen quan el nombre de proves tendeixen a infinit. A partir d'aquesta idea Kolmogorov va definir els tres axiomes base de la probabilitat i que són els que usarem per treballar.

Considerem una experiència on els successos compleixen l'*Àlgebra de Boole*. Definim probabilitat del succés S com l'aplicació:

$$\begin{array}{l} P : E \rightarrow R \\ S \rightarrow P(S) \end{array}$$

de manera que a cada subconjunt S de E li assignem un nombre $P(S)$, i que compleix els *axiomes* següents:

[A1] $0 \leq P(S) \leq 1$

[A2] $P(E) = 1$

[A3] $P(S \cup T) = P(S) + P(T) \Leftrightarrow S \cap T = \emptyset$ (S i T incompatibles)

L'aplicació P i l'*àlgebra de Boole* defineixen el què es coneix com *espai de probabilitat*.

Per Roger Mauricio Grañó

Teorema 3.

Si S i T dos successos compatibles. Aleshores:

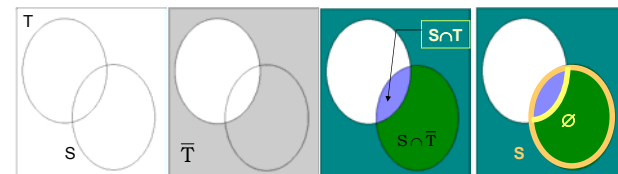
$$P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T)$$

Demostració:

Si S i T dos successos compatibles de l'espai de probabilitat E . A partir d'aquests, construïm $\bar{T}$, $S \cap T$, $S \cap \bar{T}$

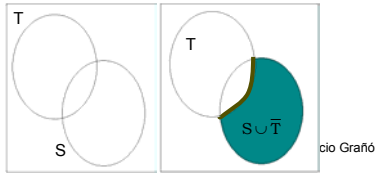
Aleshores es complirà

1. $S = (S \cap T) \cup (S \cap \bar{T}) \rightarrow P(S) = P(S \cap T) + P(S \cap \bar{T})$
2. $(S \cap T) \cap (S \cap \bar{T}) = \emptyset$



$$P(S) = P(S \cap T) + P(S \cap \bar{T})$$

A la vegada ens fixem que $S \cup T = (S \cap \bar{T}) \cup T$ on a més $(S \cap \bar{T}) \cap T = \emptyset$
 per tant: $P(S \cup T) = P(S \cap \bar{T}) + P(T) \Rightarrow P(S \cap \bar{T}) = P(S \cup T) - P(T)$ i substituint
 $P(S) - P(S \cap T) = P(S \cup T) - P(T) \Rightarrow P(S) + P(T) - P(S \cap T) = P(S \cup T)$



TEOREMA 4.

Si $S \subset T$ aleshores $P(S) \leq P(T)$.

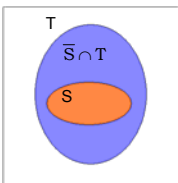
Demostració: Partim de :

$$S \cap (\bar{S} \cap T) = \emptyset$$

$$T = S \cup (\bar{S} \cap T)$$

$$P(T) = P(S \cup (\bar{S} \cap T)) \Rightarrow P(T) = P(S) + P(\bar{S} \cap T) - P(S \cap (\bar{S} \cap T)) \Rightarrow$$

$$P(T) = P(S) + P(\bar{S} \cap T) \Rightarrow P(T) \geq P(S)$$



EXEMPLE D'APLICACIÓ DELS AXIOMES DE LA PROBABILITAT

En un congrés de científics hi ha 100 congressistes, dels quals 80 parlen francès i 40 parlen anglès. Quina és la probabilitat que en escollir un congressista parli un i només un idioma?

F: congressista que parla francès

A: Congressista que parla anglès

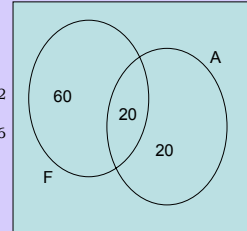
$$P(A) = \frac{ncf}{ncp} = \frac{40}{100} = 0,4$$

$$P(A \cap \bar{F}) = \frac{ncf}{ncp} = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$P(F) = \frac{ncf}{ncp} = \frac{80}{100} = 0,8$$

$$P(F \cap \bar{A}) = \frac{ncf}{ncp} = \frac{60}{100} = 0,6$$

$$P(A \cap F) = \frac{ncf}{ncp} = \frac{20}{100} = 0,2$$



$$P((A \cap \bar{F}) \cup (\bar{A} \cap F)) = P(A \cap \bar{F}) + P(\bar{A} \cap F) - P((A \cap \bar{F}) \cap (\bar{A} \cap F)) = 0,2 + 0,4 - 0 = 0,6$$

SUCCESSOS
INCOMPATIBLES