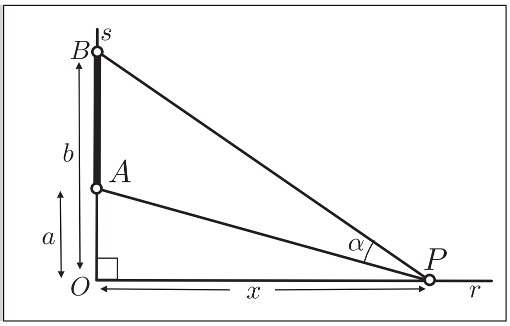
# Problema del cinema

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
INS Pons d'Icart

Presentem un clàssic entre els problemes d'optimització. Adopta formulacions diverses: visualització òptima des de la banda d'una pantalla de cinema o de la porteria d'un camp de futbol o, des del terra, d'una estatua sobre un pedestal, etc. Proposem dos tipus de resolució: una amb llenguatge trigonomètric-algèbric, sense recórrer al càlcul de derivades, i una altra amb llenguatge estrictament geomètric. Finalment, s'estudia la generació d'una corba cònica quan varia un dels paràmetres.

**PROJECTE**

En la figura observeu dues semirectes $r$ i $s$, d'origen $O$, perpendiculars. Sobre $s$ considerem dos punts $A$ i $B$ de posició donada. Anomeneu $a$ i $b$ les distàncies $OA$ i $OB$.
Sobre $r$ considerem el punt variable $P$. Es tracta de determinar i construir la posició d'aquest punt $P$ per la qual l'angle $\alpha = \angle APB$ és màxim.



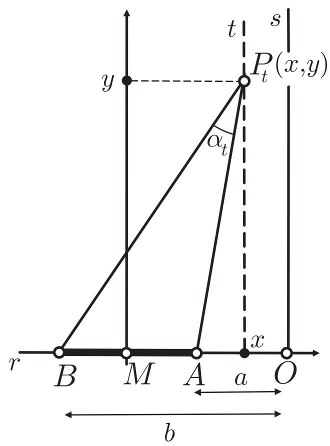

- **Etapes del treball a lliurar sobre paper**

**1)** Feu un tractament trigonomètric del problema, consistent a trobar l'expressió del valor de la tangent trigonomètrica d'$\alpha$ en funció de $x = OP$ i, mitjançant l'ús raonat de l'àlgebra, el valor de $x$ que satisfà la condició de l'enunciat.

**2)** Feu un tractament geomètric del mateix problema sense recórrer al llenguatge de funcions ni a l'ús de l'àlgebra. Recordeu que cal justificar que el problema es pot resoldre amb l'estudi d'una circumferència que passa per $A$ i $B$. Finalment, haureu d'obtenir una relació entre $OA$, $OB$ i $OX$ equivalent al resultat de la primera etapa.

**3)** Construïu raonadament amb regle i compàs la solució del problema. Recordeu que els teoremes del catet, de l'altura o de Pitàgores són eines adequades.

**4)** Considereu el mateix problema plantejat per a cadascuna de les rectes $t$ paral·leles a $s$. En resulten una col·lecció (lloc geomètric) de punts $P_t$ tals que l'angle $\alpha_t$ és màxim. Es tracta de trobar quina és la corba que genera $P_t$.
Indicació: Considereu el sistema de referència d'origen el punt mitjà $M$ d'$AB$, eix d'abscisses la recta $r$ i eix d'ordenades la mediatriu d'$AB$. Trobeu l'equació que lliga les coordenades $x$ i $y$ de $P_t$ quan varia $t$.




- **Etapes del treball a lliurar per via telemàtica**

**5)** Trameteu dos documents GEOGEBRA amb les construccions següents:

(a) VM1_*cognomalumne*.ggb: Construcció de l'apartat 3 en què es visualitzi que l'angle obtingut és màxim.

(b) VM2_*cognomalumne*.ggb: Construcció del lloc geomètric de l'apartat 4 i de les bisectrius dels eixos de referència considerats en el mateix apartat. Comenteu quina seria la vostra tria aproximada d'una localitat d'una sala de cinema, des de la qual l'angle de visió de l'extensió horitzontal de la pantalla fos màxim, entre totes les localitats que es troben en la seva perpendicular $t$ a la pantalla.

- **Una mica d'història i referències**

La primera notícia que tenim del problema es que fou posat per Johannes Müller [1436–1476] de Könisberg, —conegut com a Regiomontanus traducció llatina de Könisberg (muntanya reial)—, en una carta dirigida a Christian Roder l'any 1471:

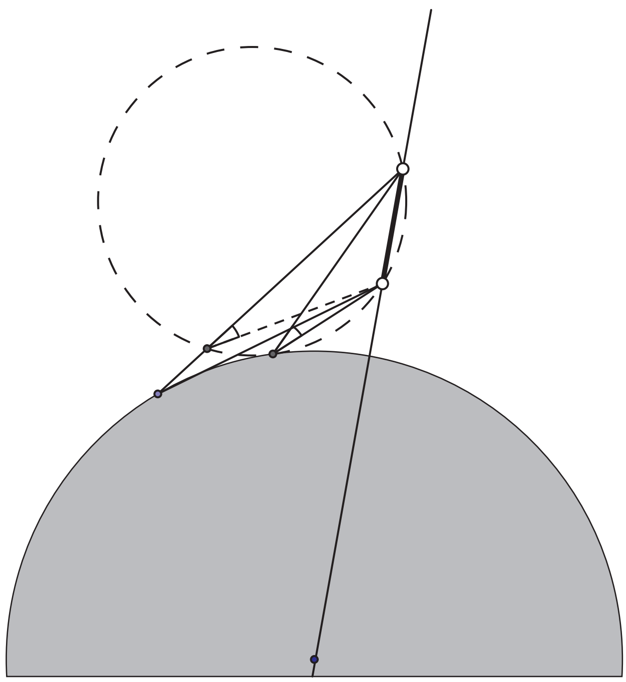
> Des quin punt situat al terra es veu amb grandària més gran possible, una vareta penjada verticalment.

En el camp de les matemàtiques el seu treball més important fou *De Triangulis Omnimodis*. Aquest, tot i no ser una creació original seva —copia Jabir ibn Afla [s. XII]—, compilà tots els coneixements de trigonometria d'una manera força assequible i es convertí en un text estàndard sobre la matèria. El seu prestigi com a astrònom i matemàtic va fer que l'any 1475 el Papa Sixt IV el cridés a Roma per a la reforma del calendari julià, empresa que no va poder dur a terme perquè morí poc després.[1]

---

Una versió del problema del cinema en què el terra es corb es plantejada per Hermann Karl E. Martus en la seva obra escrita en alemany *Maxima und minima*, editor Adolph Enslin, Berlin, 1861. Diu més o menys així:

> Per a quina latitud, els anells de Saturn es visualitzen sota un angle màxim. (S'entén que quan es parla de la latitud a Saturn, es pren com a pla equatorial el que conté els anells.)



---

Finalment citem algunes obres en què es poden trobar desenvolupaments i informació de les dues versions comentades del problema:


DÖRRIE, H. [1965]. *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution*, 369-371. Dover. New York.

LIDSKI, V.B. i altres [1978]. *Problemas de matemàticas elementales*, 271-272 i 65-66. Editorial MIR. Moscú.

MAOR, E. [1998]. *Trigonometric Delights*, 41-49. Princeton University Press. Princeton, New Jersey. http://press.princeton.edu/books/maor/

NAHIN, P.J. [2004]. *When Least is Best*, 71-79. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

PETKOVIC, M.S. [2009]. *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, 86-91. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.


---

[1] Vegeu Suzuki, J. [2002] *A History of Mathematics*, 302-304. Prentice Hall. Upper Saddle River, New Jersey.