

TEMA 3.

FUNCIONS DEFINIDES PER TAULES.

SUCCESSIONS.

3.1. Introducció

Una successió és una funció que assigna els elements del conjunt dels nombres naturals (**N**) amb elements del conjunt dels nombres reals (**R**) a través d'una relació matemàtica o funció a la que anomenarem terme general. Podem expressar la successió com $\{a_n\}$ o com

$$f : N \rightarrow R$$

$$n \rightarrow a_n$$

a_n s'anomena element n-èssim de la successió. El terme general s'expressa com una equació matemàtica en funció de n que indica el terme de la successió.

No sempre les successions s'expressen a partir d'un terme general sinó que per conèixer qualsevol terme de la successió ens cal saber el valor dels termes anteriors. En aquest cas diem que la successió és recurrent i que presenta un terme general recurrent. Vegem-ne uns exemples.

$$a_n = 2n - 1$$

$$b_n = \begin{cases} b_1 = 5 \\ b_2 = 6 \\ b_{n-2} + b_{n-1} \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

La primera successió ens permet conèixer qualsevol element d'ella. Només cal substituir el valor de n desitjat i calcular-ne l'element de la successió. Per exemple $a_5 = 9$. En canvi la segona successió cal conèixer prèviament els dos termes del que busquem $b_3 = b_2 + b_1 = 5 + 6 = 11$.

Una de les successions amb terme recurrent més conegudes és la *successió de Fibonacci* que té com a terme recurrent

$$c_n = \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_{n-2} + c_{n-1} \quad \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Els seus deu primers termes són: $c_n = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}$

3.2. Determinació del terme general d'una successió.

Trobar el terme general d'una successió pot ser senzill o molt complicat, i tampoc hi ha un mètode pràctic per aconseguir aquest fi. Per mirar de trobar-ne el terme general el què procurarem és observar els primers termes de la successió i veure si podem trobar una recurrència o relació repetitiva entre els seus termes. Un cop aconseguit això mirarem de relacionar els termes i la recurrència per trobar-ne el terme general.

EXEMPLE.

Trobeu el terme general de la successió $\{x_n\}$.

$$x_n = \left\{ 3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}, \frac{15}{7}, \frac{17}{8}, \dots \right\}$$

3.3. Definicions de successió monòtona o constant, creixent i decreixent.

- *Successió monòtona o constant.*
Diem que una successió $\{a_n\}$ és monòtona o constant si la diferència entre un terme i l'anterior és zero és a dir: $a_n - a_{n-1} = 0 \quad \forall n \in N$.
- *Successió creixent.*
Diem que una successió $\{a_n\}$ és creixent si la diferència entre un terme i l'anterior és positiva és a dir: $a_n - a_{n-1} > 0 \quad \forall n \in N$.
- *Successió decreixent.*
Diem que una successió $\{a_n\}$ és decreixent si la diferència entre un terme i l'anterior és negativa és a dir: $a_n - a_{n-1} < 0 \quad \forall n \in N$.

EXEMPLE.

Determineu el comportament de la successió $\{a_n\}$ amb terme general $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$, és a dir comproveu si $\{a_n\}$ és creixent, decreixent o constant.

SOLUCIÓ

$$a_n - a_{n-1} = \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right) - \left(\frac{2(n-1)-1}{2(n-1)+1} \right) = \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right) - \left(\frac{2n-3}{2n-1} \right) = \frac{(2n-1)^2 - ((2n+1) \cdot (2n-3))}{4n^2 - 1}$$

$$\frac{(4n^2 - 4n + 1) - (4n^2 - 3 - 4n)}{4n^2 - 1} = \frac{4}{4n^2 - 1}$$

Observem que per a qualsevol valor de n , $4n^2 - 1 > 0$. Per tant la successió anterior és creixent.

3.4. Progressions aritmètiques i geomètriques.

És interessant estudiar aquest tipus de successions per poder-ne aplicar algunes propietats en el tema de matemàtica financera.

- *Progressions aritmètiques.*

Sigui la successió $\{a_n\}$. Diem que $\{a_n\}$ és progressió aritmètica si la resta de dos termes consecutius es manté constant, és a dir $a_n - a_{n-1} = d$. A d l'anomenarem *diferència*.

És fàcil veure que a partir de la definició s'obtenen els termes recurrent i general de la progressió.

$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d \Rightarrow a_3 = a_1 + 2 \cdot d$$

$$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d \Rightarrow a_4 = a_1 + 3 \cdot d$$

...

per a a_n ens quedaran els termes recurrent i general respectivament.

$$a_n = a_{n-1} + d \text{ i } a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

- *Suma dels N primers termes d'una progressió aritmètica.*

Considereu una progressió aritmètica amb terme general $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Considereu els N primers termes de la progressió i ara els sumeu, anomenant S_N a aquesta suma.

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N$$

$$S_N = a_N + a_{N-1} + \dots + a_2 + a_1$$

Si sumem les dues expressions ens quedarà:

$$2 \cdot S_N = (a_N + a_1) + (a_2 + a_{N-1}) + \dots + (a_{N-1} + a_2) + (a_N + a_1)$$

però $a_1 + a_N = \dots = a_2 + a_{N-1}$ per tant:

$$2 \cdot S_N = N \cdot (a_N + a_1)$$

i per tant:

$$S_N = N \cdot \frac{(a_N + a_1)}{2}$$

- *Progressions geomètriques.*

Sigui la successió $\{a_n\}$. Diem que $\{a_n\}$ és progressió geomètrica si el quocient entre dos termes consecutius es manté constant, és a dir $a_n / a_{n-1} = r$. A r l'anomenarem *raó*.

És fàcil veure que a partir de la definició s'obtenen els termes recurrent i general de la progressió.

$$\frac{a_2}{a_1} = r \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot r$$

$$\frac{a_3}{a_2} = r \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot r \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot r^2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = r \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot r \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^3 \dots$$

per a a_n ens quedaran els termes recurrent i general respectivament.

$$a_n = a_{n-1} \cdot r \text{ i } a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

- *Suma dels N primers termes d'una progressió geomètrica.*

Considereu una progressió geomètrica amb terme general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. Considereu els N primers termes de la progressió i ara els sumeu, anomenant S_N a aquesta suma.

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N$$

$$r \cdot S_N = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + \dots + a_{N-1} \cdot r + a_N \cdot r$$

Si restem les dues igualtats ens quedarà:

$$S_N - r \cdot S_N = a_1 - a_{N+1}$$

però $a_{N+1} = a_1 \cdot r^N$ i per tant:

$$S_N - r \cdot S_N = a_1 - a_1 \cdot r^N \Rightarrow (1-r)S_N = a_1(1-r^N)$$

ens queda:

$$S_N = \frac{a_1(1-r^N)}{1-r} \quad (1)$$

- Suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica amb raó $|r| < 1$.

Quan la raó compleix que $|r| < 1$, ens queda que $\lim_{N \rightarrow \infty} r^N = 0$ i aleshores l'expressió (1) se simplifica quedant:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

EXEMPLE.

Calculeu la suma dels 200 primers nombres senars.

EXEMPLE.

Calculeu la suma de les 10 primeres potències de $\frac{1}{2}$, és a dir $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{512}\right)$.

EXEMPLE.

Calculeu la suma de les infinites potències de $\frac{1}{2}$, és a dir $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)$.

3.5. Límits d'una successió.

El què estudiarem ara és com es comporta la successió per a termes que s'allunyen molt dels primers, és a dir quan n tendeix a infinit ($n \rightarrow +\infty$).

EXEMPLE

Siguin les successions $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, $b_n = \frac{2n+1}{n}$ i $c_n = 2n$. Els termes d'aquestes successions evolucionen de forma diferent en anar augmentant el valor de n . Vegem-ho:

	1	2	3	4	5	...	∞
$a_n = \frac{n}{n^2+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{26}$	...	0
$b_n = \frac{2n+1}{n}$	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{5}$	...	2
$c_n = 2n$	2	4	6	8	10	...	$+\infty$

3.5.1. Successió divergent i successió convergent.

- *Successió convergent.*

Diem que una successió $\{x_n\}$ és convergent quan en tendir n cap a infinit ($n \rightarrow +\infty$), la successió $\{x_n\}$ tendeix cap a un nombre real k ($\{x_n\} \rightarrow k$). En aquest cas direm que k és el límit de la successió i ho expressarem de la següent forma.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = k \quad \text{ó} \quad \text{Si } n \rightarrow +\infty \Rightarrow \{x_n\} \rightarrow k$$

Si ens fixem en l'exemple anterior veiem que les successions a_n i b_n són convergents ja que tendeixen a 0 i 2 respectivament i per tant podem escriure:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= 2 \end{aligned}$$

- *Successió divergent.*

Diem que una successió $\{x_n\}$ és divergent quan en tendir n cap a infinit ($n \rightarrow +\infty$) la successió $\{x_n\}$ tendeix cap a un nombre real tant gran que no es pot expressar com un número. Per expressar aquest concepte escriurem ∞ ($\{x_n\} \rightarrow \pm\infty$). En aquest cas direm que $\pm\infty$ és el límit de la successió i ho expressarem de la següent forma.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty \quad \text{ó} \quad \text{Si } n \rightarrow +\infty \Rightarrow \{x_n\} \rightarrow \infty$$

Si ens fixem en l'exemple anterior veiem que la successió c_n és divergent per què tendeixen a $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$$

3.5.2. Càlcul del límit d'una successió. Resolució d'indeterminacions.

Per calcular cap a on tendeix una successió haurem de tenir presents algunes regles senzilles alhora de calcular límits els límits d'una successió.

Regla 1.

Es poden construir successions a partir d'altres successions ja sigui sumant restant multiplicant o dividint els respectius elements o termes generals, per exemple:

	1	2	3	4	5	...	∞
$a_n = \frac{n}{n^2+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{26}$	...	0
$b_n = \frac{2n+1}{n}$	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{5}$	...	2

$$A_n = a_n + b_n$$

$$B_n = (a_n \cdot b_n)$$

	1	2	3	4	5	...	∞
$A_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{2n+1}{n}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{29}{10}$	$\frac{79}{30}$	$\frac{169}{68}$	$\frac{311}{130}$	...	2
$B_n = \left(\frac{n}{n^2+1}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{11}{26}$	...	0

Regla 2.

Siguin dues successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ qualssevol. Aleshores la successió $S_n = a_n + b_n$ convergirà cap a:

$\{b_n\} \rightarrow$		$+\infty$	$-\infty$	b
$\{a_n\}$ $\downarrow$	$a_n + b_n$			
$+\infty$		$+\infty$	?	$+\infty$
$-\infty$		?	$-\infty$	$-\infty$
a		$+\infty$	$-\infty$	$a + b$

Regla 3.

Siguin dues successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ qualssevol. Aleshores la successió $P_n = a_n \cdot b_n$ convergirà cap a :

$\{b_n\} \rightarrow$		$+\infty$	$-\infty$	0	$b > 0$	$b < 0$
$\{a_n\}$ $\downarrow$	$a_n \cdot b_n$					
$+\infty$		$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$		$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$
0		?	?	0	0	0
$a > 0$		$+\infty$	$-\infty$	0	$a \cdot b$	$a \cdot b$
$a < 0$		$-\infty$	$+\infty$	0	$a \cdot b$	$a \cdot b$

Regla 4.

Siguin dues successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ qualssevol. Aleshores la successió $D_n = a_n \div b_n$ convergirà cap a:

$\{b_n\} \rightarrow$		$+\infty$	$-\infty$	0	$b > 0$	$b < 0$
$\{a_n\}$ $\downarrow$	$\frac{a_n}{b_n}$					
$+\infty$		?	?	$\pm\infty$ oscil·lant	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$		?	?	$\pm\infty$ oscil·lant	$-\infty$	$+\infty$
0		0	0	?	0	0
$a > 0$		0	0	$\pm\infty$ oscil·lant	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$
$a < 0$		0	0	$\pm\infty$ oscil·lant	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$

Regla 5.

Siguin dues successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ qualssevol. Aleshores la successions $Q_n = a_n^{b_n}$ convergeix cap a:

$\{b_n\} \rightarrow$		$+\infty$	$-\infty$	0	$b > 0$	$b < 0$
$\{a_n\}$ $\downarrow$	$(a_n)^{b_n}$					
$+\infty$		$+\infty$	0	?	$+\infty$	0
$-\infty$		$\pm\infty$ oscil·lant	0	?	$\pm\infty$	0
0		0	$\pm\infty$ oscil·lant	?	0	$\pm\infty$ oscil·lant
1		?	?	1	1	1
$0 < a < 1$		0	$+\infty$	1	a^b	a^b
$1 < a$		$+\infty$	0	1	a^b	a^b
$-1 < a < 0$		0	$\pm\infty$ oscil·lant	1	a^b	a^b
$a < -1$		$\pm\infty$ oscil·lant	0	1	a^b	a^b

Fixeu-vos que hi ha operacions entre límits que no es podem determinar. Aquestes operacions són el què anomenem *indeterminacions*.

Indeterminat vol dir que no sabem quant val el límit, no que no es pugui calcular.

TIPUS D'INDETERMINACIONS.

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}, +\infty - \infty, 0 \cdot (\pm \infty), \frac{0}{0}, (\pm \infty)^0, 0^0, 1^{\pm \infty}$$

Resolució de les indeterminacions anteriors.

$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ Calculeu els límits següents. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 2}{n^2 + 1} \right)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 - n}{n^2 + 1} \right)$ Resolem dividint el numerador i denominador per la potència més alta.	$+\infty - \infty$ Calculeu els límits següents. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2} - n \right)$ Resolem multiplicant pel conjugat. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 2}{n + 1} - \frac{n^3 + 1}{n} \right)$ Resolem fent l'operació indicada
--	---

$\frac{0}{0} \text{ i } 0 \cdot (\pm \infty)$ Calculeu els límits següents. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n^2 + 1}{n} \right)$ Resolem fent l'operació indicada. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{n} \right)}{\left(\frac{1}{n + 4} \right)}$ Resolem fent l'operació indicada.	$1^{\pm \infty}$ Calculeu els límits següents. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n^2 + 1}{n} \right)} \right)^{n-1}$ Transformarem l'operació fins que obtinguem un límit del tipus 1.
--	---