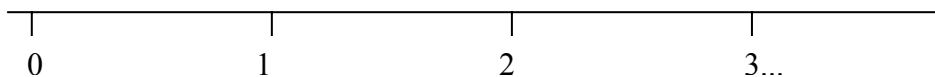


TEMA 1

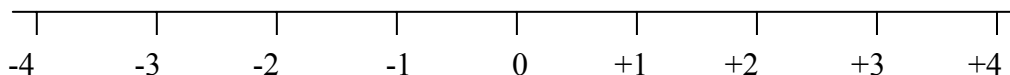
El conjunt dels nombres reals

El conjunt dels nombres reals està format per un nombre infinit d'elements. Aquests elements a la vegada pertanyen a altres subconjunts dels nombres reals. Així doncs agrupem els nombres reals en quatre subconjunts que estan inclosos dins del conjunt dels nombres reals. Aquests subconjunts són:

- **N:** Conjunt dels nombres naturals. Està format per infinits elements. És un conjunt ordenat, és a dir es pot establir la relació *més gran que*, i no complert, és a dir que entre dos nombres naturals consecutius no hi ha cap altre nombre natural, o dit d'una altra manera que hi ha espais buits entre dos nombres naturals consecutius. Podem representar aquest conjunt a partir d'una línia recta. L'origen dels nombres naturals és el zero.



- **Z:** Conjunt dels nombres enters. Està format per tots els nombres naturals i pels seus simètrics, és a dir pels nombres naturals amb un signe negatiu al davant. També és un conjunt ordenat, és a dir que es pot establir la relació *més gran que*, i no complert, és a dir que entre dos enters consecutius no hi ha cap altre nombre enter. També podem representar-lo a partir d'una línia recta on l'enter zero està just al mig.



- **Q:** Conjunt dels nombres racionals. Està format per tots els nombres enters i pels nombres fraccionaris. Els nombres fraccionaris ocupen les zones que hi ha entre dos nombres enters consecutius de manera que en representar-los sobre la recta anterior sembla que aquesta es completa ja que entre dos nombres racionals qualssevol sempre existeix com a mínim un altre nombre racional (per exemple la mitjana aritmètica).

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

Podem expressar els nombres racionals de dues formes diferents i equivalents per al mateix nombre racional.

- Com a nombre fraccionari.
- Com a nombre decimal.

- Els *nombres fraccionaris* tenen el següent aspecte $\frac{a}{b}$ amb $a < b$ o $a > b$ ⁽¹⁾ on a i b són nombres enters. Tots els nombres racionals es poden

¹ Els nombres fraccionaris $\frac{a}{b}$ amb $a > b$, s'anomenen fraccions impròpies i es poden expressar com $m \frac{n}{b}$,

on $m \cdot b + n = a$. EXEMPLE: $\frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3} \Rightarrow 4 = 1 \cdot 3 + 1$

expressar com una fracció de nombres enters. Ara bé, també podem expressar aquestes fraccions com un nombre decimal.

- Els *nombres decimals* són una forma equivalent d'expressió dels nombres racionals. N'hi ha de dos tipus, els nombres decimals exactes i els nombres decimals periòdics.

- Els nombres decimals exactes s'escriuen de la següent forma

123,76854903

Part entera

Part decimal

Davant de la coma trobem la part entera del nombre racional i darrera la part decimal. Fixeu-vos que la part decimal està formada per un nombre finit de xifres.

- Els nombres decimals periòdics es poden expressar com

123,34687687687...

on la part decimal està formada per un nombre infinit de xifres i on un cert nombre de xifres es va repetint. Aquestes xifres s'anomenen el *període del nombre decimal*.

De l'expressió fraccionària a l'expressió decimal.

Tots els nombres racionals es poden expressar de forma equivalent de forma fraccionària o decimal. A més hem de saber passar de l'una a l'altra.

Sigui el nombre racional expressat com $\frac{3}{7}$. Per obtenir-ne la forma decimal només cal fer la divisió i parar quan comencin a repetir-se els decimals o quan la resta sigui zero.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 7} \\ 20 \\ 60 \\ 40 \\ 50 \\ 10 \\ 30 \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \\ 0,4285714\dots \end{array}$$

Per passar de la forma decimal periòdica a la fracció procedirem de la següent manera. Sigui el nombre decimal periòdic següent 12,34565656.... Anomenem x a aquest nombre.

$$x = 12,34565656 \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 \cdot x = 1.234,565656 \dots \\ 10000 \cdot x = 123.456,565656 \dots \end{array} \right\} 10000 \cdot x - 100 \cdot x = 123.456,565656 \dots - 1.234,565656 \dots$$

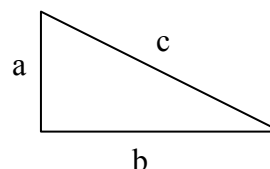
$$9900 \cdot x = 122.222 \Rightarrow x = \frac{122.222}{9900} = \frac{61111}{4950}$$

Si el nombre és decimal exacte, l'obtenció de la fracció és més simple. Per exemple, sigui el nombre 12,2.

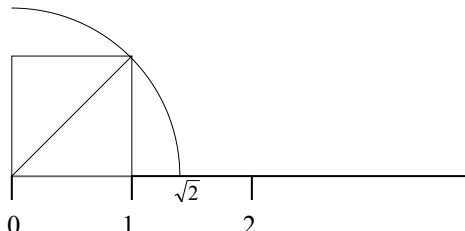
$$x = 12,2 \Rightarrow 10 \cdot x = 122 \Rightarrow x = \frac{122}{10} = \frac{61}{5}$$

Amb aquest raonament els antics grecs consideraven que els nombres racionals completaven tot el ventall de nombres possibles i que qualsevol xifra numèrica és podia expressar amb aquests nombres. La paradoxa va venir a partir d'un filòsof i matemàtic grec, Pitàgores, que amb el seu teorema² va establir la relació entre la hipotenusa i els catets en un triangle rectangle. Aquest teorema estableix que la relació entre les longituds dels catets i la longitud de la hipotenusa dels triangles rectangles ve donada per:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Considereu un quadrat amb costats de longitud la unitat. Si traceu la diagonal d'aquest quadrat veureu que la seva longitud no es pot expressar com un nombre racional.



Teorema 1: El nombre irracional $\sqrt{2}$ no es pot expressar com una fracció irreductible.

Demostració

Per demostrar l'enunciat anterior usarem el mètode de reducció a l'absurd.

Suposem que sí podem expressar $\sqrt{2}$ com una fracció irreductible, és a

dir $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ on a i b són nombres enters. Aleshores podem escriure que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2 \cdot b^2$$

De $a^2 = 2 \cdot b^2$ establim que a és un nombre parell. Si a^2 és parell aleshores a també ho ha de ser ($a = 2 \cdot k \Rightarrow a^2 = a \cdot a = (2k \cdot 2k) = 2(2 \cdot k \cdot k)$). Això vol dir que a és divisible per 2 i que es pot expressar com $a = 2 \cdot k$ i $a^2 = 4 \cdot k^2$.

² Podeu demostrar vosaltres mateixos el teorema de Pitàgores.

$$2 \cdot b^2 = 4 \cdot k^2 \Rightarrow b^2 = 2 \cdot k^2$$

Pel mateix raonament d'abans, b també és divisible per 2 i per tant la fracció inicial $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ es pot simplificar, cosa que contradiu la suposició inicial.

Per tant veiem que si suposem que $\sqrt{2}$ es pot expressar com una fracció irreductible, aleshores això ens porta a la contradicció que la fracció es pot simplificar per 2.

- **I:** conjunt de nombres irracionals. Conté els nombres que no es poden expressar com una fracció i és un conjunt ordenat. Són els nombres que completen la recta on representàvem els nombres racionals. Així doncs la recta complerta s'anomena la recta real.
- **R:** conjunt de nombres reals. Conté tots els nombres que hem estudiat abans. És un conjunt ordenat i complert, és a dir entre dos nombres reals qualssevol hi ha infinits nombres reals.
En el conjunt dels nombres reals es poden establir dues operacions bàsiques que li donaran estructura de cos.

Les operacions en el conjunt dels nombres reals. El cos $(\mathbf{R}, +, \cdot)$.

En el conjunt dels nombres reals definim dues operacions, suma (+) i producte ($\cdot$). Aquestes operacions són tancades, és a dir els resultats que s'obtenen amb elles són nombres reals. A més els elements i les operacions del cos dels nombres reals $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ compleixen una sèrie d'operacions que convé recordar.

1. Propietat associativa.

Siguin a, b i c tres nombres reals ($a, b, c \in \mathbf{R}$). Aleshores es complirà:

SUMA	PRODUCTE
$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2. Propietat commutativa.

Siguin a i b dos nombres reals ($a, b \in \mathbf{R}$). Aleshores es complirà:

SUMA	PRODUCTE
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$

3. Propietat distributiva.

Siguin a, b i c tres nombres reals ($a, b, c \in \mathbf{R}$). Aleshores es complirà:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

No es compleix : $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$

4. Existència de l'element neutre.

SUMA	PRODUCTE
$a+0=a$	$a \cdot 1=a$
0 s'anomena ZERO	1 s'anomena u

5. Existència de l'element simètric.

SUMA	PRODUCTE
$a+s=0$	$a \cdot i = 1$
$s=-a$	$i = a^{-1} = \frac{1}{a} ; \forall a \neq 0$

Acotació dels nombres racionals i irracionals.

Acotar un nombre racional o un nombre irracional vol dir calcular-ne la seva aproximació amb un nombre determinat de xifres decimals. Evidentment quan fem aquesta aproximació cometrem un error d'aproximació.

- Per a nombres racionals.

Definim doncs l'error absolut de l'aproximació d'un nombre racional com:

$$e = |x - a|$$

on x és l'aproximació i a el nombre exacte. També definirem l'error relatiu de l'aproximació del nombre racional com:

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

on e és l'error absolut de l'aproximació i a el valor exacte del nombre racional.

- Per a nombres irracionals.

En el cas dels nombres irracionals, el valor exacte no es pot conèixer i per tant el què hem de fer és treballar amb les seves aproximacions per excés i per defecte. En aquest cas definirem l'error absolut de l'aproximació com:

$$e = |x_{\text{excés}} - x_{\text{defecte}}|$$

i l'error relatiu de l'aproximació del nombre irracional com:

$$\varepsilon = \frac{e}{x_{\text{defecte}}}$$

EXEMPLE.

Calculeu el valor aproximat de $\sqrt{2}$ amb un error absolut menor d'una centèsima. Això vol dir que $|x_{\text{excés}} - x_{\text{defecte}}| < 0,01$.

NOTA: Aplicarem la desigualtat següent entre nombres reals.

Siguin $a, b \in \mathbf{R}$. Si $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Aplicant aquesta propietat, procedirem a trobar l'acotació de $\sqrt{2}$.

$1 < 2 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$ veiem que $\sqrt{2}$ està entre 1 i 2.

$\left. \begin{array}{l} 1,1^2 = 1,21 \\ 1,2^2 = 1,44 \\ 1,3^2 = 1,69 \\ 1,4^2 = 1,96 \\ 1,5^2 = 2,25 \end{array} \right\} \Rightarrow 1,96 < 2 < 2,25 \Rightarrow 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ veiem que $\sqrt{2}$ està entre 1,4 i 1,5.

$\left. \begin{array}{l} 1,41^2 = 1,4641 \\ 1,42^2 = 2,0164 \end{array} \right\} \Rightarrow 1,4641 < 2 < 2,0164 \Rightarrow 1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ veiem que $\sqrt{2}$ està entre 1,41 i 1,42.

$\left. \begin{array}{l} 1,411^2 = 1,990921 \\ 1,412^2 = 1,993744 \\ 1,413^2 = 1,996569 \\ 1,414^2 = 1,999396 \\ 1,415^2 = 2,002225 \end{array} \right\} \Rightarrow 1,999396 < 2 < 2,002225 \Rightarrow 1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ veiem que $\sqrt{2}$ està entre 1,414 i 1,415.

Repàs d'operacions amb radicals i potències.

Com que els nombres irracionals no es poden expressar com a fraccions, per escriure'ls amb exactitud els haurem d'expressar amb l'arrel corresponent i per tant haurem d'operar sempre amb ella.

Producte de radicals	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
Quocient de radicals	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
Potència d'un radical	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
Arrel d'un radical	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Com ja sabeu els radicals es poden expressar com una potència d'índex fraccionari

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Producte de potències: mateixa base i exponent diferent	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Quocient de potències de la mateixa base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Potència d'una potència	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Producte de potències: mateix exponent i bases diferents	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
Quocient de potències: mateix exponent i bases diferents	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

PROBLEMES.

Pg. 20	1, 2, 6, 10
Pg. 22	37
Pg. 36	1, 5, 7, 21, 22