

TEMA 2

Ordenació dels nombres reals. Intervalls

Com ja sabeu, el conjunt dels nombres reals és un conjunt ordenat. Això vol dir que es poden establir relacions de desigualtat entre els seus elements. A partir d'aquí podem establir la definicions d'ordre *menor o igual que*, *menor que*, *major que* i *major o igual que* com:

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbf{R}^+$$

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b \text{ i } a \neq b$$

$$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$$

$$a > b \Leftrightarrow b < a \text{ i } a \neq b$$

Aquestes relacions d'ordre poden ser certes o falses.

$5 \leq 7$, certa $5 \leq -7$, falsa

i es demostren a partir de les propietats reflexiva, transitiva, antisimètrica i ordre total¹.

Relacions d'ordre per a la suma i el producte.

Aquestes relacions permeten resoldre les equacions i inequacions amb major facilitat i demostrar alguns teoremes senzills.

1. $a \leq b \Leftrightarrow a \pm c \leq b \pm c, \forall c \in \mathbf{R}$

2. $a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c \in \mathbf{R}^+$

3. $a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c, \forall c \in \mathbf{R}^-$

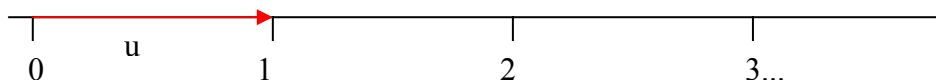
(4. $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d \leq b \cdot c$)

Representació gràfica dels nombres reals. La recta real.

Podem representar qualsevol nombre real en una recta que anomenarem *recta real*.

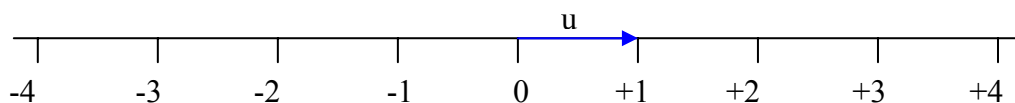
- Nombres naturals.

Els representarem sobre la recta i a la dreta del natural *zero*. Tots els elements disten la distància unitat de l'anterior.



- Nombres enters.

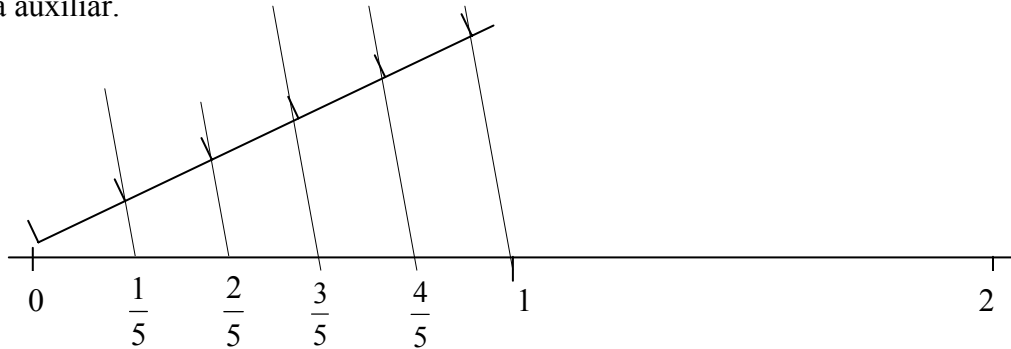
Els representarem sobre la recta i els situarem tant a la dreta com a l'esquerra de l'enter zero. Tots els elements estan separats la unitat dels que tenen just al costat.



¹ Veure llibre. Pàgina 24.

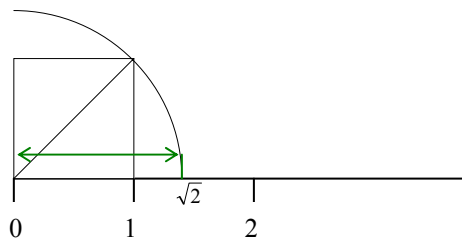
- Nombres racionals fraccionaris.

Els representarem sobre la recta i els situarem tant a la dreta com a l'esquerra del racional zero. Amb l'ajuda d'una recta auxiliar que talla la recta real en un dels nombres enters a i marcant sobre ella un nombre de segments igual al denominador de la fracció a representar, unirem l'extrem de l'últim segment amb l'enter una unitat superior $a+1$. A partir d'aquí traçarem rectes paral·leles a la primera i que passin per les divisions de la recta auxiliar.



- Nombres irracionals.

Els representarem sobre la recta real amb l'ajut de quadrats ($u \times u$) o rectangles ($u \times 2u$, $2u \times 3u$, $u \times 3u$,...). Les diagonals d'aquests rectangles tindran longituds irracionals i amb l'ajut d'un compàs, marcarem el nombre irracional buscat sobre la recta real.

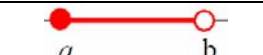


Intervals, semirectes i entorns.

Podem construir subconjunts del conjunt $\mathbf{R}$ prenent qualsevol agrupació de nombres reals. Però una forma senzilla d'ordenar i de visionar aquests subconjunts els dibuixant-los sobre la recta real. Els podem classificar en *intervals*, *semirectes* i *entorns*.

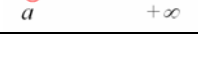
INTERVALS

Un interval és un subconjunt de $\mathbf{R}$ que està acotat per dos valors a i $b \in \mathbf{R}$ amb $a < b$ anomenats extrems de l'interval. Hi ha quatre tipus d'intervals diferents que es representen com:

	Interval tancat	$[a, b]$	$A = \{x \in \mathbf{R} / a \leq x \leq b\}$
	Interval obert	(a, b)	$A = \{x \in \mathbf{R} / a < x < b\}$
	Interval obert per la dreta	$[a, b)$	$A = \{x \in \mathbf{R} / a \leq x < b\}$
	Interval obert per l'esquerra	$(a, b]$	$A = \{x \in \mathbf{R} / a < x \leq b\}$

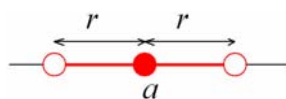
SEMIRECTES

Si un dels extrems de l'interval tendeix a infinit, aleshores parlem de semirectes. Hi ha quatre tipus de semirectes.

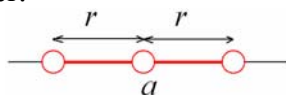
	Semirecta oberta per la dreta	$(-\infty, b)$	$A = \{x \in \mathbf{R} / x < b\}$
	Semirecta tancada per la dreta	$(-\infty, b]$	$A = \{x \in \mathbf{R} / x \leq b\}$
	Semirecta tancada per l'esquerra	$[a, +\infty)$	$A = \{x \in \mathbf{R} / a \leq x\}$
	Semirecta oberta per l'esquerra	$(a, +\infty)$	$A = \{x \in \mathbf{R} / a < x\}$

ENTORN OBERT DEL PUNT a I RADI r .

Són el conjunt de nombres reals que pertanyen a l'interval obert $(a-r, a+r)$, amb $r > 0$ i es designa per $E(a, r)$.



També podem definir l'entorn reduït, és a dir $E^*(a, r) = (a - r, a + r) - \{a\}$. Gràficament es representen per:

**Valor absolut d'un nombre real.**

Sigui x un nombre real ($x \in \mathbf{R}$). Definim el valor absolut de x , $|x|$ com:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

EXEMPLE.

Resoleu les equacions amb valors absoluts i representeu la solució gràficament:

- $|x| < 3$.
- $|x+1| < 2$
- $|3x-2| \geq 2$

PROBLEMES.

Pg. 36	2, 5, 6, 9 13 (veure llibre pg 26.) 15 només a) i b) 18
Pg. 37	20, 21, 22 25(veure llibre pg 26.)
Pg. 38	38