

TEMA 5. SISTEMES D'EQUACIONS.

5.1. Sistemes d'equacions lineals.

Qualsevol expressió de la forma:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

s'anomena sistema d' m equacions lineals amb n incògnites. Els valors a_{ij} són nombres reals que multipliquen a les n incògnites $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Els coeficients b_i són els termes independents del sistema d'equacions.

5.2. Discussió d'un sistema d'equacions.

Discutir un sistema és estudiar totes les solucions que pot presentar un sistema d'equacions lineals.

Un sistema d'equacions és COMPATIBLE si aquest té solució.

- Si la solució és única en direm sistema COMPATIBLE DETERMINAT.

- Si hi ha infinites solucions en direm sistema COMPATIBLE INDETERMINAT.

Un sistema d'equacions és INCOMPATIBLE si aquest no té solució.

Diem que dos sistemes d'equacions lineals són equivalents si tenen les mateixes solucions.

5.3. Resolució de sistemes d'equacions lineals.

Resoldre un sistema d'equacions lineals vol dir determinar les seves solucions. Hi ha quatre mètodes de resolució de sistemes.

- Substitució.
- Reducció.
- Igualació.
- Mètode de Gauss.

- Substitució.

Amb aquest mètode obtindrem de forma successiva sistemes d'equacions amb un nombre d'equacions i d'incògnites reduït fins arribar a una equació amb una incògnita.

Començarem aïllant una equació i substituint el seu "valor" en la resta d'equacions. Repetirem el pas anterior en el nou sistema fins que ens quedi una equació amb una incògnita.

- Igualació.

Es recomana aplicar aquest mètode en sistemes de dues equacions lineals amb dues incògnites. Aïllarem la mateixa incògnita en les dues equacions i n'igualarem les expressions obtingudes. Ara resolrem l'equació obtinguda.

- Reducció.

Es tracta de reduir el nombre d'equacions i d'incògnites a partir de la resta de dues equacions del sistema. Prendrem dues equacions, escollirem una incògnita a eliminar i multiplicarem les equacions pels coeficients que multipliquen la incògnita escollida de l'altra equació. Ara restarem les equacions obtingudes. La incògnita escollida ha de desaparèixer. Repetirem els passos anteriors fins que ens quedi una equació amb una incògnita.

EXEMPLE.

Resoleu el següent sistema d'equacions lineal.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Substitució.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow (2 - y) - y = 0 \Rightarrow 2 - 2y = 0 \Rightarrow 2 = 2y \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2 - y \Rightarrow x = 2 - 1 \Rightarrow x = 1$$

Igualació.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ x = y \end{cases} \Rightarrow (2 - y) = y \Rightarrow 2 = 2y \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2 - y \Rightarrow x = 2 - 1 \Rightarrow x = 1$$

Reducció.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sumem les equacions} \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$D'una de les equacions aïllem la y \Rightarrow y = x \Rightarrow y = 1$$

- El mètode de Gauss.

S'acostuma a usar en sistemes amb tres o més de tres incògnites i tres o més de tres equacions. Això sí el nombre d'incògnites i d'equacions ha de ser el mateix (sistema d'equacions quadrat). Abans d'aplicar el mètode escriurem la matriu associada d'un sistema d'equacions.

Matriu associada d'un sistema d'equacions.

Sigui un sistema d'equacions quadrat.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

La matriu associada al sistema és:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

EXEMPLE.

Sigui el sistema d'equacions $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$. Escriui la matriu associada del sistema d'equacions.

La matriu associada al sistema és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right)$

Resolució aplicant el mètode de Gauss.

L'objectiu del mètode és obtenir d'una successió de sistemes d'equacions equivalents al primer, un sistema on una de les incògnites es pugui aïllar ràpidament.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Transformant la matriu} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

EXEMPLE.

Resoleu el sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$ aplicant el mètode de Gauss.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow 3a \cdot 2 - 2a \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow 1a \cdot 2 - 2a \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow 2a/3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow 2a - 3a \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \Rightarrow x + 1 - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y - z = 0 \Rightarrow y = z \Rightarrow y = 1 \\ 2z = 2 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

5.5. Sistemes d'equacions no lineals.

En un sistema d'equacions no lineals les incògnites estan elevades al quadrat o s'estan multiplicant.

$$\begin{cases} x \cdot y = 2x + y \\ x - y = \frac{x}{y-1} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x - y^3 = 2xy \end{cases}$$

Per resoldre'ls aplicarem en general el mètode de substitució.

EXEMPLE.

Resol el següent sistema d'equacions no lineals:

$$\begin{cases} x \cdot y = 2x + y \\ x - y = \frac{x}{y-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y - 2x = y \\ x - y = \frac{x}{y-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot (y-2) = y \\ x - y = \frac{x}{y-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{y-2} \\ x - y = \frac{x}{y-1} \Rightarrow \frac{y}{y-2} - y = \frac{\frac{y}{y-2}}{y-1} \end{cases}$$

$$\frac{y}{y-2} - y = \frac{y}{(y-2)(y-1)} \Rightarrow \frac{y}{y-2} - \frac{y \cdot (y-2)}{y-2} = \frac{y}{(y-2)(y-1)} \Rightarrow y - y \cdot (y-2) = \frac{y}{y-1}$$

$$y \cdot (y-1) - y \cdot (y-2) \cdot (y-1) = y \Rightarrow y \cdot [y-1 - (y-1) \cdot (y-2)] - y = 0 \Rightarrow$$

$$y \cdot [y-1 - (y-1) \cdot (y-2) - 1] = 0 \Rightarrow y \cdot [y^2 - 4y + 4] = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y = 2 &\Rightarrow x = +\infty \\ y = 0 &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$