

COMBINATÒRIA:

Tècniques per comptar

Introducció

En una taula recta s'asseuen 11 persones. De quantes formes diferents poden seure els comensals?

De **39.916.800** formes diferents.

Aquest és un exemple del què estudiarem en aquest tema. Aquest tipus de problemes poden ser molt complicats de resoldre sense l'ús de la combinatòria però amb ella és senzill trobar la resposta.

Per Roger Mauricio Grañó

Operacions per a comptar

Distingim:

- Variacions sense repetició.
- Variacions amb repetició
- Permutacions sense repetició
- Permutacions amb repetició
- Combinacions sense repetició.

Per Roger Mauricio Grañó

Definicions prèvies.

- **Factorial d'un nombre natural:** És el producte del nombre natural per tots els nombres anteriors fins arribar a 1. S'expressa com **$n!$** .

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

-**0!** : Per definició és 1. $0! \equiv 1$

-**Nombre combinatori:** És l'operació definida entre dos nombres naturals m i n ($m \geq n$), definida com:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

-De la fórmula anterior es dedueix:

$$1. \binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = 1$$

$$2. \binom{m}{m} = \frac{m!}{m! \cdot (m-m)!} = 1$$

$$3. \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot (m-(m-n))!} = \binom{m}{m-n}$$

Per Roger Mauricio Grañó

$$4. \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} = \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!} = \frac{(m-n+1) \cdot m! + m! \cdot n}{n!(m-n+1)!} = \frac{m! \cdot ((m-n+1) + n)}{n!(m-n+1)!} = \frac{m! \cdot (m+1)}{n!(m-n+1)!} = \frac{(m+1)!}{n!(m+1-n)!} = \binom{m+1}{n}$$

$$5. \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m-2} + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} = 2^m$$

Demostració pel mètode d'inducció matemàtica.

$$\text{Si } m = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^0 \binom{0}{i} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0 \text{ CERT}$$

$$\text{Si } m = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1 \text{ CERT}$$

$$\text{Si suposem que } \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} = 2^{m-1} \text{ és cert, aleshores :}$$

Per Roger Mauricio Grañó

EXEMPLE

Quants nombre de tres xifres diferents es poden fer amb els nombres 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

$$V_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Per Roger Mauricio Grañó

Variacions sense repetició

Les variacions sense repetició de m elements agafats de n en n ($n \leq m$) són el nombre d'agrupacions que es poden fer de n elements on dos grups són diferents si:

- Tenen elements diferents (cap repetit)
- Importa l'ordre dels elements de cada agrupació.

Les variacions sense repetició es calculen amb la fórmula: $V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$
p.e. {1,2,3,4,5}

Agrupacions de tres elements.

{1,2,3} — Grup no vàlid. No es poden repetir els elements dins d'una agrupació

{2,3,4} —
~~{5,4,5}~~ —
{1,3,4} —
.
.
.
{2,1,3} — Aquestes dues agrupacions estan formades pels mateixos elements però es consideren agrupacions diferents. IMPORTA L'ORDRE

Variacions amb repetició

Les variacions amb repetició de m elements agafats de n en n ($n \leq m$) són el nombre d'agrupacions que es poden fer de n elements on dos grups són diferents si:

- Tenen elements iguals o diferents
- Importa l'ordre dels elements de cada agrupació.

Les variacions amb repetició es calculen amb la fórmula: $VR_m^n = m^n$
p.e. {1,2,3,4,5}

Agrupacions de tres elements.

{1,2,3} — Grup vàlid. Es poden repetir els elements dins d'una agrupació

{1,1,2} —
{2,3,4} —
{5,3,5} —
{1,3,4} —
.
.
.
{2,1,3} — Aquestes dues agrupacions estan formades pels mateixos elements però es consideren agrupacions diferents. IMPORTA L'ORDRE

EXEMPLE

Quants nombre de tres xifres es poden fer amb els nombres 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

$$VR_9^3 = 9^3 = 729$$

Per Roger Mauricio Grañó

Permutacions circulars

La diferència entre les permutacions sense repetició i les permutacions circulars és que **manca un element de referència**. Això fa que de n elements a permutar, en fixar-ne un com a referència, el nombre d'elements a permutar és $n - 1$.

$$PC_m = P_{m-1} = (m-1)!$$

EXEMPLE

En una taula circular s'asseuen 11 persones. De quantes formes diferents poden seure els comensals?

$$PC_{11} = P_{10} = 3.628.800$$

Per Roger Mauricio Grañó

Permutacions sense repetició

Són un cas particular de les variacions sense repetició, concretament quan $m = n$.

$$P_m = V_m^m = \frac{m!}{(m-m)!} = m!$$

EXEMPLE

En una taula recta s'asseuen 11 persones. De quantes formes diferents poden seure els comensals?

$$P_{11} = V_{11}^{11} = \frac{11!}{0!} = 11! = 39.916.800$$

Per Roger Mauricio Grañó

Permutacions amb repetició

Tenim n elements on el 1r element es repeteix a vegades, el 2n element es repeteix b vegades i el m -èsim k vegades. Si la suma de totes les repeticions és m ($a + b + \dots + k = m$), aleshores:

$$P_m^{a,b,\dots,k} = \frac{m!}{a! \cdot b! \cdot \dots \cdot k!}$$

EXEMPLE

Amb els nombres de la taula adjunta, quants nombres de 7 xifres es poden formar?

{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3}

$$P_7^{2,3,2} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{5040}{2 \cdot 6 \cdot 2} = 210$$

Per Roger Mauricio Grañó

Combinacions sense repetició

Les combinacions de m elements agafats de n en n ($n \leq m$) són el nombre d'agrupacions que es poden fer de n elements on dos grups són diferents si tenen elements diferents (cap es pot repetir).

Les combinacions sense repetició es calculen amb el nombre combinatori:

$$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

p.e. {1,2,3,4,5}

Agrupacions de tres elements.

{1,2,3}
~~{1,1,2}~~
{2,3,4}
~~{5,3,5}~~
{1,3,4}
..
{2,1,3}

Grups NO vàlid. No es poden repetir els elements dins d'una agrupació

Aquestes agrupacions estan formades pels mateixos elements però es consideren agrupacions iguals.
NO IMPORTA L'ORDRE

{1,2,3} = {3,1,2} = {2,3,1} =
{2,1,3} = {3,2,1} = {1,3,2}

MATEMÀTIQUES 1rA

EXERCICIS DEL LLIBRE:

PG. 204. 9, 10, 14, 15, 16

PG. 205. 27, 30, 31, 33, 34

PG. 206. 53, 58

MATEMÀTIQUES 1rB

EXERCICIS DEL LLIBRE:

PG. 252. 9, 10, 14, 15, 16

PG. 253. 27, 30, 31, 33, 34

PG. 254. 53, 58