

Estudis i activitats
sobre problemes clau de la
Història de la Matemàtica

Ramon Nolla



Estudis i activitats
sobre problemes clau de la
Història de la Matemàtica

Ramon Nolla

© Ramon Nolla i Sans, 2005

Editat i reproduït per la Societat Catalana de Matemàtiques

(filial de l'Institut d'Estudis Catalans)

Carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona.

Primera edició: juliol de 2006.

La realització d'aquest llibre i el CD-ROM annex ha estat possible gràcies a una llicència per estudis concedida pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (DOGC núm.:3163 de 19.6.2000)

Portada: *El vol de Desargues*, Ramon Nolla

Disseny i elaboració de les imatges del llibre: Ramon Nolla

A la Marta, la Rebeca i la Rosa.

A tots els que estem en procés d'aprenentatge.

Si tinguéis el do de profecia, i entengués tots els misteris i tota ciència; i tinguéis una fe de moure muntanyes: si no tinc caritat, no sóc pas res.

*Sant Pau, primera epístola
als de Corint, 13.*

Prefaci

Els conceptes i les idees matemàtiques que es tracten en els currículums de Secundària Obligatoria i Batxillerat, són presentats als alumnes, més sovint del que seria desitjable, d'una forma tancada i acabada. S'oblida que han sorgit després d'un llarg procés de gestació, en el que han aparegut plegades les intuïcions més fecundes amb d'altres d'estèrils, les quals han configurat les seves presentacions successives. Al llarg de la Història, aquestes idees han estat generades per diversos tipus de problemes, de caire pràctic o teòric, pertanyents a la pròpia matemàtica o a d'altres disciplines. El coneixement d'aquests problemes, i l'estudi de l'evolució del seu tractament i dels nous problemes que han generat, proporciona els fonaments per a la comprensió de les idees i conceptes que n'han resultat. La reflexió al voltant d'aquest fet, i les característiques del binomi ensenyament/aprenentatge, ha portat a molts professionals de les matemàtiques i de la seva docència, a assumir amb més o menys matisos que:

La immersió en el fer matemàtic i el seu aprenentatge reproduceix, a grans trets, en una sèrie resumida, totes les etapes del desenvolupament general d'aquest fer al llarg de la Història.

Això ha conduït, en les últimes dècades, a la consideració d'una inversió en la metodologia usada pel professorat en la seva tasca. El mètode resultant d'aquesta inversió, el qual rep la denominació de *mètode genètic*, pot ser caracteritzat per:

- La rellevància de l'estudi dels problemes clau de la Història de la Matemàtica que han provocat l'aparició i el desenvolupament de les idees matemàtiques. Aquest estudi comporta el descobriment de la il·lació entre els orígens d'aquestes idees i la seva evolució posterior. Això és essencial de cara a la comprensió de les intuïcions inicials i de les idees que en sorgeixen, les quals queden amagades en els estadis finals de la seva evolució, sota una presentació força més rigorosa i formalitzada.
- La comprensió de les dificultats de l'alumne, a partir de les dificultats aparegudes al llarg de la Història en aquest procés evolutiu.

- L’elaboració d’una guia de treball, des del marc de reflexió originat en els dos primers apartats. Aquesta hauria de permetre a l’alumne, l’adquisició dels conceptes i idees, mitjançant la recreació simplificada de les diferents etapes d’evolució d’un problema inicial, en un procés de recerca personal.¹

Aquestes característiques ens aboquen al tema objecte d’aquesta obra:

L’estudi dels tractaments inicials d’una col·lecció de problemes i qüestions implicades en les idees i conceptes matemàtics que són tractats a les aules de Secundària Obligatòria i Batxillerat, i del camp més extens que ha de conèixer el professorat per tenir-ne una perspectiva prou àmplia.

Amb els estudis realitzats i les activitats desenvolupades es pretén fer una aportació que faciliti l’accés del professorat a materials que tractin l’evolució de les idees matemàtiques en el domini de la Geometria i la Trigonometria, i en algunes qüestions de l’Aritmètica. D’aquesta manera s’afavoreix la realització d’experiències a l’aula en què s’adopti el mètode genètic, i que es pugui valorar la conveniència d’integrar aquesta metodologia, amb d’altres metodologies innovadores, en el procés d’ensenyament/aprenentatge. Des d’aquesta posició s’ha cregut convenient la inclusió d’activitats que admetessin un tractament amb eines informàtiques que explicarem una mica més avall.

Per ampliar el marc de reflexió sobre l’interès d’aquest enfoc, en què s’atorga un paper protagonista a l’observació i estudi de la gestació de les idees, presento una mostra dels escrits d’alguns professionals que han meditat sobre el tema:

David Hilbert (1899) Tot i que les bases del mètode genètic es troben implícites o enunciatades en treballs més antics,² la primera vegada que hem trobat el terme “genètic” per designar-lo és a Hilbert, en l’apèndix 6 de HILBERT [1899], 244 de l’edició de 1991. Allí explica que en l’Aritmètica, el nombre real s’introdueix a partir de successives ampliacions —provocades per exigències de generalització en la pràctica de les operacions—, del concepte de nombres més senzills. Anomena explícitament *mètode genètic* aquesta manera de procedir. El contraposa al *mètode axiomàtic*, el qual presenta en el terreny de la Geometria; finalment expressa la seva opinió sobre la conveniència de cadascun d’ells i, concretament, la del primer en el camp de la

¹Aquestes característiques concreten el significat del terme *genètic* en el sentit de generació o gestació de les idees.

²Transcrivim una cita de Phillip. S. Jones, —vegeu «The role in the History of Mathematics of Algorithms and Analogies», OC.LFM [1995], 13—, en què atribueix a Pedro Núñez [1502-1578] —matemàtic portuguès conegut per *Nonnius* i que va idear el “nònius”, instrument de mesura de precisió—, les paraules següents: «Oh que bé hagués estat, si aquells autors que han escrit matemàtiques ens haguessin lliurat les seves invencions ... de la mateixa manera i amb el mateix discurs tal com les van descobrir.»

pedagogia: «Malgrat el gran valor pedagògic i heurístic del mètode genètic, mereix la preferència el mètode axiomàtic per a la presentació definitiva del nostre coneixement i la seva plena seguretat lògica».

Henri Poincaré (1908) En el capítol II de POINCARÉ, [1908], 99 de l'edició de 1963, en què tracta sobre les definicions matemàtiques i l'ensenyament, afirma: «Els zoòlegs pretenen que el desenvolupament embrionari d'un animal resumeix en un temps molt curt tota la història dels seus avantpassats des dels temps geològics. Sembla que passa el mateix amb el desenvolupament dels esperits. L'educador ha de fer passar el nen per on han passat els seus pares; més ràpidament però sense saltar-se cap etapa. D'aquesta manera, la història de la ciència ha de ser la nostra guia primera.»

Felix Klein (1908) (Extret de KLINE [1973], 49 de l'edició de 1984). Referint-se al mètode genètic, a la seva obra KLEIN [1908] diu: «Un obstacle essencial per a una difusió d'aquest mètode, natural i veritablement científic, és la falta de coneixements històrics que sovint es fa notar. Per combatre això, he intentat que el text inclogui notes històriques. En fer-ho confio haver posat de relleu amb quina lentitud s'han produït totes les idees matemàtiques; com, quasi sempre, han aparegut primer en esbós i només han cristal·litzat després de llarg temps en la forma definitiva que resulta familiar en l'exposició sistemàtica.»

George Pólya (1962) En el seu escrit PÓLYA [1962], aquest autor es fa la pregunta següent: «fins a quin punt i de quina manera el currículum de les matemàtiques a l'ensenyament secundari és paral·lel a l'evolució històrica de les Matemàtiques?». Tot seguit concreta la seva pregunta en el paper de les demostracions. Arriba a la conclusió que, en establir el currículum, s'hauria de fer un estudi sobre els diferents nivells de demostració i que per això caldria «una combinació ben equilibrada d'almenys tres elements:

- 1) Una experiència autèntica de les recerques matemàtiques.
- 2) L'observació amigable de persones com nosaltres mateixos i de nois d'edats diverses a les classes on pugnen per comprendre les proposicions matemàtiques.
- 3) El coneixement d'almenys certes fases de la història de les Matemàtiques, suficient per fer-nos reconèixer el nivell de la demostració tractada i informar-nos sobre ella.

Seria d'altra banda útil, poder considerar els diversos nivells de demostració com les etapes successives d'una sèrie evolutiva.»

Harold M. Edwards (1977) En el prefaci d'EDWARDS [1977] proporciona una definició del mètode genètic com «l'explicació o avaluació d'una cosa o esdeveniment en termes del seu origen i desenvolupament». Recoltzant-se en Otto

Toeplitz, —vegeu el prefaci de TOEPLITZ [1949]—, afirma que «l'essència del mètode genètic consisteix en observar els orígens històrics d'una idea per tal de trobar la millor manera de motivar-la, i estudiar el context en el qual l'introduïdor de la idea treballava per tal de trobar la qüestió essencial que ell s'esforçava a resoldre». Finalment, després de defensar la importància de les preguntes davant les respostes, arriba a dir: «He trobat que la millor manera de superar la dificultat d'aprenentatge d'una teoria matemàtica abstracta és seguir el consell de Toeplitz i ignorar els tractats moderns fins que hagi estudiat la gènesi de cara a conèixer les preguntes».

Joan Girbau (1984) En la conferència GIRBAU [1984], parlant de la nostra formació matemàtica afirmava —resumeixo—: «Primer apreníem a resoldre problemes de caràcter pràctic sense pretendre cap mena de rigor en la introducció dels conceptes i propietats necessàries per resoldre'ls, i això corresponia al període egipci i babilònic; més endavant, a partir dels criteris de congruència i semblança de triangles, anàvem bastint l'edifici geomètric tot demostrant teoremes cada cop més complicats, i això corresponia a l'època dels *Elements* d'Euclides; una mica més grans, ens adonàvem de la falta de rigor de molts dels conceptes i demostracions fetes, representant això una situació paral·lela a la que van travessar els matemàtics posteriors. Més endavant se'ns començava a introduir les idees de Descartes, i descobríem com l'àlgebra podia esdevenir una eina preciosa en la resolució de problemes geomètrics. Jo sóc de l'opinió que, sempre que es pugui, s'ha de respectar, en l'ensenyament, l'ordre històric en què les idees s'han desenvolupat.».

Miguel de Guzmán (1992) A l'article GUZMÁN [1992] afirma que: «Normalment la història ens proporciona una guia magnífica per emmarcar els diferents temes, els problemes dels quals han sorgit els conceptes importants de la matèria, i fa llum per entendre la raó que ha portat l'ésser humà a ocupar-se'n amb interès. Si coneixem l'evolució de les idees de què pretenem ocupar-nos, sabrem perfectament el lloc que ocupen en relació a les diferents conseqüències, les diferents aplicacions interessants que n'han pogut sorgir, la situació recent de les teories que se n'han derivat, etc.». Més endavant, a l'apartat “Sobre el paper de la història en el procés de formació del matemàtic”, diu: «El professorat hauria de saber com han passat les coses per:

- Comprendre les dificultats de l'home genèric, de la humanitat, en l'elaboració de les idees matemàtiques, i a través d'això, les dels seus propis alumnes.
- Entendre millor la il·lació de les idees matemàtiques, dels motius i variacions de la simfonia matemàtica.
- Utilitzar aquest saber com una guia sana per a la seva pròpia pedagogia.»

Camino Cañón (1993) Toeplitz i Edwards, citats anteriorment, coincideixen en que cal no confondre aquest mètode amb fer Història de la Matemàtica. Fer Història exigiria una acurada i exhaustiva descripció i estudi de les persones, les circumstàncies, els intents infructuosos de resolució dels problemes, les conjectures fallides, etc. El mètode genètic està més d'acord amb la setena tesi de Camino Cañón, a CAÑÓN [1993], 404, —compartida en el pròleg de l'obra per l'eminent “mestre” de matemàtics, doctor Albert Dou—,³ en què diu: «La comprensió d'un problema no requereix, necessàriament, recórrer el seu procés històric, ni familiaritzar-se amb els diversos llenguatges en què va ser formulat, així com amb els diferents mètodes de demostració que aquests llenguatges portaven annexos. Però el “llenguatge més perfecte”, per si sol, pot no descobrir la complexitat del problema. Pot requerir el complement de llenguatges menys precisos, que van vehicular el seu procés de gestació».

Així, el mètode genètic fa ús de la història, escollint les maneres de fer, les conjectures, les situacions que li poden ser de profit de cara a la consecució de l'objectiu perseguit: trobar la pregunta essencial que genera les idees i seguir-ne el fil fins la presentació final més obscura i tancada. Tot això no impedeix que per motius psicològics o pedagògics, aprofiti, quan convé, els desenvolupaments estèrils, l'estudi del context i de les persones, amb la finalitat de donar noves dimensions a la comprensió de les idees estudiades.

Shmuel Avital (1995) A l'article «History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning», OC.LFM [1995], 3–12, defensa que la formació dels futurs professors de Matemàtiques ha de passar pel coneixement del desenvolupament històric de la matemàtica, per tal de contribuir al seu aprenentatge i docència. Diu textualment: «És feina nostra organitzar l'educació de manera que transmeti als nostres estudiants els atributs bàsics de les matemàtiques com a part de la cultura humana. Podem aconseguir-ho relacionant els temes que impartim amb els seus desenvolupaments històrics. Com hem vist:

- 1) El desenvolupament històric pot allisonar-nos sobre les possibles dificultats de l'aprenentatge.
- 2) Ens pot ajudar a perfeccionar la tasca docent del procés de creació en les matemàtiques.
- 3) Pot induir a la creació d'un clima de recerca i investigació i no tan sols de transmissió d'informació.

³Albert Dou és membre de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales i professor emèrit de la Universitat Autònoma de Barcelona. Sempre ha manifestat gran interès en l'estudi de l'evolució de les idees matemàtiques i dels seus fonaments. Trobem d'interès de cara a la formació dels professors de Secundària, les publicacions DOU [1967, 1970, 1986, 1992].

- 4) Ens conduirà a l'ús d'exercicis en què hi ha una recerca progressiva d'un objectiu, el qual pot ser assolit gràcies a l'acumulació de dades.
- 5) Ens ensenyarà a incloure problemes en què la resposta és "Això no és possible."
- 6) Si exposem els nostres alumnes a problemes oberts, els mostrarem que la matemàtica és un camp obert en què l'esforç per resoldre problemes pot ser una activitat emocionant.
- 7) Ens ajudarà a humanitzar les qüestions mitjançant la presentació als nostres estudiants dels aspectes afectius de l'activitat humana.»

Ernst Hairer i Gerhard Wanner (1996) Emmarquen el prefaci de la seva obra HAIRER–WANNER [1996], en tres cites. Una d'elles és de Félix Klein, qui explica que la seva presentació a l'obra KLEIN [1908] s'aparta de les presentacions clàssiques dels llibres de text, entre d'altres coses, per l'èmfasi que posa en el desenvolupament històric, advertint als futurs professors que haurien de prendre nota de les seves indicacions al respecte. Seguint el seu consell Hairer i Wanner presenten l'Anàlisi amb l'intent de restaurar l'ordre històric, i remarquen que aquest treball és fruit d'un llarg període de docència.

Marc referencial i justificació

L'elaboració d'aquesta obra ha estat emmarcada per les consideracions que hem exposat i per l'estat actual dels materials existents, relacionats amb l'estudi i comprensió de la gènesi de les idees matemàtiques. Fer una aportació per a la superació d'aquest marc, és l'objectiu dels estudis i activitats que es presenten. Esquematitzaré la situació en dos apartats referents, respectivament, al professorat i a l'alumnat:

- **Professorat**

La formació de professors de matemàtiques a l'ensenyament secundari presenta deficiències greus des dels seus primers estadis:

- Una gran part dels professors formats a les Facultats de Matemàtiques hem rebut una preparació en què ha dominat la línia de la dedicació a la recerca fonamental. Les qüestions relacionades amb la psicologia de l'aprenentatge matemàtic i la Història de les Matemàtiques, entre d'altres, han ocupat en general un lloc secundari.

- En el cas dels professors provinents de l'Ensenyament Primari, la situació es pot agreujar per l'ínfim nombre d'hores dedicat a qualsevol tipus de formació matemàtica en els seu estudis.⁴
- Tampoc es pot ser optimista de la formació rebuda per la resta de professors, provinents de les diverses Facultats de Ciències i Escoles Tècniques; en la majoria dels casos es centren en l'adquisició de mètodes i habilitats algorítmics, o bé en la memorització de teories mai relacionades amb els estudis del seu interès.

Això planteja la necessitat d'una formació continuada del professorat en què es treballin les parts deficitàries. En aquest punt, si estem d'acord en la consideració del mètode genètic, com a una eina vàlida en la pràctica del fer matemàtic, ens trobem amb una dificultat essencial: els textos originals dels moments clau de la Història de les Matemàtiques, els estudis existents i el material elaborat segons la línia genètica abunden en llengua estrangera però no en la nostra llengua.⁵ Aquests textos no sempre són fàcils d'aconseguir i, en cas de poder-ho fer, no és gens senzilla la labor d'ordenar-los, seleccionar-los, traduir-los, fer-ne una reflexió acurada i elaborar un material aprofitable per a la nostra tasca docent. Un dels motius principals d'aquesta dificultat rau en que la magnitud de l'empresa requereix, a part de la vocació, una disponibilitat temporal difícilment compatible amb la total dedicació que requereix la tasca docent i tutorial a l'ensenyament secundari. Des d'aquesta perspectiva, és d'indubtable interès l'elaboració d'un ventall ampli i compacte d'estudis i activitats del camp de les idees relacionades amb el currículum de la Secundària Obligatòria i del Batxillerat, i del camp de les idees, més ampli, sobre el que ha de treballar el professorat per tal de tenir perspectiva sobre aquest currículum. Així, amb aquesta obra, s'ha pretès facilitar l'accés a materials, en llengua catalana, que permetin apropar el professorat al fer matemàtic i docent, d'acord amb les perspectives presentades, amb un estalvi sensible de temps i esforç. D'altra banda, això estaria en la línia de contribuir a la satisfacció d'algunes de les necessitats del professorat que planteja Alan J. Bishop. Aquest autor defensa, a partir d'una anàlisi dels tipus d'activitats d'aprenentatge que necessiten els alumnes,⁶ que «el que els professors necessiten no són llibres de text [tal com són concebuts actualment] sinó:

- Idees per ensenyar diferents temes matemàtics.
- Un banc d'activitats matemàtiques.

⁴En relació a aquests dos apartats, vegeu l'informe AAVV [1999] de la reunió convocada per la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales els dies 5 i 6 de febrer de 1999.

⁵En els últims anys es percep un esforç per trencar aquesta inèrcia per part d'algunes editorials i la Societat Catalana de Matemàtiques.

⁶Vegeu BISHOP [2000].

- Materials per copiar o modificar segons l'ús específic que se'n faci.
- Recursos per a l'avaluació.
- Pàgines web, ordinadors, calculadores.
- Exemples de models curriculars d'altres escoles.»

• Alumnat

Una anàlisi des del punt de vista dels materials amb que tracten els alumnes en la seva tasca d'aprenentatge, permet d'establir les consideracions següents:

a) Materials amb suport imprès: Els manuals dels cursos regulars, la manera d'utilitzar-los, i el sistema de creences que envolta el món de l'alumne, no es caracteritzen, en general, per creure en la bondat i els avantatges que comporten la presentació o la utilització de situacions inspirades en les que van originar els nous conceptes i les noves idees que l'alumne troba en el camí de l'aprenentatge. Una bona prova ens la proporciona el fet que els nous alumnes que arriben a les nostres classes confonen l'aprenentatge de fer Matemàtiques, amb l'aprenentatge memorístic dels mètodes de resolució de problemes. És difícil fer Matemàtiques sense, primerament, haver esbrinat i entès bé quines són les preguntes i haver-se submergit en l'evolució d'aquestes i les seves respostes.

En aquest obra s'han elaborat materials que pretenen afavorir aquesta recerca i reflexió sobre les preguntes clau de cara a la comprensió dels problemes i les idees que contenen. S'ha pretès que part dels materials, en alguns casos puguin ser directament utilitzats pels alumnes, i en d'altres se'n pugui fer una adaptació per part del professorat. Finalment, també poden servir d'inspiració a la creació de nous materials amb aquesta orientació *genètica*, i d'estímul en la recerca per part del professorat. Tot això reverteix directament sobre l'alumnat, amb actuacions i propostes metodològiques que estaran més d'acord amb la línia exposada.

b) Materials amb suport electrònic: Existeix abundància de programari informàtic per a la realització de tasques relacionades amb les matemàtiques. Concretament, CABRI II per a Windows és un programa que la Generalitat ha proporcionat als centres de secundària, i DERIVE per a Windows és un programa d'un cost econòmic acceptable per a l'economia dels centres d'Ensenyament Secundari i d'un ús amable per als usuaris. La creu de la moneda es que, tot i existir aplicacions desenvolupades amb aquest programari en què es pot percebre el seu valor com a eina vehicular en la tasca d'ensenyament/aprenentatge, no són massa nombroses, i moltes vegades es mouen al voltant dels mateixos tòpics.

D'altra banda, en un context més general, el ràpid desenvolupament de les noves tecnologies, i la indiscriminada i abundant informació a la que donen accés

de manera simple i immediata, oculten les possibilitats reals de la de la seva integració en el procés d'ensenyament/aprenentatge. Cal redescobrir el valor d'aquesta eina en aquest procés, i trencar amb les concepcions ingènues basades en l'opinió que “les màquines ho solucionen tot, només cal prémer un parell de tecles”, les quals condueixen a fer-ne un ús superficial i no creatiu. Això moltes vegades reverteix en una desmotivació en l'aprenentatge del seu ús, sigui perquè es pensa que és un afer trivial o, molt al contrari, que la “màgia” que permet el “miracle” d'aquest funcionament, que es creu tan simple, és incomprendible. Així el tractament amb eines informàtiques és convenient per a que els alumnes s'enfrontin a aquestes creences i:

- 1) Abandonin els prejudicis irracionals envers aquestes eines.
- 2) Diferencien i identifiquin els diferents tipus de programes que possibiliten els tractaments numèrics, formals, de representació gràfica i dinàmica, dels problemes matemàtics.
- 3) Reflexionin sobre el paper de la informàtica com a eina que pot ser utilitzada en la tasca de captar les idees essencials de la matemàtica, gràcies al tractament que fa dels seus problemes, i de l'estalvi que proporciona en l'execució de tasques rutinàries que només requereixen l'aplicació repetida d'automatismes, els quals, un cop apresos i adquirits, no aporten res a l'augment de la comprensió.
- 4) Copsin els avantatges de fer tractaments interactius i dinàmics i siguin capaços d'incloure'ls en activitats de recerca i de resolució de problemes.

Amb la creació i desenvolupament d'activitats susceptibles de ser tractades amb el programari CABRI de geometria dinàmica, i DERIVE de càlcul numèric i formal dotat amb un senzill i eficient llenguatge de programació, s'ha pretès incidir en cadascun d'aquests aspectes.⁷

Materials que es presenten

Aquest llibre ha estat redactat i editat amb el programari associat al sistema L^AT_EX 2_ε d'edició científica. Per a la part gràfica, s'ha utilitzat el programa Corel-Draw en l'elaboració de totes les imatges que s'hi presenten. Quant al seu contingut, l'obra es compon de:

- Set capítols que presenten el desenvolupament dels estudis fets, classificats en els apartats que s'indiquen a l'índex, i la proposta de 183 activitats que

⁷Les activitats desenvolupades amb DERIVE són en nombre inferior que les tractades amb el CABRI, però força il·lustratives, degut al reduït tractament de qüestions de càlcul numèric i formal que s'ha dut a terme.

s'hi relacionen. Aquestes es presenten amb una icona que suggereix els diferents nivells a qui van dirigides:

\overline{E}_1 : Alumnes de 1r. cicle d'ESO.

\overline{E}_2 : Alumnes de 2n. cicle d'ESO.

\overline{B} : Alumnes de Batxillerat.

\overline{P} : Professorat

També s'hi troba la icona \overline{S} , la qual és un enllaç de l'edició electrònica que condueix a la resolució, en el capítol 9, de l'activitat proposada.

- Un capítol que conté transcripcions i traduccions d'una mostra de les fonts utilitzades.
- Un capítol amb indicacions i desenvolupaments de totes les activitats proposades.
- Un recull bibliogràfic amb 198 entrades.

A l'adreça http://www.iecat.net/scm/Publicacions/pubs_3.asp, es troba l'edició electrònica del llibre i una carpeta de nom **Activitats** amb set subcarpetes **Act x** , —una per a cadascun dels set primers capítols del llibre, $1 \leq x \leq 7$ —, en què hi ha els fitxers amb les versions de les activitats que han estat tractades amb el programari CABRI i DERIVE. Els fitxers CABRI tenen les extensions **FIG** i **MAC**, i els fitxers DERIVE l'extensió **MTH**; les referències a aquests fitxers es troben en el capítol 9 del llibre, el qual està dedicat a la resolució de les activitats proposades en els capítols anteriors i conté enllaços que permeten editar aquests fitxers si es té el programari instal·lat. També hi trobem les carpetes **Altres** i **Traçar** de les quals informem a l'inici del capítol 9. El nombre total de fitxers elaborats és de 200.

Ús dels materials

Tots aquests materials poden constituir una referència important en la generació de recursos didàctics per als currículums que utilitzin estratègies metodològiques basades en el mètode genètic. D'altra banda, el professorat pot fer un ús directe a les aules de les activitats proposades i desenvolupades, independentment de les estratègies metodològiques emprades. Dos exemples en poden ser, l'utilització de:

- Les representacions pas a pas fetes amb el CABRI, amb l'ajut d'interruptors, per a la presentació de teoremes com el de Pitàgores, o construccions com la del pentàgon regular i la quadratura del cercle.⁸

⁸Vegeu els fitxers **Eui47tr.FIG** del capítol 1, **Pentapto.FIG** del capítol 2 i **Quadc.FIG** del capítol 6.

- Les funcions de càlcul aproximat d'arrels numèriques, creades amb el DERIVE, per a la visualització gràfica dels algoritmes utilitzats.⁹

Una part important dels estudis fets poden ser consultats per l'alumnat de Batxillerat de manera directa. La seva utilitat consisteix en què proporciona una visió alternativa dels continguts curriculars. També, poden constituir una referència important en la proposta i elaboració de treballs de recerca centrats en el terreny del tractament dels problemes i les idees matemàtiques, i en el d'algunes direccions transversals de relació amb d'altres disciplines. L'aportació que es fa en aquest domini pot contribuir al treball interdisciplinari entre departaments interessats en una visió integradora del fet cultural, i es concreta en els punts següents:

- Història i gènesi de les idees matemàtiques, que enllaça la Matemàtica, la Filosofia i la Història. Tot el treball està immers en aquesta relació d'una manera implícita, essent els capítols 1, 3 i 6, on trobem més explícit aquest triple enllaç.
- Construccions geomètriques planes i perspectives, que enllacen la Matemàtica, el Dibuix lineal i el Disseny Artístic i Gràfic. A tots els capítols, excepte el quart, hi trobem exemples. Mereixen consideració especial els capítols 6 i 7, en els quals es pot copsar un camp immens de possibilitats de relació entre aquestes disciplines.
- En el capítol 5 i en una qüestió del capítol 4, s'han tractat algunes relacions amb l'Astronomia.

Quant al programari informàtic, a les activitats es potencia el seu ús, mitjançant les aplicacions informàtiques creades en el seu desenvolupament. Així, es pretén que quedi palesa la seva rellevància com a eina de presentació i de recerca de les qüestions més diverses.

Agraïments

Finalment, voldria expressar el meu agraïment als qui han contribuït a la gestació i elaboració d'aquest text. Al Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya que em va proporcionar el temps necessari amb la concessió d'una llicència retribuïda per a un any. Al doctor Josep Pla, professor del Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència de la Universitat de Barcelona, que va accedir a la seva supervisió d'una manera totalment desinteressada. Sense el seu suport i consell al llarg dels anys, aquest treball tindria molts més defectes que els que ara té. Al doctor Albert Dou que em va introduir als *Elements*

⁹Vegeu el fitxer `Codiarre.MTH` del capítol 2.

d'Euclides, i per qui sento una gran admiració i amistat. Als professors i amics Paco Alejandro i Carme Giró de qui vaig aprendre, ja fa alguns anys, a trobar el meu lloc en la feina de professor d'Institut. Al professor Ramon Masip amb qui he col·laborat aquests últims anys i en qui he trobat un suport professional incondicional que s'ha convertit en amistat. A tots els professors i professores de Matemàtiques dels Instituts Pons d'Icart i Martí Franquès que han sabut escoltar i discutir les qüestions que els plantejava, així com a la resta del professorat del Institut Pons d'Icart que sempre m'ha animat. Al professor i amic Josep Maria Jornet que m'ha proporcionat un ajut insubstituïble en les meves relacions amb la informàtica. A l'antic company d'estudis Albert Armenteras, a qui vaig retrobar després d'un bon grapat d'anys, en què es va encetar un nou període d'amistat i col·laboració. A tots els alumnes i ex-alumnes, font de motivació de moltes idees, i, en especial, al Jordi Tutusaus i al Dani Martínez als qui m'uneix una gran amistat. A tots els professors que van dedicar una part del seu temps a la meva formació. I molt especialment, a la Marta, la Rebeca i la Rosa, que sempre han estat allí, al meu costat, i als meus pares que van accedir amb el seu esforç, a que tingués la meva oportunitat.

RAMON NOLLA SANS
Tarragona, setembre de 2001

Índex

Prefaci	v
1 Orígens del mètode axiomàtic deductiu. El llibre I dels <i>Elements</i> d'Euclides	1
1.1 L'origen de la Geometria	1
1.1.1 L'àrea del cercle en el papir de Rhind.	3
1.1.2 El teorema <i>gougu</i>	4
1.1.3 L'arrel quadrada de 2 en els <i>Sulvasutra</i>	6
1.2 De la via del mite a la via de la raó en l'antiga Grècia	11
1.2.1 Tales	14
1.2.2 Els pitagòrics	15
1.2.3 El descobriment de les magnituds incommensurables	17
1.2.4 Plató [428–347 aC]	21
1.2.5 Aristòtil [384–322 aC]	22
1.3 Els <i>Elements</i> d'Euclides. Definicions i axiomes del llibre I.	24
1.3.1 Observacions sobre els postulats i les nocions comunes.	26
1.3.2 Mancances axiomàtiques	29
1.4 Anàlisi del postulat 5 i l'existència de paral·leles	35
1.4.1 Intents de demostració del postulat 5. Les geometries no euclidianes.	39
1.5 Congruència de triangles	43
1.6 El regle i el compàs	46
1.6.1 Els teoremes I.1 a I.3	47
1.6.2 Breu apunt sobre eines de construcció equivalents.	48
1.7 Algunes construccions del llibre I	50
1.8 Anàlisi del transport d'angles. Teorema I.23	53
1.9 Comparació i aplicació d'àrees	56

1.9.1	Comparació d'àrees. Teoremes I.33 a I.41	57
1.9.2	Aplicació d'àrees. Teoremes I.42 a I.45	61
1.10	El teorema de Pitàgores.	64
2	Els llibres II, III i IV dels <i>Elements</i>	69
2.1	Del “merkhet” egipci al gnòmon euclidià	70
2.2	La llei distributiva, la potència d'un binomi i els teoremes II.1, II.4 i II.7	74
2.3	Els nombres costat i diagonal i el teorema II.10	77
2.3.1	Nombres costat i diagonal	78
2.3.2	Relació entre II.10 i els nombres costat i diagonal	80
2.3.3	Tractament numèric de l'aproximació de $\sqrt{2}$	81
2.3.4	Generalització per al càlcul de \sqrt{A} , amb $A \in \mathbb{N}$	82
2.3.5	Optimització de les aproximacions de \sqrt{A}	85
2.4	Els teoremes II.5, II.6, II.11 i II.14	88
2.4.1	El teorema II.11	89
2.4.2	Proposta general d'anàlisi per als problemes de segon grau i els teoremes II.5, II.6 i II.14	93
2.4.3	Resolució de l'equació $x^2 + ax = b^2$, $a > 0$, $b > 0$, i II.6	96
2.4.4	Resolució de l'equació $x^2 - ax = b^2$, $a > 0$, $b > 0$	98
2.4.5	Resolució de l'equació $ax - x^2 = b^2$, $a > 0$, $b > 0$, i II.5	99
2.4.6	Resolució de l'equació $x^2 = ab$, $a > 0$, $b > 0$, i II.14	101
2.5	Més enllà del teorema de Pitàgores. Els teoremes II.12 i II.13	103
2.5.1	La demostració de Saint Vincent	103
2.5.2	El teorema de Thabit Ibn Qurra	105
2.5.3	El teorema de Thabit Ibn Qurra i el teorema II.12	106
2.6	El llibre III	107
2.6.1	Relacions entre angles inscrits i centrals. Els teoremes III.20 i III.21	110
2.6.2	Generalització de III.21 per a angles en la circumferència amb un costat tangent. Teorema III.32	113
2.6.3	Anàlisi de la construcció de l'arc capaç. Teorema III.33	113
2.6.4	Els teoremes III.35–III.37. La potència d'un punt	115
2.7	Construcció de polígons regulars. El llibre IV	118
2.7.1	El pentàgon regular. Teoremes IV.10 i IV.11	119
2.7.2	Construcció del pentàgon regular a l' <i>Almagest</i>	121

2.7.3	Un intent de construcció del pentàgon regular amb un compàs d'obertura fixa	123
2.7.4	El pentadecàgon regular	124
3	L'anàlisi geomètrica grega	127
3.1	Els precursors. El mètode de reducció i el raonament per hipòtesi	127
3.2	La concepció de l'anàlisi en Pappos	135
3.3	Un exemple d'anàlisi "problemàtica"	137
3.4	Un exemple d'anàlisi "teorètica"	141
3.5	L'anàlisi geomètrica com a eina generadora	145
3.6	Els "diorismós" o determinacions	147
3.7	Valor heurístic de l'anàlisi geomètrica	151
4	Aritmètica	153
4.1	Sistemes de numeració. Orígens	155
4.1.1	Numeració escrita no posicional. Sistemes additius	158
4.1.2	Numeració escrita no posicional. Sistemes multiplicatius	164
4.1.3	Sistemes de posició	165
4.2	Els terns pitagòrics. De la tauleta Plimpton 322 al teorema de Fermat	175
4.2.1	La tauleta Plimpton 322	175
4.2.2	Els terns pitagòrics en el món grec	178
4.2.3	El teorema de Fermat	182
4.3	El càlcul d'arrels d'ordre n i la potència d'un binomi	185
4.3.1	Breu recorregut per les diferents tradicions	185
4.3.2	Anàlisi per a la recerca d'un algoritme del càlcul d'arrels	189
4.3.3	Part fraccionària de l'arrel d'un nombre enter	193
4.4	L'algoritme d'Euclides	194
4.5	Anàlisi lineal indeterminada	196
4.5.1	Resolució de $ax - by = c$ mitjançant el <i>kutakka</i>	200
4.5.2	Les fraccions contínues i l'anàlisi de les equacions lineals indeterminades	203
5	Semblança i trigonometria	213
5.1	La teoria de la proporció i la semblança	216
5.1.1	El llibre VI i la semblança	218

5.1.2	Els teoremes VI.9 a VI.13. Els orígens de la representació algebraica de la geometria.	222
5.1.3	El teorema VI.3 i la circumferència d'Apol·loni	226
5.2	El naixement de la trigonometria	230
5.3	La taula de cordes. El teorema de Ptolemeu	236
5.3.1	Anàlisi de la construcció de la taula de cordes	238
5.4	Trigonometria esfèrica. El teorema de Menelau	248
5.4.1	Càlcul de l'ascensió recta i declinació d'un punt de l'eclíptica	249
5.4.2	Càlcul de les hores de llum solar	250
5.4.3	El teorema de Menelau	255
5.5	Apunt sobre l'evolució posterior de la trigonometria	258
5.6	Representació de corbes mitjançant funcions trigonomètriques . .	262
5.6.1	Els epicles	263
5.7	Apèndix 1	269
5.8	Apèndix 2	274
6	Els problemes clàssics	277
6.1	La quadratriu de Hípias	283
6.1.1	La quadratriu generada per moviments sincronitzats. La quadratura del cercle	285
6.1.2	Quadratriu concebuda mitjançant intersecció de superfícies	287
6.2	La quadratura de llunes	290
6.2.1	Les llunes del fragment d'Eudem	291
6.3	La duplicació del cub	298
6.3.1	Origen del problema	299
6.3.2	Sobre la resolució del problema	300
6.3.3	Solució d'Arquites interpretada algebraicament	302
6.4	Les tríades de Menecm i els orígens de les seccions còniques . . .	303
6.4.1	Anàlisi de Menecm. Construcció punt a punt de les seccions còniques	306
6.4.2	De la construcció per punts a la concepció com a seccions del con	309
6.4.3	Recerca, sobre el con, del <i>symptōma</i> de les còniques . . .	310
6.5	Introducció al tractament de les còniques per Apol·loni	316
7	La perspectiva lineal i els orígens de la Geometria projectiva.	329
7.1	Orígens. Alberti i la <i>costruzione legitima</i>	329

7.1.1	La finestra o vel d'Alberti	333
7.1.2	Costruzione legittima	335
7.1.3	Legitimació del mètode d'Alberti	342
7.2	Els mètodes de representació de Piero della Francesca	344
7.2.1	La proposició I.XVIII	344
7.2.2	El mètode del punt de distància. La proposició I.XXIII	345
7.2.3	La doble projecció	348
7.3	De la perspectiva a la geometria projectiva	351
7.3.1	Els punts de l'infinit	351
7.3.2	Els mètodes de demostració	354
7.4	Algunes qüestions i teoremes	356
7.4.1	Sebastiano Serlio. Una pràctica equivocada.	356
7.4.2	El teorema de l'hexagram de Pascal	358
7.4.3	Brook Taylor. El teorema fonamental i la tècnica de l'abatiment	360
7.4.4	Lambert. La perspectiva i les construccions amb regle sol.	364
7.5	Dos teoremes de Desargues	365
7.5.1	El teorema de Desargues dels dos triangles	365
7.5.2	La involució	371
8	Fonts	383
8.1	Aristòtil	383
8.1.1	Fragment 76a 31–76b 23 dels <i>Segons Analítics</i>	383
8.2	Michel Chasles	384
8.2.1	Fragment de l' <i>Aperçu</i> sobre les <i>Còniques</i> d'Apolloni	384
8.3	René Descartes	385
8.3.1	Fragment de la Regla IV de Descartes	385
8.4	Euclides	386
8.4.1	Definicions del llibre I dels <i>Elements</i>	386
8.4.2	Proposició I.47 dels <i>Elements</i> d'Euclides	387
8.4.3	Proposició II.11 dels <i>Elements</i> d'Euclides	388
8.4.4	Proposició II.14 dels <i>Elements</i> d'Euclides	389
8.4.5	Proposició IV.2 dels <i>Elements</i> d'Euclides	390
8.4.6	Proposició IV.10 dels <i>Elements</i> d'Euclides	390
8.4.7	Proposició IV.11 dels <i>Elements</i> d'Euclides	391
8.5	Pierre de Fermat	392

8.5.1	Observacions sobre Diofant, 45	392
8.6	Halayudha	393
8.6.1	Fragment sobre el triangle aritmètic	393
8.7	Jean-Henri Lambert	394
8.7.1	Problema V de les <i>Notes et additions à la perspective af- franchie de l'embaras du plan géométral</i>	394
8.8	Pappos	394
8.8.1	Introducció del llibre VII de la <i>Col·lecció Matemàtica</i>	394
8.8.2	Proposició VII.106 de la <i>Col·lecció Matemàtica</i>	395
8.8.3	Proposició VII.107 de la <i>Col·lecció</i>	395
8.9	Plutarc	396
8.9.1	Fragment de la <i>Vida de Marcel</i>	396
8.9.2	Fragment 718e–f de la qüestió segona de <i>Moralia: Quaes- tiones convivales</i>	396
8.10	Ptolemeu	397
8.10.1	Capítol 5, llibre I del <i>Almagest</i>	397
8.11	Erwin Schrödinger	398
8.11.1	Fragment de <i>Nature and the Greeks</i>	398
8.12	Teó d'Esmirna	399
8.12.1	«Dels nombres laterals i dels nombres diagonals» de l' <i>Ex- positio</i>	399
9	Indicacions i resolució de les activitats	401
9.1	Activitats del capítol 1	401
9.2	Activitats del capítol 2	426
9.3	Activitats del capítol 3	441
9.4	Activitats del capítol 4	459
9.5	Activitats del capítol 5	480
9.6	Activitats del capítol 6	504
9.7	Activitats del capítol 7	522
	Bibliografia	545

Capítol 1

Orígens del mètode axiomàtic deductiu. El llibre I dels *Elements* d'Euclides

1.1 L'origen de la Geometria

El contingut dels documents més antics que fan referència a la geometria, fa pensar que aquesta neix i es desenvolupa estretament lligada a les exigències pràctiques de l'organització social en aspectes diversos: des de la construcció d'altars i monuments, fins a la mesura de superfícies per als repartiments de terres o el càlcul de volums per a l'emmagatzemament de cereals o d'altres matèries. Se'n troben testimonis en totes les civilitzacions, tauletes babilòniques, papirs egipcis, tractats xinesos i indis, i relats dels historiadors grecs.

Herodot [v aC] relata que el faraó Sesostris (Ramses II) [ca. 1300 aC] distribuïa la terra entre els egipcis en parcel·les rectangulars; a canvi, aquests li lliuraven unes taxes anuals. Quan el Nil inundava una part dels terrenys, els agrimensors del faraó certificaven la rebaixa que s'havia de fer en la taxa, d'acord amb la superfície inundada. Finalment afirma que «aquest és en la meua opinió l'origen de la geometria la qual va passar als grecs».

Segons Climent d'Alexandria¹, Demòcrit, filòsof i matemàtic del segle v aC, afirmava que ningú el superava «en traçar línies en les figures i provar les seves propietats, ni tan sols els anomenats “tibadors de corda”² a Egipte». Aquest terme evoca igualment l'apropament empíric dels egipcis a la Geometria.

Les tauletes babilòniques presenten en gran part llistes de nombres consis-

¹Aquesta cita i l'anterior es poden trobar a HEATH [1921], 121 de l'edició de 1981.

²Del terme grec *harpedonaptae*. Es pot seguir el rastre etimològic des del terme *arpentage*, en llengua francesa, que significa agrimensura.

tents, entre d'altres coses, en taules d'inversos i productes, i també d'algoritmes de resolució d'equacions, les quals venen sovint originades pels problemes geomètrics de càlcul d'àrees i volums. Una de les tauletes més espectaculars per la seva complexitat, la qual és exemple de la profunditat dels coneixements babilònics, és la Plimpton 322.³ Aquesta proporcionava, —juntament amb la part que hi falta—, una col·lecció de terns pitagòrics, la qual cosa invita a creure en l'assumpció del teorema de Pitàgores prop de 2000 anys abans de Crist.

Les dues obres capitals més antigues que es conserven de les matemàtiques xineses són el *Zhoubi Suangqing* dedicat a les matemàtiques i l'astronomia, i el *Jiuzhang Suanshu*, en què es presenten solucions de problemes matemàtics de la vida quotidiana, com ara repartiments proporcionals i càlculs d'àrees i volums entre d'altres.⁴ Aquestes són dues obres de difícil datació, representatives del desenvolupament de la matemàtica xinesa en el període XI aC – II dC.

A l'antiga Índia els textos matemàtics més antics els trobem en els *Sulvasutra*,⁵ i tres dels més importants van ser escrits, —per ordre d'antiguitat a partir del 800 aC,— per Baudhayana, Apastamba i Katyayana. Tracten amb molts tipus de qüestions geomètriques elementals, com la construcció de perpendiculars, quadrats, trapezis, transformació d'àrees, quadratura de cercles, etc.; també s'hi troba una formulació general del teorema de Pitàgores i el càlcul aproximat de $\sqrt{2}$. Moltes d'aquestes qüestions són presentades sota la forma de procediments per a la construcció d'altars. Els continguts són similars en els tres autors, essent el nombre de construccions del segon menor que el del primer, i la presentació del tercer més sistemàtica.⁶

El denominador comú de totes aquestes obres és l'absència de demostracions, si més no, tal com avui les entenem hereus de la tradició grega nascuda amb els filòsofs presocràtics. No sabem si els preocupava l'existència d'alguna forma de veritat matemàtica i, en cas afirmatiu, de quin tipus podia ser aquesta. Calien *demostracions* dels mètodes exposats? Calia convèncer de la correcció dels mètodes? No sembla que això fos important, com a mínim per als lectors dels textos escrits, encara que hi ha indicis d'interès en aquest tema entre alguns autors. Algunes resolucions presentades en el textos escapen a la simple classifi-

³Serà estudiada en el capítol 4.

⁴MARTZLOFF [1987], 13, tradueix *Zhoubi Suangqing* com *Cànon de càlculs gnòmic de la dinastia Zhou*, —s'entén “cànon” com a conjunt de regles—, mentre que cita la traducció proposada per NEEDHAM [1959], 19, i adoptada per LI YAN-DU SHIRAN [1963–64], 25 de l'edició de 1987, *L'Aritmètica clàssica del gnòmon i de les trajectòries circulars del Cel*, les dues justificades sobre la doble accepció del mot “zhou”, el qual es pot referir a la dinastia Zhou, però també té el significat de perímetre. Quant al *Jiuzhang Suanshu*, és traduït per LI YAN-DU SHIRAN [1963–64], 33 de l'edició de 1987, com *Els nou capítols sobre l'art matemàtic*.

⁵*Sulva*: corda per efectuar mesures; *sutra*: regla relativa a una ciència; *sulvasutras*: “regles de la corda”.

⁶Una presentació de la geometria en els *Sulvasutra* la trobem a DATTA [1993], BAG [1979], 103–135, i GHEVERGHESE [1991], 308–322 de l'edició espanyola de 1996.

cació de recepta i deixen entreveure una ombra de justificació, de necessitat de convèncer, de llavor del que més endavant s'entendrà per demostració.⁷

Mostrarem dos exemples que escapen al model de presentació de resolució de problemes com a simple recepta. El primer està extret del papir de Rhind, i tracta de la quadratura del cercle; el segon està extret del *Zhoubi Suanqing* i tracta del teorema *gougu* (teorema de Pitàgores). També presentarem un problema aritmètic del qual es fàcil conjecturar l'origen geomètric de l'algoritme de resolució, la qual cosa ve a reforçar el paper original de la geometria com a eina lligada a les aplicacions, en aquest cas lligada al càlcul de $\sqrt{2}$.

1.1.1 L'àrea del cercle en el papir de Rhind.

L'escriba Ahmes va redactar aquest papir l'any 1650 aC, el qual segons ell mateix afirma, és una còpia d'un escrit d'una època datada entre 1800 i el 2000 aC i consta d'una col·lecció de vuitanta-set problemes.⁸ Alguns d'aquests tracten amb àrees de cercles, concretament en el problema 50 es considera un camp circular de 9 “khets”⁹ de diàmetre i es demana la seva àrea. La solució que dona sense cap mena de justificació és la següent:¹⁰

Restem $\bar{9}$ [és a dir 1/9] del diàmetre, és a dir un khet. El romanent és 8. Multipliquem 8 per 8, això fa 64. Consegüentment l'àrea és 64 setat.

O sigui que el mètode per quadrar el cercle consisteix en construir un quadrat de costat $9 - \frac{1}{9} \cdot 9 = \frac{8}{9} \cdot 9 = 8$ i, en general, —si d és el diàmetre del cercle— de costat $d - \frac{1}{9}d = \frac{8}{9}d$. D'aquí resulta l'àrea del cercle $A = (\frac{8}{9}d)^2$. Així el valor aproximat que s'ha considerat de manera implícita per al quocient π entre l'àrea A del cercle i el quadrat $(d/2)^2$ del radi és

$$\pi = \frac{(\frac{8}{9}d)^2}{(d/2)^2} = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1605\dots$$

Fins aquí, la presentació de la solució del problema ha estat feta de la manera estàndard, sense cap tipus de demostració. Tanmateix, això no passa en el problema 48, en què es demana comparar l'àrea d'un cercle de diàmetre 9 amb la del seu quadrat circumscrit de costat 9. La primera part la resol igual que en el problema 50, i obté una àrea de 64 setat per al cercle. Quant al quadrat, actua calculant el quadrat de 9 igual a 81. La novetat de la presentació consisteix en que aquests càlculs venen acompanyats d'una figura en la qual apareixen

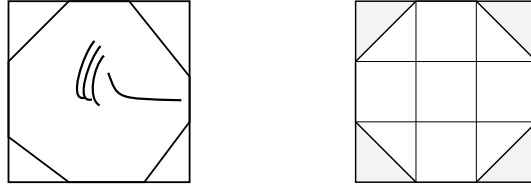
⁷Per a un comentari sobre aquest tema vegeu BOYER [1968], 66-68 de l'edició de 1986.

⁸Vegeu ROBINS-SHUTE [1987].

⁹Un khet = 52.3 metres. Un setat = un khet quadrat.

¹⁰Vegeu BECKMAN [1971], 22-25, DELAHAYE [1997] 139-146, GILLINGS [1972], 139-146, ENGELS [1977], BERGGREN-BORWEIN-BORWEIN [1997], 1-6 de l'edició de 2000.

un quadrat i un octàgon inscrit amb la inscripció de la xifra 9 —en escriptura hieràtica¹¹— en el seu interior. Es conjectura que aquesta presentació escapa a la qualitat de simple recepta i pretén mostrar un perquè de la resolució. L'any 1952, K. Vogel¹² interpreta que es calcula l'àrea del cercle comparant-la amb la d'un octàgon.



Aquest resultaria de dividir el quadrat en 9 subquadrats iguals, agafant com a vèrtexs de l'octàgon els dos vèrtexs interiors de cada costat del quadrat principal. Hi ha maneres diverses de justificar la qüestió; una d'elles consistiria en calcular l'àrea de l'octàgon $9^2 - 2 \cdot 3^2 = 63$, la qual coincideix aproximadament amb la del quadrat $(\frac{8}{9}9)^2 = 64$; una altra utilitzaria la fórmula coneguda del babilonis $\sqrt{a^2 - b} \simeq a - \frac{b}{2a}$,¹³ de la qual no es té constància del seu coneixement per part dels egipcis, d'on s'obté $\sqrt{63} = \sqrt{81 - 18} \simeq 9 - \frac{18}{18} = 9 - 1 = 8$.

1.1.2 El teorema *gougu*

En el *Zhoubi Suanqing* ve representat el diagrama adjunt sense cap més comentari, en què es representa el teorema *gougu*,¹⁴ o teorema de Pitàgores, en el cas particular de costats 3, 4 i 5. Uns segles més tard un comentarista afegí el text explicatiu següent:¹⁵

Així, tallem [diagonalment] un rectangle [ABCD] d'amplada 3 [unitats] i longitud 4 [unitats]. La diagonal [AC] entre els vèrtexs [oposats] serà llavors de 5 [unitats]. Tot seguit, després de traçar un quadrat [ACPQ] sobre aquesta diagonal, li circumscriuim semirectangles com el que hem tallat per formar la làmina [quadrada]. Així els altres [quatre] semirectangles d'amplada 3, longitud 4, i diagonal 5, fan conjuntament dos

¹¹Forma abreujada de l'escriptura jeroglífica.

¹²Vegeu GILLINGS [1972], 142–143.

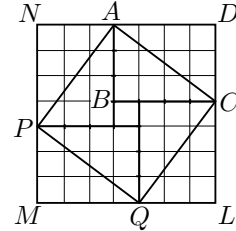
¹³Vegeu una conjectura sobre l'origen geomètric d'aquesta aproximació a l'activitat 1.1 4.

¹⁴Trobem a LI YAN-DU SHIRAN [1963–1964], 29 de l'edició de 1987, la següent explicació: «Aquí la mesura vertical s'anomena "Gu" i significa mesura o escala. L'ombra d'aquesta mesura projectada pel sol sobre un pla s'anomena "Gou" i la hipotenusa es coneix com a "Xian", la corda d'un arc. Així el triangle rectangle s'anomena "forma gougu".

¹⁵L'hem trobat traduït a KATZ [1993], 30, i VAN DER WAERDEN [1983], 27, que l'han extret de NEEDHAM [1959], 22.

rectangles [d'àrea 24]. Llavors [quan això es resta de la làmina quadrada d'àrea 49], el romanent és d'àrea 25. Aquest [procés] s'anomena "apilament de rectangles".

Evidentment, tant si agafem el diagrama aïlladament com si li adjuntem el comentari, no es compleixen els requisits que demanem actualment a una demostració. Tanmateix queda clara la intenció en oferir quelcom més que una simple recepta en la presentació dels valors dels costats del triangle rectangle. Es cerca una justificació visual basada en la quadrícula per tal de convèncer de la veritat del fet que si els catets tenen valors 3 i 4, la hipotenusa té valor 5.



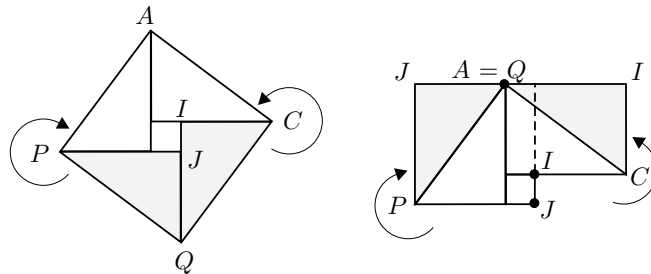
Amb el concurs del simbolisme algebraic actual és immediat convertir l'exposició anterior en una demostració. Efectivament, considerem

$$a = \text{amplada } AB, \quad b = \text{longitud } BC, \quad c = \text{diagonal } AC.$$

Si comparem les àrees de les figures obtenim,

$$\begin{aligned} NMLD &= 4 \cdot ACD + ACPQ \implies (a + b)^2 = 2ab + c^2 \implies \\ &\implies c^2 = (a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

No cal recórrer a la nostra àlgebra per extreure una demostració convincent del diagrama anterior. Només cal considerar la part del diagrama inclosa entre els vèrtexs del quadrat $APQC$.



Si fem girar PJQ , amb centre P , un angle de 90° [o -270°], i CIQ , amb centre C un angle de -90° [o 270°], obtenim la superfície del quadrat de costat PQ com a suma de les superfícies dels quadrats de costats, respectivament, PJ i IC .¹⁶

¹⁶El matemàtic indi Bhaskara [XII] suggereix quelcom de semblant quan presenta el diagrama de la dreta i afegeix com a únic comentari "contempleu".

1.1.3 L'arrel quadrada de 2 en els *Sulvasutra*

En els *Sulvasutra* trobem un càlcul de $\sqrt{2}$ que exemplifica molt bé les especulacions dels historiadors sobre els orígens geomètrics del problema i dels procediments utilitzats. Es creu que el problema s'hagués pogut originar en el planteig de la construcció d'un altar d'àrea doble que un altar donat. Si considerem un altar quadrat de costat unitat el procediment, per aconseguir un quadrat d'àrea doble que es troba en els tres autors citats, consisteix en augmentar la mesura del costat en la seva tercera part, i aquesta tercera part en la seva quarta part menys la trenta-quatrena part d'aquesta quarta part, d'on en resulta el valor aproximat per excés del nou costat. És a dir es proposa que

$$\sqrt{2} \simeq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = 1.4142156 \dots$$

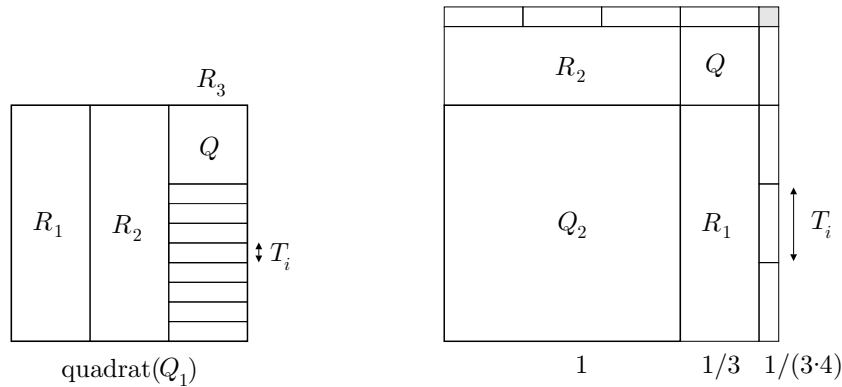
Tenint en compte que,

$$1.4142135 < \sqrt{2} < 1.4142136,$$

l'error comès és menor que $2.2 \cdot 10^{-6}$.

S'han proposat algunes conjectures sobre la manera d'arribar a aquest resultat. Una d'elles es presenta amb un procediment totalment geomètric:¹⁷

Considera dos quadrats Q_1 i Q_2 de costat unitat i fa successives i adequades disseccions d'un d'ells per afegir-les a l'altre. La finalitat es aconseguir un quadrat que approximi per defecte el quadrat doble, i posteriorment un gnòmon que també l'approximi per defecte. Llavors completa —fins a un quadrat— aquest gnòmon i obté una primera aproximació per excés. Concretament:



- Descompon el quadrat Q_1 en tres rectangles R_i de costats $1 \times 1/3$.
- Afegeix dos dels rectangles obtinguts R_1 i R_2 al quadrat Q_2 , fent coincidir els costats unitat, i obté un gnòmon.

¹⁷Vegeu DATTA [1993], 192–194.

- Parteix el tercer rectangle R_3 en tres quadrats iguals Q , i n'utilitza un per completar un quadrat de costat $1 + (1/3)$ a partir del gnòmon anterior.
- Parteix el rectangle $R_3 - Q$, contingut en el quadrat Q_1 , en vuit rectangles T_i iguals, i els afegeix als costats del quadrat de costat $1 + (1/3)$ per obtenir un altre gnòmon que tindrà àrea doble que el quadrat inicial.
- A partir d'aquest gnòmon completa un quadrat utilitzant un quadrat de costat $1/(3 \cdot 4)$.

Amb aquest procediment ha construït un quadrat que excedeix l'àrea 2 en aquest petit quadrat de costat $1/(3 \cdot 4)$. Consegüentment al costat d'aquest quadrat completat aproxima per excés $\sqrt{2}$ amb el valor

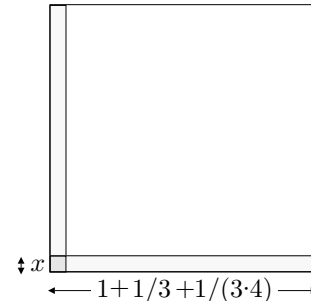
$$\sqrt{2} \lesssim 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}.$$

Per corregir l'excés, retalla dues tires rectangulars de costat x del quadrat completat de manera que l'àrea de les dues tires sigui aproximadament igual a l'excés. Actua observant que si fos exactament igual s'hauria de complir

$$2x \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \right) - x^2 = \left(\frac{1}{3 \cdot 4} \right)^2$$

i llavors,

$$x = \frac{\left(\frac{1}{3 \cdot 4}\right)^2}{2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right)} + \frac{x^2}{2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right)}.$$



Si es prescindeix del segon sumand en resulta,

$$x \gtrsim \frac{1}{2 \cdot (12 + 4 + 1) \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

i s'obté l'aproximació per excés

$$\sqrt{2} \lesssim 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

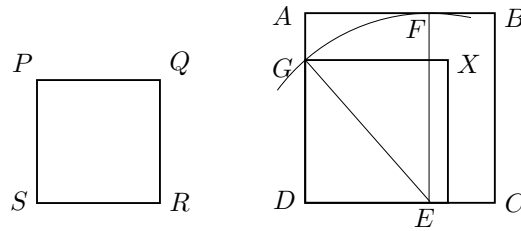
Activitats 1.1

1. Trobeu, sense recórrer a la trigonometria, una acotació dels valors de π , imposant que l'àrea d'un cercle és major que la del seu octàgon regular inscrit i menor que la del circumscribit. \overline{E}_2
 \boxed{S}

2. En el Baudhayana trobem diverses construccions geomètriques que recorden l'estil de presentació que fa la matemàtica grega dels problemes de transformació d'àrees. En triarem dues relacionades amb el teorema de Pitàgores.¹⁸

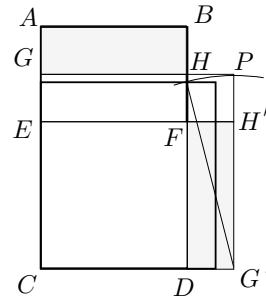
Construcció 1: Construir un quadrat com a diferència de dos quadrats.

Per sostreure un quadrat $PQRS$ d'un quadrat $ABCD$, tallem d'aquest últim un rectangle $AFED$, amb un costat AF igual al del quadrat $PQRS$ que es vol restar. Transportem en diagonal el costat llarg EF d'aquest rectangle fins l'altre costat AD , i allí on cau [el punt G] tallem el tros GD . Amb aquest tros tallat la deducció s'ha acabat.



Construcció 2: Transformar un rectangle en un quadrat.

Si desitges transformar un rectangle $ABCD$ en un quadrat, agafa el seu costat CD com el costat d'un quadrat $CDEF$; parteix el que resta $EFAB$ en dues parts [iguals] $EFHG$ i $GHBA$, i canvia el lloc [de la superior $GHBA$] invertint-la, i afegeix-la sobre l'altre costat FD del quadrat. Llavors afegint una porció [quadrada $FH'PH$] omple això [l'espai buit de la cantonada]. S'ha explicat [abans] com deduir el final.



i) Completeu el final de la segona construcció.

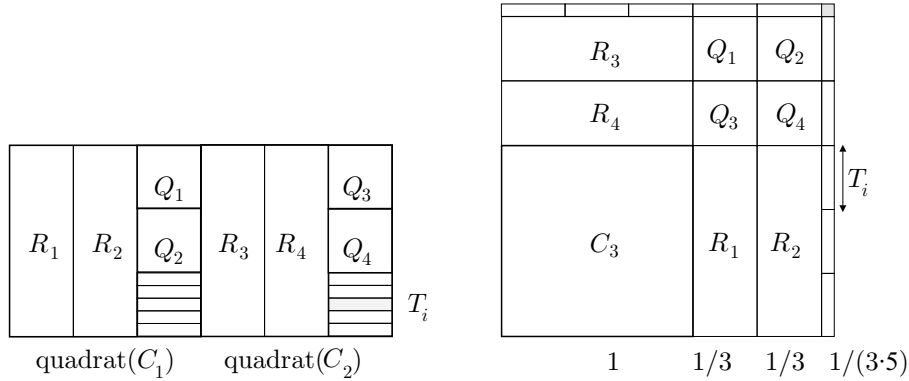
S

ii) Feu una anàlisi dels dos problemes que porti a aquestes construccions.

iii) Creeu un fitxer amb el CABRI que presenti la segona construcció pas a pas.

3. Trobeu una primera aproximació per excés de $\sqrt{3}$ actuant de manera similar al cas $\sqrt{2}$ de la secció 1.1.3, després d'observar el gràfic adjunt.

¹⁸Vegeu DATTA [1993], 78 i 83–84. Vegeu també, per a la segona construcció, GHEVERGHESE [1991], 315–316 de l'edició de 1996, i BOYER [1968], 271 de l'edició de 1986.



Amb aquest resultat, trobeu una segona aproximació utilitzant el procediment de retallar dues tires rectangulars del quadrat obtingut. S

4. Observeu que, en els càlculs de $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, la segona part del procés seguit consistia en retallar dues tires rectangulars del quadrat que resultava després de fer la primera aproximació, de manera que l'amplada x de la tireta retallada era aproximada prescindint del sumand més petit. B

Aquest procediment es pot generalitzar per calcular l'arrel quadrada de qualsevol nombre. Suposem que volem calcular \sqrt{N} , en què N és natural, i que tenim una aproximació per excés $a_0^2 \gtrsim N$ del quadrat d'àrea N . Si retalléssim dues tires rectangulars, d'amplada x i llargàries a_0 i $a_0 - x$, del quadrat a_0^2 amb la seva suma igual a l'excés $a_0^2 - N$. llavors

$$2xa_0 - x^2 = a_0^2 - N \quad i \quad x = \frac{a_0^2 - N}{2a_0} + \frac{x^2}{2a_0}.$$

Si prescindim del valor $\frac{x^2}{2a_0}$ i retallem les tires de costats a_0 i $x = \frac{a_0^2 - N}{2a_0}$, $a_0 - x$ i x , obtindrem una altra aproximació per excés, més òptima que a_0 ,

$$a_1 = a_0 - x = a_0 - \frac{a_0^2 - N}{2a_0} = \frac{a_0^2 + N}{2a_0}$$

del costat \sqrt{N} del quadrat d'àrea N . Efectivament,

$$\begin{aligned} a_0^2 - N &> (a_0 - x)^2 - N = a_1^2 - N = (a_0 - x)^2 - N = \\ &= \left(\frac{a_0^2 + N}{2a_0} \right)^2 - N = \left(\frac{a_0^2 - N}{2a_0} \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

i) Quina serà l'aproximació del valor de $\sqrt{2}$, si apliquem aquest procediment al resultat $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ obtingut a la secció 1.1.3?

- ii) Analitzeu el procediment anterior si partiu d'una aproximació a_0 per defecte.
- iii) Definiu una funció amb el DERIVE que apliqui iteradament el procediment anterior per tal d'aproximar l'arrel de qualsevol nombre N . Les variables seran el nombre N , el valor de la primera aproximació i el nombre de repeticions del procés.
- iv) Definiu una funció que permeti visualitzar gràficament el procés iteratiu. Indicació: Heu de construir la successió de punts

$$\dots, [x_k, x_{k+1}], [x_{k+1}, x_{k+1}], [x_{k+1}, x_{k+2}], \dots,$$

S en què x_0 és una primera aproximació i $x_{k+1} = f(x_k)$ tal que $f(x) = \frac{x^2+N}{2x}$, i representar-los connectats per segments.

5. A partir d'una aproximació a_0 per defecte de \sqrt{N} tal que $a_0^2 < N < (a_0+1)^2$, es pot aconseguir una altra aproximació per defecte de la manera següent:

Afegim dues tiretes rectangulars a_0x i un quadrat x^2 al quadrat a_0^2 , de manera que la suma de totes les àrees sigui igual a N , és a dir

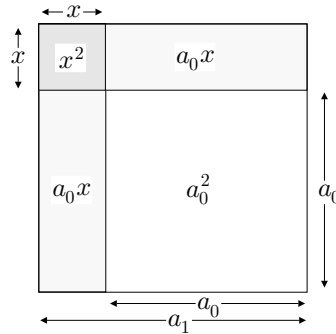
$$a_0^2 + 2a_0x + x^2 = N. \tag{1.1}$$

Per la condició de sortida ha de ser $x < 1$, i de la igualtat (1.1) obtenim:

$$x = \frac{N - a_0^2}{2a_0 + x} > \frac{N - a_0^2}{2a_0 + 1}.$$

O sigui que si considerem $x = \frac{N - a_0^2}{2a_0 + 1}$ obtindrem l'aproximació a_1 per defecte que compleix

$$a_0 < a_1 = a_0 + x = a_0 + \frac{N - a_0^2}{2a_0 + 1} < \sqrt{N}. \tag{1.2}$$



i) Apliqueu aquest procediment al càlcul de $\sqrt{2}$, partint del valor aproximat $a_0 = \frac{7}{5}$.

ii) Quin tipus d'aproximació de \sqrt{N} obtindríem si partíssim de a_0 tal que $(a_0 + 1)^2 < N$.

S iii) Quin tipus d'aproximació obtindríem si apliquéssim a $a_0 > \sqrt{N}$ el procediment anterior definit per la igualtat (1.2).

6. Pretenem acotar l'error en el càlcul de \sqrt{N} , utilitzant que aquest serà menor que la diferència entre una aproximació per excés una per defecte. Definiu amb el DERIVE tres funcions:

i) Una que proporcioni aproximacions per defecte de \sqrt{N} aplicant iteradament el mètode explicat, i una altra que les visualitzi.

ii) Una altra que proporcioni el valor de \sqrt{N} amb un error menor que 10^{-k} , utilitzant parelles d'aproximacions per defecte i per excés. S

Indicació: Haureu de partir d'un valor inicial a_0 tal que $a_0^2 < N < (a_0 + 1)^2$.

7. Considereu $a_0 > 0$ i la successió d'aproximacions de \sqrt{N}

$$a_{p+1} = a_p - \frac{a_p^2 - N}{2a_p}$$

definides com a l'apartat 4 d'aquestes activitats. Pretenem acotar l'error comès en aquestes aproximacions, les quals sabem que a partir de a_1 seran per excés.

i) Demostreu que $0 < a_{p+1} - \sqrt{N} < a_p - a_{p+1}$, $\forall p \geq 1$.

ii) Utilitzeu el resultat anterior per definir una funció amb el DERIVE que proporcioni el valor de \sqrt{N} amb un error menor que 10^{-k} . S

□

1.2 De la via del mite a la via de la raó en l'antiga Grècia

Hem presentat alguns elements que presenten l'origen pràctic de la geometria en les antigues civilitzacions. Tot i trobar alguns indicis d'interès en la justificació de la veritat de les seves proposicions i procediments, els documents que tenim permeten afirmar que els seus autors no creien necessari o convenient de deixar constància escrita de cap mena de *demostració* si es que aquestes existien. És en la civilització grega, —que guarda estrets contactes amb les citades anteriorment—, on apareix a partir del segle VII aC, una nova manera d'entendre la matemàtica i, més concretament, la geometria. Els grecs s'enfronten a la geometria des d'uns paràmetres no tan pendents de les aplicacions i més lligats a la recerca de certes, de veritat, i ho fan des d'un punt de vista que només compta amb les capacitats pròpiament humanes per aconseguir-ho.

Aquest canvi va lligat amb el naixement de la filosofia grega,¹⁹ caracteritzada per la recerca de causes últimes a través de la raó. Sabem que els antics grecs, com totes les altres civilitzacions veïnes, creien en un coneixement que rebien dels déus, a través de persones que s'hi podien comunicar com ara sacerdots i mags. Aquesta comunicació s'establí en estats especials de consciència, induïts per rituals, en els oracles, o per les pròpies capacitats dels interlocutors. Els

¹⁹En relació al naixement de la filosofia vegeu TORELLÓ [1993], 31–46, i pel lligam amb el canvi al·ludit vegeu MARTÍNEZ [1986].

missatges rebuts eren guardats en forma de mites, llegendes i narracions dels diferents sistemes religiosos, capaços de provocar el despertar de la consciència d'aquells que ho desitjaven sincerament.

Al voltant del segle VII aC s'observa una clara tendència a considerar que l'home podia adquirir coneixement per altres vies, sense una intervenció directa dels déus. S'ha especulat molt sobre els motius d'aquest nou moviment i les conclusions no són definitives.²⁰ Entre les possibles causes s'apunten el trencament de valors de tipus aristocràtic i feudal, provocat per les migracions dels segles IX al VII aC. Amb això es propicià l'activitat comercial amb les civilitzacions veïnes i, aquests contactes deixaren al descobert contradiccions, com a mínim aparents, entre els seus sistemes de creences, i els dels seus interlocutors. D'altra banda tenim la peculiaritat, del caràcter grec, d'atracció per la controvèrsia de cara a consolidar les opinions pròpies, —pensem en l'àgora, lloc públic de reunió on s'intentaven organitzar les relacions ciutadanes—. Aquest caràcter els podria haver conduït a la recerca de noves formes de coneixement, que s'haurien d'obtenir amb l'ús de les facultats humanes de percepció, intuïció, raonament, però lluny de la intervenció dels déus que semblaven introduir confusió. O sigui que, independentment que els déus posseïssin i manifestessin o no la veritat, es van posar a buscar-la amb els mitjans humans que havien adquirit de la naturalesa o d'aquests mateixos déus. Notem que això no representa una ruptura total amb l'antiga concepció del mite com a via de coneixement, sinó l'acceptació de vies complementàries o, fins i tot, alternatives. Reflexionem sobre el relat que Teó d'Esmirna [II] fa d'una consulta feta pels delis a l'oracle:²¹

Erastotenes [IIIC] en el seu treball titulat *Platonicus* relata que quan els déus proclamaven al delis, mitjançant l'oracle, que si volien lliurar-se de la plaga, haurien de construir un altar cúbic doble en volum que l'existent, els artesans van quedar perplexos en els seus esforços per descobrir com un sòlid podia ser doblat a partir d'un sòlid similar i van preguntar a Plató sobre això; ell va replicar que l'oracle significava no que els déus volguessin un altar de doble volum, sinó que desitjaven, posant-los la feina, avergonyir-los per la seva negligència de les matemàtiques i el seu menyspreu de la geometria.

Aquest fragment il·lustra sobre la possible complementarietat de les dues vies, en poder-se interpretar que l'oracle ens introdueix subtilment a la consciència que hi ha coses que es poden conèixer per la mena de raonaments que fan les matemàtiques, i que de cap manera es poden negligir. O sigui que els déus proporcionaven el coneixement que no es pot prescindir de cercar coneixement amb mitjans humans.

²⁰Vegeu Torelló i Martínez

²¹Vegeu HEATH [1921], I, 245–246 de l'edició de 1981.

Sigui com sigui, el fet clar és que els grecs dels segles VII–VI aC es van enfrontar a la recerca de coneixement per la via de la raó. Els tres representants principals d'aquesta època són de Milet:²²

Tales [~ 630-546]. Creu que l'aigua és la substància primordial susceptible de transformar-se per condensació en sòlids i per evaporació en aire, el qual engendra el foc. També és suport material perquè la terra floti sobre d'ella. Aquestes idees estaven força influenciades per descripcions mitològiques precedents, però l'abandonament de la formulació mítica converteix Tales en un dels primer filòsofs que cerca el coneixement a través de la raó.

Anaximandre [~ 610–547]. En paraules de Diògenes Laerci: «Afirmava que el principi i l'element és l'*apeiron* (indefinit), sense distingir l'aire, aigua o qualsevol altra cosa».

Aquest autor s'endinsa més en la via de la raó. En ser aquesta una assignació més abstracta, hagués pogut ser elaborada mitjançant una argumentació que qüestionés els predicats de Tales: Com podia el foc provenir de l'aigua si els dos es destrueixen mútuament i acabarien per extingir-se? Calia que la substància primera tingués una naturalesa diferent que qualsevol element constitutiu del nostre món.

Anaxímenes [~ 588-524]. Estableix l'aigua com a primer element. La seva rarificació i condensació produeixen els altres elements. En aquesta producció l'aigua no perdia la pròpia naturalesa i, d'aquesta manera, resolva la possible argumentació d'Anaximandre en front de la concepció de Tales, tornant a considerar un component del món sensible com a primer element.

Així doncs la crisi intel·lectual creada per la pèrdua de creences provocada per l'enfrontament de cultures, juntament amb el caràcter grec, sembla un dels principals motius d'aquesta entrada en escena de la raó com a via de coneixement. Evidentment la matemàtica no escapa a aquest model. És natural que sigui així si observem la peculiaritat dels objectes matemàtics. Aquests es presentaven com a no canviants, mentre que els objectes del món subjectes a la nostra percepció canvien, i difícilment s'hi pot esbrinar la veritat. Els grecs podrien doncs, començar amb l'estudi de la veritat en les matemàtiques. Això caldria que es fes a partir de raonaments rigorosos, perquè els objectes matemàtics podien provocar l'aparició de situacions tan o més o confuses que les provocades pels objectes sensibles; un dels exemples més dramàtics seria el de la crisi provocada pel descobriment de magnituds incommensurables en la geometria. Tot això conduiria a la recerca d'un mètode que fos una eina vàlida per a l'establiment de la veritat cercada, i desembocaria en la creació del mètode axiomàtic deductiu. L'ús

²²Vegeu KIRK–RAVEN [1966], 111–232 de la traducció espanyola de 1974.

d'aquest mètode distingiria la manera d'entendre i de presentar la matemàtica, de la que tenien les civilitzacions veïnes, i és l'eina que valida la veritat de les proposicions matemàtiques fins el dia d'avui. Els *Elements* d'Euclides [300 aC] és el primer text que conservem, en què es presenta la geometria seguint aquest model. Abans d'endinsar-nos en l'estudi del primer llibre, dels tretze que constitueixen l'obra, ens referirem a alguns dels protagonistes del procés d'establiment del mètode.

1.2.1 Tales

Es considera Tales el primer representant d'aquest moviment. No tenim cap document escrit per ell, i no sabem en què podien consistir les seves demostracions. Fins i tot, podien guardar certa similitud amb algun dels exemples de les civilitzacions més antigues citats a la secció 1.1; podria ser que els arguments per convèncer de la veritat de les proposicions geomètriques consistissin en l'elaboració de diagrames més que en cadenes de deduccions.²³ Procle [410–485] al principi del seu *Comentari al primer llibre dels Elements d'Euclides* introdueix un fragment d'un resum perdut d'una part d'una Història de la Matemàtica perduda escrita per Eudem [fl. 320 aC] en què parlant de Tales diu:²⁴

Tales que viatjà a Egipte, fou el primer a introduir aquesta ciència a Grècia. Descobrí per si mateix moltes proposicions, i va instruir els seus successors en els principis en els quals es basen moltes altres, essent el seu mètode d'atac en alguns casos més general i en d'altres més empíric.

Les proposicions que se li atribueixen són:

- Tot diàmetre parteix el cercle en dues parts iguals.
- Els angles a la base d'un triangle isòsceles són iguals.
- Els angles oposats pel vèrtex, que es formen en tallar-se dues rectes, són iguals.
- El criteri d'igualtat de triangles angle–costat–angle.
- L'angle inscrit en un semicercle es recte.

²³Vegeu NEUGEBAUER [1957], 147–148 de l'edició de 1969, per a una opinió en contra que Tales utilitzés el mètode deductiu en les demostracions de les seves proposicions, i VAN DER WAERDEN [1961], 87–89, per a una opinió a favor. Vegeu també, HEATH [1921], I, 130–131 de l'edició de 1981.

²⁴Vegeu MORROW [1970], 52.

1.2.2 Els pitagòrics

Pitàgores [fl. 530 aC], i els seus seguidors tenien una concepció de l'Univers com un “cosmos”, es a dir com un tot ordenat. Veien en el nombre el principi a través del qual aquest tot era manifestat a l'home, fins i tot, creien que tot era nombre. Possiblement, un dels descobriments que determinaren l'adopció d'aquest punt de vista fou que les proporcions que apareixien a les escales musicals podien ser explicades amb els nombres i que les teories creades amb aquests servien per explicar altres tipus de fenòmens. Aristòtil ho explica en el llibre A de la *Metafísica*, 985 b:

A l'època d'aquests [els filòsofs atomistes] i abans que ells, els anomenats pitagòrics es dedicaren a les matemàtiques i foren els primers en fer-les progressar; absorts en el seu estudi van creure que els seus principis ho eren de totes les coses. I com que els nombres són per naturalesa els primers d'aquests principis, i en els nombres creien contemplar moltes semblances amb els éssers existents i amb els que estan en formació —més que en el foc, la terra, o l'aigua (essent tal modificació dels nombres la justícia, tal altra l'ànima i la raó, una altre l'oportunitat, i quasi bé de manera semblant totes les altres coses)—; i com que veien que els atributs i les relacions de les escales musicals eren expressables en nombres, i semblava que totes les altres coses estaven constituïdes de manera similar, en tota la seva naturalesa, als nombres, i aquests semblaven ser els primers de tota la naturalesa, van suposar que els elements dels nombres eren els elements de tots els éssers existents, i que els cels tots eren harmonia i nombre.²⁵

Aquí veiem reflectida una experiència per la qual hem passat molts de nosaltres i dels nostres alumnes: el fet que una abstracció numèrica feta en l'estudi d'un fenomen físic, amb la consegüent elaboració teòrica de l'abstracció, sigui aplicable en camps que en principi no tenen res a veure amb els camps de l'estudi inicial. L'experiència, sens dubte, impressiona i fàcilment indueix a qui la viu, a dotar els objectes matemàtics d'atributs en un terreny que transcendeix el sensible i les aparences, i atorgar-los un lloc principal en la concepció última de la realitat. Tanmateix, les coses no són tan simples, i tot això podria ser conseqüència de la pròpia naturalesa del pensament matemàtic.²⁶

²⁵Extret de KIRK–RAVEN [1966], 333–334 de l'edició de 1974.

²⁶Vegeu SCHRÖDINGER[1996], 59–60 de l'edició espanyola de 1997, text que trobareu a la secció 8.11.1. Vegeu també RICARD–THUAN[2000], 261–274 de l'edició espanyola de 2001; allí Matthieu Ricard afirma que:

En estudiar les matemàtiques, els matemàtics no fan sinó estudiar el mode de funcionament del seu cervell, de quina manera el nostre pensament elabora poc a poc una fórmula de lectura dels fenòmens. Aquesta fórmula es presta naturalment a ser

Una altra qüestió digna de ser notada que trobem en aquest fragment és la menció dels quatre “mathemata” (μαθήματα), —terme que es troba en l’origen de la paraula matemàtica—, els quals constitueixen des del temps dels primers pitagòrics els cos de la ciència, i que serien presentats per Boeci [~ 480–524] sota el nom de *Quadrivium*. Aquests són l’aritmètica, la geometria, l’astronomia i la música. La paraula matemàtica té el seu origen en el terme “mathema” (μάθημα). Entre els pitagòrics existien dues classes de membres els “mathematikoi” (μαθηματικοί), els quals rebien i aprofundien en els coneixements i creences de la comunitat, i els “akousmathikoi” (ακουσματικοί), els quals participaven d’aquests coneixements i creences sense aprofundir-ne. Així, els termes “mathema” i “mathemata” tenien, en aquell temps, el significat ampli de tot allò que és tema d’instrucció o estudi. Més endavant Plató afirma que el “mathema” o objecte d’estudi suprem és la Idea del Bé:²⁷

... la Idea del Bé és l’objecte de l’estudi suprem, a partir del qual les coses justes i totes les altres coses es tornen útils i valuoses. I saps bé que estic per parlar-ne i, a més, que no ho coneixem prou bé. Però també saps que si no ho coneixem, encara que coneguéssim les altres coses, sense allò res en seria valuós, de la mateixa manera que si posseïm alguna cosa sense el Bé.

Més endavant en el llibre VII de la *República* fa una descripció extensa i raonada de les disciplines que ens poden conduir envers aquesta idea. Aquestes són les quatre ja citades i afegeix la geometria de l’espai, la qual nosaltres, igual que Boeci, considerem dins la geometria.

D’entre els pitagòrics es conserva un fragment d’Arquitas, contemporani de Plató, en que fa una de les primeres presentacions dels “mathemata”:²⁸

Crec que tots aquells implicats en els “mathemata” han arribat a conclusions correctes, i no és sorprenent que tinguin una concepció verdadera sobre la naturalesa de cada cosa particular: perquè havent assolit conclusions correctes sobre la naturalesa de l’univers, estaven en posició de veure en la seva veritable llum la naturalesa de cada cosa. Així, han deixat a la nostra disposició un coneixement clar sobre la velocitat

aplicada a tot fenòmen nou que es presenti, ja que és la seva raó de ser. Per tant, no és d’estranyar que aquest instrument mental polivalent, de vegades s’avanci a les nostres observacions i pugui ser utilitzat amb finalitats que encara no hem imaginat. Les matemàtiques poden contemplar tot tipus de possibilitats lògiques que encara no han trobat o no trobaran mai equivalents en la naturalesa, sense que això confereixi una existència autònoma a aquestes idees.

²⁷Vegeu el llibre VI de la *República*, 505 a.

²⁸Vegeu HEATH [1921], 11, i FAUVEL–GRAY [1987], 56.

del cossos celestes, les seves aparicions i ocultacions, i sobre geometria, aritmètica, esfèrica i, no menys, sobre música; perquè aquestes “mathe-mata” estan relacionades.

Quant a l'aportació dels pitagòrics a l'establiment del mètode axiomàtic deductiu, se'ls van plantejar algunes qüestions greus, les quals possiblement van impulsar-los a aprofundir en el plantejament de com s'havien de discernir les propietats verdaderes dels objectes matemàtics amb independència de la seva simple contemplació:

- L'aparició de magnituds incommensurables, la qual atemptava contra el nombre com a principi i mesura de totes les coses, i deixava fora del seu abast l'estudi general de la geometria.
- Els arguments de Zenó [fl. 450 aC] de l'escola d'Elea. Aquest procedia per raonaments indirectes. Partia de les premisses que defensava el seu oponent i arribava a una contradicció. Així aconseguí qüestionar les concepcions pitagòriques: d'un cantó la consideració que les magnituds estaven formades d'indivisibles —punts, instants— i, de l'altre, que es podien dividir tantes vegades com es volgués. Des de qualsevol dels dos supòsits, Zenó era capaç de trobar contradiccions. Aquests problemes estaven estretament lligats amb la concepció de punts i rectes com a termes primitius, amb l'estructura contínua de la recta i podrien ser els causants del rebuig a l'ús de procediments compostos d'infinites etapes.²⁹

1.2.3 El descobriment de les magnituds incommensurables

El descobriment de segments incommensurables s'atribueix als pitagòrics en les seves investigacions sobre el quadrat i el pentàgon regular, concretament en l'intent de comparar la diagonal i el costat d'aquestes figures. Però abans d'entrar més a fons en aquesta qüestió esbrinarem el significat de la commensurabilitat i les seves implicacions.

Mentre s'accepta, entre el pitagòrics, que tots els segments són commensurables, no és un problema massa complex el definir la raó o relació entre dos segments, elaborar una teoria de la proporció i relacionar-la amb la mesura de superfícies de polígons. Efectivament, segons la definició X.1 dels *Elements*,

Dues magnituds són commensurables quan són mesurades per una mateixa mesura.

²⁹Vegeu CAVEING [1982]. Per a una mostra d'un tipus de raonament en què s'intenta contradir, mitjançant un procediment d'infinita divisibilitat de segments, els postulats de la geometria vegeu la secció 1.4.1.

Amb unes altres paraules, si tractem amb segments, diríem que:

Dos segments AB i CD són commensurables si existeix un segment \bar{s} tal que $AB = p \cdot \bar{s}$ i $CD = q \cdot \bar{s}$, en què p i q són nombres naturals.³⁰

A partir d'aquí, mentre ens mantenim en el domini dels commensurables, es pot definir la relació o raó entre els segments AB i CD com la raó entre els nombres p i q , la qual es simbolitza amb la notació

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q}, \quad \text{la qual es llegeix "AB és a CD com p és a q".}$$

Donats quatre segments AB, CD, EF i GH , la igualtat

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} \tag{1.3}$$

significarà que existeixen dos segments \bar{s} i \bar{s}' tals que $AB = m \cdot \bar{s}$, $CD = n \cdot \bar{s}$, $EF = m \cdot \bar{s}'$ i $GH = n \cdot \bar{s}'$, en què m i n són naturals.

Si tenim en compte que $n \cdot (m \cdot x) = (n \cdot m) \cdot x$, en què n i m són nombres naturals i x és un segment, la igualtat de raons equival a dir que existeixen m i n naturals tals que

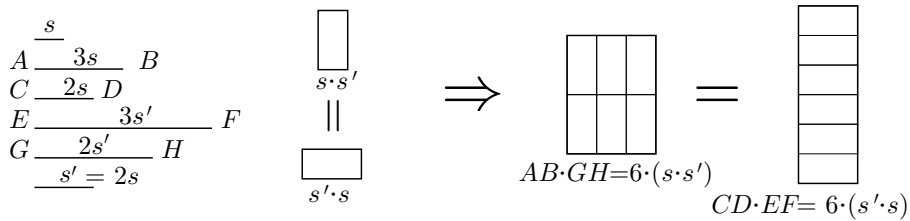
$$n \cdot AB = m \cdot CD \quad \text{i} \quad n \cdot EF = m \cdot GH.$$

Quan es dona aquesta igualtat diem que les parelles AB, CD i EF, GH són proporcionals.

També podem relacionar la igualtat de raons amb la igualtat de les àrees d'uns rectangles adequats:

Si considerem els rectangles de costats \bar{s} i \bar{s}' , AB i GH , CD i EF , els representem amb el simbolisme $\bar{s} \cdot \bar{s}'$, $AB \cdot GH$ i $CD \cdot EF$, i considerem $\bar{s} \cdot \bar{s}'$ com a unitat de mesura de superfícies, llavors la igualtat (1.3) implica³¹

$$\left. \begin{array}{l} AB \cdot GH = (m \cdot n) \cdot (\bar{s} \cdot \bar{s}') \\ CD \cdot EF = (m \cdot n) \cdot (\bar{s}' \cdot \bar{s}) \end{array} \right\} \text{ i, per tant, } AB \cdot GH = CD \cdot EF.$$

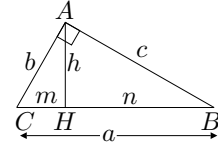


³⁰La notació $p \cdot x$, en què p és un nombre i x és un segment o una superfície substitueix l'expressió "p vegades el segment o superfície x". Si són nombres és el producte de nombres.

³¹El signe d'igualtat entre rectangles significa igualtat d'àrees.

També, si no sortim d'aquest domini, és fàcil demostrar que dos triangles amb els angles iguals entre si tenen els costats proporcionals. Llavors, en el terreny de les magnituds commensurables, podem deduir el teorema de Pitàgores utilitzant aquests resultats.³² Efectivament,

$$\begin{aligned} AHC \text{ i } BAC \text{ semblants} &\implies \frac{b}{a} = \frac{m}{c}, \\ AHB \text{ i } BAC \text{ semblants} &\implies \frac{c}{a} = \frac{n}{c}. \end{aligned}$$

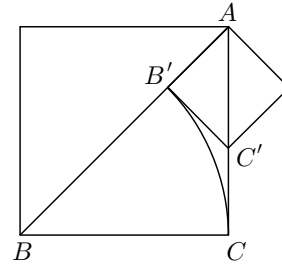


Llavors, $b^2 = a \cdot m$ i $c^2 = a \cdot n$, i, per tant,

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n) = a \cdot a = a^2.$$

Però, com hem dit al principi, aquesta mateixa figura porta la llavor de la crisi. Se suposa que els pitagòrics intentaren trobar una unitat comuna de mesura entre la diagonal i el costat del quadrat. En no trobar-la, s'obrí l'interrogant sobre l'existència de magnituds incommensurables. La resposta afirmativa invalidaria la demostració anterior a no ser que s'elaborés una teoria de la proporció en el nou domini, la qual s'hauria de fonamentar rigorosament. Aquesta teoria va ser elaborada per Èudox [IV aC] i es presentada per Euclides en el llibre V dels *Elements*. D'altra banda Euclides deixa clar en el teorema I.47 que no cal recórrer a aquesta teoria per demostrar el teorema de Pitàgores, la qual cosa segurament era coneguda dels pitagòrics. La marxa del descobriment hagués pogut ser la següent:

Suposem que existeix un segment \bar{s} que mesura la diagonal AB i el costat BC d'un quadrat. Llavors \bar{s} mesura el costat AC i el segment diferència $AB' = AB - BB' = AB - BC$, en què B' és la intersecció de la circumferència (B, BC) amb la diagonal AB . Si construïm el quadrat de costat AB' , és evident que $AB' = B'C' = CC'$, la qual cosa implica que el segment \bar{s} mesura AB' i la diferència $AC' = AC - CC' = AC - AB'$.



En definitiva, en el cas d'existir la unitat comuna de mesura \bar{s} del costat i la diagonal d'un quadrat, aquesta també mesuraria la diagonal i el costat d'un altre quadrat més petit. Aquest procés es podria repetir tantes vegades com es volgués, no tindria final, la qual cosa implica que no arribaríem a determinar la unitat de la qual s'ha suposat l'existència. Però, per als grecs, l'existència de \bar{s} s'ha d'establir a partir de la seva construcció en un nombre finit de passos. En no haver-ho aconseguit, l'interrogant de l'existència de \bar{s} segueix en peu, encara que

³²De fet, aquesta és una de les possibles resolucions que atribueix HEATH [1908] I, 353 de l'edició de 1956, als pitagòrics.

han aparegut indicis prou grans a favor de la resposta negativa. Està clar que si es pogués establir que el costat del quadrat es fa tan petit com es vulgui, en particular més petit que \bar{s} , obtindríem una contradicció. Aquesta és l'alternativa d'Èudox, que Euclides desenvolupa en el teoremes X.1 i X.2 dels *Elements*, encara que cal justificar-la amb la introducció del postulat d'Arquimedes que Euclides presenta sota la forma de la definició V.4. Hagués pogut ser que els pitagòrics arribessin a aquestes conclusions sense tan de rigor, o que ho fessin per una altra via de raonament indirecte apuntada per Aristòtil:³³

Tots els raonaments que arriben a una conclusió mitjançant el que és impossible proven el que és fals, i la proposició del principi la demostren, per hipòtesi, quan resulta alguna cosa falsa des de l'assumpció de la contradicció; com, per exemple, que la diagonal és incommensurable es prova perquè el que és senar es fa igual al parell, en suposar que sigui commensurable.

Aquest passatge és bastant fosc i cal fer-ne una interpretació a partir de l'acceptació del teorema de Pitàgores. Actuem «mitjançant l'impossible» i suposem que la diagonal AB i el costat AC fossin commensurables. Llavors $AB/AC = p/q$ en què p i q són naturals, amb $q > 1$, i podem suposar que no tenen divisors comuns.³⁴ En ser, pel teorema de Pitàgores,

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{2 \cdot AC^2}{AC^2} = 2,$$

p^2 és parell i, per tant, p és parell. Llavors q és senar, en no tenir cap divisor comú amb p . D'altra banda $2q^2$ és múltiple de 4, és a dir q^2 és parell i, per tant, q és parell. Llavors, com diu Aristòtil, «el senar es fa igual al parell», i ha resultat «alguna cosa falsa des de l'assumpció de la contradicció», la qual era suposar que eren commensurables.

Sigui com sigui, la qüestió incontrovertible és que, d'una manera o altra, els pitagòrics descobriren les magnituds incommensurables, les quals trencaven la limitació del «tot es nombre». Això comportà la necessitat d'examinar les seves creences i d'incorporar les magnituds geomètriques com a independents del nombre. Caldria, doncs, avançar en la via de la raó per tal d'establir el marc adequat per al seu estudi. Tot això contribuïa a la maduració del mètode axiomàtic deductiu.

³³Vegeu *Primers analítics* I. 23. 41a.

³⁴Que q no pot ser igual a 1, és evident perquè en aquest cas la diagonal AB seria igual un nombre enter p de vegades el costat AC , i això no pot ser. Quant ha suposar que p i q no tenen divisors comuns està justificat pel fet que si en tinguessin només caldria dividir pel seu màxim comú divisor per eliminar-los; Euclides mostra el procediment a X.3.

1.2.4 Plató [428–347 aC]

Viu en el període de decadència d'Atenes i funda l'Acadèmia [~ 377 aC], la qual consagrada a la recerca filosòfica i científica dominarà la vida intel·lectual de la ciutat durant un segle i no serà tancada fins l'any 529 per l'emperador cristià Justinià. Atorga un lloc important a les matemàtiques en el seu sistema educatiu i en la seva pròpia obra trobem diversos passatges matemàtics.³⁵

Els platònics distingeixen entre el món sensible i el món de les Idees. Mentre els objectes sensibles estan subjectes al canvi, allò que representen del món de les Idees és immutable i permanent, i el coneixement veritable s'ha de buscar allí. Les Idees són eternes i anteriors a tota experiència; a través de la nostra ànima immortal podem elevar-nos al coneixement de les Idees mitjançant la reminiscència provocada pels objectes sensibles. En ser els objectes matemàtics d'una naturalesa no sotmesa al canvi, es considera que pertanyen a un món que transcendeix el sensible, intermedi entre aquest i el de les Idees. Aristòtil, en el llibre A 6 de la *Metafísica*, quan contrasta el sistema platònic amb el pitagòric, ho expressa així:

A més, entre els objectes sensibles i les Idees, Plató admet una classe intermèdia, els éssers matemàtics, diferents dels objectes sensibles en ser eterns i immòbils, i diferents de les Idees en ser molts d'ells semblants, mentre que cada Idea és l'única de la seva espècie.

En definitiva, Plató considera que el món sensible es conforma segons les lleis de la Matemàtica; per conèixer el món només cal conèixer el model que en dóna la Matemàtica, la qual, per l'estatus assignat als seus objectes, proporciona necessàriament proposicions verdaderes. Quant a la seva aportació personal a l'establiment del mètode axiomàtic deductiu no sabem si va existir. El que sí és clar és l'aportació que va significar per a la seva evolució, l'impuls que va donar a l'estudi i l'ensenyament de les Matemàtiques a través de l'Acadèmia. Veurem en el capítol 3 que coneixia el raonament per hipòtesi, i probablement el va formalitzar o coneixia la seva formalització i la seva eficàcia en la recerca. Finalment, per a ell la veritable geometria estava restringida a les construccions amb regle i compàs. Si fem cas a Plutarc [I–II] en la *Vida de Marcel*, era contrari a la incorporació, en la geometria, de noves eines que ampliessin el camp de construccions geomètriques possibles; considerava que «els problemes que no admetien demostració lògica i convenient» —en el sentit que en la seva resolució només intervinguessin rectes i circumferències— no podien ser considerats en el terreny de la geometria:³⁶

³⁵Vegeu HEATH [1921], I, 284–308 de l'edició de 1981.

³⁶Vegeu també la traducció de la Fundació Bernat Metge a la secció 8.9.1, i també un fragment del mateix autor a la secció 8.9.2.

Van ser, és cert, Èudox i Arquitas els que van començar a posar en moviment l'art tan apreciat i aplaudit de la maquinària, ornant amb certa elegància la geometria, i confirmant, mitjançant exemples senzills i mecànics, certs problemes que no admetien la demostració lògica i convenient com, per exemple: el problema no subjecte a demostració de les dues mitjanes proporcionals, principi i element necessari per a un gran nombre de figures, que els portaren a una inspecció material mitjançant línies intermèdies col·locades entre línies corbes i segments. Però després que Plató es va indisposar i es va indignar contra ells, perquè degradaven i feien malbé, el més excel·lent de la geometria al traslladar-la de l'incorpori i intel·lectual al sensible i utilitzar-la en els cossos que són objecte d'oficis ordinaris manuals, va decaure la mecànica separada de la geometria i menyspreada dels filòsofs, venint a ser, per tant, una de les arts militars.

El perquè d'aquesta posició de Plató no és clar, tot i que s'apunten diverses hipòtesis.³⁷ Dues d'elles estarien entre les més argumentades. La primera seria la consideració de que la recta i el cercle eren les figures més simples amb una configuració en què dominava la idea de simetria. Per aquest motiu ocuparien un lloc preeminent en el reialme dels objectes matemàtics i a ells s'hauria de reduir la veritable geometria. L'altre, és defensada per Carrega així:

Es pot doncs pensar, però això no és més que una hipòtesi, que les construccions amb regla i compàs han estat posades per davant de les altres, per poder donar tractament geomètric als nous nombres posats en evidència pel teorema de Pitàgoras. A més, prohibint d'altres tipus de construcció es defensaven davant de noves crisis.

És interessant aquesta última afirmació pel fet que, realment, la limitació imposada per l'ús exclusiu del regla i del compàs, la qual deixava fora de la geometria els problemes que necessitaven d'altres tipus de corbes per ser construïts, impedia l'aparició de noves magnituds. Així, aquestes, no podrien posar en crisi l'edifici de la geometria tal com s'havia concebut, i s'evitaria una nova revisió de fonaments com la provocada pel descobriment dels incommensurables.

1.2.5 Aristòtil [384–322 aC]

Aristòtil no era matemàtic de professió, però estava assabentat dels coneixements elementals de l'època i dels seus mètodes.³⁸ Es planteja el problema del tipus

³⁷Vegeu LEBESGUE [1950], 19–20 de l'edició de 1987, i CARREGA [1981], 4–6 de l'edició de 1989.

³⁸Vegeu HEATH [1949].

d'existència dels objectes matemàtics, i no accepta l'estatus que els donen ni els pitagòrics ni Plató.³⁹ Defensa que els objectes matemàtics —nombres i figures geomètriques— no tenen existència pròpia independent dels objectes sensibles, no estan separats d'ells ni es confonen amb ells. Tampoc en són principi, encara que són permanents i immutables. Són abstraccions dels objectes sensibles i, tot i no tenir existència pròpia i separada, «es pot arribar a resultats excel·lents afirmant com a separat allò que no existeix com a separat, i així ho fan l'aritmètic i el geòmetra». En perdre els objectes matemàtics la posició ontològica del discurs platònic, la certesa de les seves proposicions depèn únicament de que puguin ser demostrades amb un mètode rigorós i ben establert. Així la contribució d'Aristòtil a la Matemàtica se centra principalment en el terreny epistemològic d'establiment d'aquest mètode, distingint-ne i classificant-ne les nocions bàsiques. Un dels textos més rellevants en aquest aspecte és els *Analítics segons*, capítol I.10,⁴⁰ del qual s'extreu que els termes amb què tracta la matemàtica són:

Termes primitius: aquells dels quals s'admet el significat i l'existència sense demostració.

Termes derivats i propietats: aquells dels quals s'admet el significat sense demostració, però no l'existència del terme o la veritat de la propietat, les quals han de ser demostrades.

Axiomes: els propis de la matemàtica (postulats), i els comuns a totes les ciències (nocions comunes).⁴¹

Per exemple, en els *Elements* d'Euclides, la recta serà un terme primitiu. La circumferència i el quadrat seran termes derivats dels quals s'admet que entenem el significat però l'existència s'establirà, en el primer cas, mitjançant un postulat —el tercer dels cinc que proposa— i, en el segon cas, mitjançant una demostració —la del teorema I.46—.

Quant a les demostracions, haurien de consistir en cadenes d'afirmacions sobre els objectes matemàtics, establertes de manera que cadascuna d'elles hauria de ser automàticament certa si ho eren totes les anteriors. Aristòtil va iniciar l'estudi de les lleis que regien la formació d'aquestes cadenes; concretament en els *Primers Analítics* tracta el sil·logisme i la deducció. En definitiva, amb l'aportació d'Aristòtil queden establerts tots els components que permetran establir el mètode axiomàtic deductiu com a eina de certificació de la veritat matemàtica.⁴²

³⁹Vegeu els llibres M i N de la *Metafísica* i, també, GÓMEZ PIN [1998], 83–107.

⁴⁰Vegeu la secció 8.1.1 i DOU [1986], 65–66.

⁴¹En aquell temps la paraula axioma es reservava per a les nocions comunes. Nosaltres quan parlem d'axiomes ens referirem tant a les nocions comunes com als postulats.

⁴²Per a una extensa reflexió sobre les creences pitagòriques i les seves conseqüències, l'ontologia i l'epistemologia de les matemàtiques en Plató i la caracterització del mètode axiomàtic en Aristòtil consulteu CAÑÓN [1993], 1–93.

1.3 Els *Elements* d'Euclides. Definicions i axiomes del llibre I.

Poca cosa se sap de la vida d'Euclides. Es diu que Ptolemeu I, el qual va governar en el període 306–285 aC, el va invitar a ser professor del Museu d'Alexandria, centre cultural principal en aquells moments. Els seus *Elements*⁴³ no són tan una obra de creació com de compilació de resultats obtinguts des del temps de Tales; els resultats que s'hi recullen tenen un caràcter fonamental, així s'entén la seva enorme influència sobre Galileo, Newton, Kant i molts d'altres, fins arribar al mateix segle XIX, quan Hilbert va poder establir-ne definitivament els postulats. Sobre aquesta obra Procle afirma:⁴⁴

Però admirem especialment el seu treball sobre els elements de la geometria, per l'ordre que hi regna, per l'elecció dels teoremes i problemes que resol per a la instrucció dels principiants. No ha inclòs tots aquells que estava en condicions de donar, sinó únicament aquells capaços de funcionar com una introducció. També ha inclòs raonaments que són conduïts de totes les maneres possibles, ja partint de les causes, ja remuntant els fets, però sempre són convincents i irrefutables, exactes i dotats del to més científic.

L'estructura de l'obra s'adapta a l'ideal de sistematització deductiva que proposa el mètode axiomàtic-deductiu. Així en el llibre I trobem:

- Els termes primitius disfressats de definicions. Aquestes solen ser defectuoses perquè es basen en termes primitius no definits.
- Els axiomes (postulats i nocions comuns), proposicions de partida de les que s'accepta la veritat sense cap tipus de demostració. Recordem que per a Aristòtil les nocions comunes són convenientes i comunes a totes les ciències, mentre que els postulats només es refereixen a la matèria que tractem .

⁴³Sobre els manuscrits, escolis i edicions dels *Elements* fetes fins a finals del segle XIX, vegeu HEATH [1908], 46–113. En l'estudi que farem utilitzarem la traducció anglesa de Heath en l'obra citada, juntament amb l'espanyola de Puertas de 1994. La primera es va fer a partir del text grec establert per Heiberg [1883–1886], el qual va compilar de còpies extretes d'una edició feta per Teó d'Alexandria [IV], —la còpia més antiga data de l'any 888 i es troba a la Bodleian Library de la Oxford University—, i d'un manuscrit de la Biblioteca Vaticana del segle X, el qual és còpia d'una edició més antiga que la de Teó. La segona està traduïda del text de Heiberg i d'una revisió d'aquesta feta per Stamatis [1969–1973]. També hem disposat de VERA [1970], 689–980, en què no estan incloses totes les demostracions. Quant als escolis, Heath explica que Heiberg n'havia aplegat al voltant de mil cinc-cents, però que el seu interès no es podia comparar als *Commentarii* de Procle que trobem traduïts a MORROW [1970].

⁴⁴Vegeu REY PASTOR–BABINI [1984], 80, i MORROW [1970], 57.

- Els teoremes o proposicions derivades que s'estableixen a partir de l'aplicació rigorosa de regles lògiques sobre els termes primitius, els objectes definits a partir d'ells, els axiomes, i les proposicions ja demostrades.

El llibre I comprèn, a més de les definicions, nocions comunes i postulats, quaranta-vuit teoremes que giren al voltant de les congruències i propietats dels triangles, construccions elementals com bisectrius, punts mitjans, perpendiculars, teoria de les paral·leles i comparació i aplicació d'àrees, acabant amb una demostració del teorema de Pitàgores i el seu recíproc.

Comencem la seva anàlisi observant algunes de les 23 definicions:⁴⁵

- D1. Un punt és allò que no té parts.
- D2. Una línia és una longitud sense amplada.
- D3. Els extrems d'una línia són punts.
- D4. Una línia recta és aquella que descansa d'una manera igual sobre els seus punts.

Fem notar que:

- En lloc d'establir el punt com un terme primitiu, fa referència al terme “parts” que no defineix.
- Refereix la línia als termes longitud i amplada no definits.
- No defineix la línia com formada de punts —sinó no caldria que diguéssim que els extrems de la línia són punts— així evita la consideració de la línia pensada com una suma de magnituds indivisibles, la qual ens portaria a una de les contradiccions de Zenó.
- En canvi parla dels punts de la línia, aquí hi ha amagat un altre concepte primitiu el de relació entre punts i línies. Hilbert resoldrà la qüestió dels conceptes primitius així:⁴⁶

Pensem tres tipus diferents d'ens. Anomenem els del primer sistema, punts, i els designem amb A, B, C, \dots , els ens del segon sistema els anomenem rectes i els designem amb a, b, c, \dots , els ens del tercer sistema, els anomenem plans, i els designem amb $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ [...] Concebem els punts, rectes i plans en certes relacions recíproques i expressem aquestes relacions amb paraules tals com “estar situat”, “entre”, “congruent”, “paral·lel”, “continu”. La descripció completa d'aquestes relacions feta exactament i amb fins matemàtics resulta dels axiomes de la Geometria.

⁴⁵Trobareu totes les definicions a la secció 8.4.1.

⁴⁶Vegeu HILBERT [1899], edició espanyola de 1991, 3.

Quant als postulats i nocions comunes, se'n troben a moltes edicions cinc de cada classe, algunes vegades reunits en una sola categoria.

Postulats:

- P1. Es pot traçar una recta des de qualsevol punt a qualsevol altre.
- P2. Es pot prolongar en línia recta una recta delimitada.
- P3. Per cada centre i radi es pot traçar un cercle.
- P4. Tots els angles rectes són iguals entre sí.
- P5. Si una recta incident sobre dues rectes fa angles interns i del mateix costat més petits que dos rectes, llavors les dues rectes indefinidament prolongades es trobaran en aquest mateix costat.

Nocions comunes:

- NC1. Coses iguals a una tercera són iguals entre sí.
- NC2. Si a coses iguals s'afegeixen coses iguals els totals són iguals.
- NC3. Si de coses iguals s'extreuen coses iguals els romanents són iguals.
- NC4. Coses congruents entre sí són iguals.
- NC5. El tot és més gran que la part.

Algunes versions dels *Elements* n'afegeixen algunes més:

- NC6. Si a coses desiguals s'afegeixen coses iguals, les totals són desiguals.
- NC7. Les coses dobles que una mateixa cosa són iguals entre sí.
- NC8. Les coses meitat que una mateixa cosa són iguals entre sí.

De vegades s'inclou una altra noció comuna que s'utilitza en la demostració del teorema I.4:⁴⁷

- NC9. Dues rectes no tanquen regió.

1.3.1 Observacions sobre els postulats i les nocions comunes.

- En el postulat 1, quan diu que es pot traçar una recta ho diu en el sentit que aquesta és única, —d'aquesta manera ho utilitza en la demostració de I.4 que veurem més endavant—, i si és així, es pot prescindir de NC9 que segurament és una interpolació posterior en el text. Procle en els seus *Comentaris* diu al respecte:⁴⁸

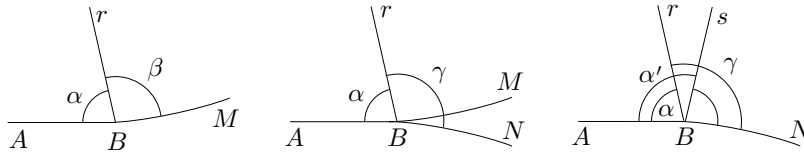
⁴⁷El nombre en xifres romanes representa el llibre i el nombre en xifres aràbigues representa el nombre del teorema; així VI.3 significa teorema tres del llibre sis.

⁴⁸Vegeu MORROW [1970], 187.

Per tant dues línies rectes no tanquen regió i era amb coneixement d'això que l'autor dels *Elements* deia en el primer dels seus postulats, es pot traçar una línia recta des d'un punt a un altre punt, implicant que és una la recta que passa per dos punts i no en són dues.

A més, P4 evita que la recta per dos punts es pugui prolongar de dues maneres diferents —en el sentit que els segments resultants de la prolongació no estiguin sobre la mateixa recta—, perquè si així fos existirien angles rectes desiguals. Efectivament,

Sigui AB que pot ser prolongada pel costat de B de dues maneres diferents, fins a M i fins a N . Considerem la perpendicular r per B a AM , en què $\alpha = \beta$ són els angles rectes resultants. Llavors l'angle γ que forma r amb BN verifica $\gamma > \beta = \alpha$ i la perpendicular a AN per B serà una recta s , diferent de r , continguda a la regió determinada per γ . D'això resulta que l'angle recte α' que forma s amb AB és major que l'angle recte α contra l'afirmació de P4.



D'aquí també es desprèn que és impossible que dues rectes tinguin un segment en comú.

- El postulat 2 no assegura que la recta sigui “infinita”. Es defuig constantment el parlar de l'infinit. Les rectes sempre són finites; l'única cosa que assegura és que si tenim la recta AB podem considerar un punt C sobre la mateixa recta “més enllà” del B seguint l'ordre (A, B) . Segons aquest postulat les rectes es poden prolongar però en resulta una altra recta finita.
- El postulat 3 només assegura que es pot traçar qualsevol circumferència, però no que es pugui traslladar en el sentit que es pugui construir una circumferència de radi igual a la donada en un altre lloc. Això últim es demostrarà en els dos primers teoremes d'aquest llibre.
- Quant al postulat 4 és interessant discutir el que Heath diu:⁴⁹

El postulat 4 és moltes vegades classificat com un teorema. Però, en qualsevol cas, és posa abans del postulat 5 per la senzilla raó que el postulat 5 no seria cap tipus de criteri a no ser que els angles rectes siguin magnituds determinades; el postulat 4, llavors, declara aquests com a tals. Però això no és tot. Si es volgués provar el postulat 4 com un teorema, això tan sols seria possible aplicant un parell d'angles

⁴⁹Vegeu HEATH [1921], edició de 1981, I, 375.

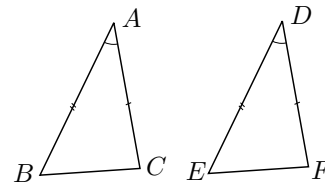
rectes adjacents en un altre parell. Aquest mètode no és vàlid a no ser que s'assumeixi la invariabilitat de les figures, que s'hauria per tant, d'introduir com un postulat anterior.

Abans d'entrar en l'anàlisi del comentari, observem com actua Euclides en el teorema I.4, en què demostra el criteri de congruència de triangles costat–angle–costat, la qual cosa tindrà incidència en l'afirmació inicial sobre la classificació com un teorema del postulat 4.

• **Teorema I.4**

Si dos triangles ABC i DEF tenen dos costats AB i AC respectivament iguals a DE i EF , i tenen els angles \widehat{BAC} i \widehat{EDF} , continguts pels dos costats iguals, iguals, llavors tindran la base BC igual a la base EF , el triangle ABC serà igual al triangle DEF , i els altres angles seran respectivament iguals als altres angles, a saber els subtendits pels costats iguals.

Euclides aplica el triangle ABC sobre el triangle DEF , col·locant el punt A sobre el punt D i el segment AB sobre el segment DE , la qual cosa el porta a afirmar que:



- El punt B coincidirà amb el punt E perquè $AB = DE$.
- La recta AC coincidirà amb la recta DF perquè $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$.
- El punt C coincidirà amb el punt F perquè $AC = DF$.

Llavors conclou que $BC = EF$,⁵⁰ que tot el triangle ABC coincidirà amb el triangle DEF i li serà igual, i que tots els altres angles seran iguals, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ i $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$. \square

En la seva demostració, Euclides “aplica una figura sobre una altra”, la qual cosa ve a suposar un “transport i superposició sense deformació” de figures. Se suposa implícitament que la figura després de ser aplicada és igual que abans de l'aplicació i, per tant, que coses iguals poden ser portades a ser coincidents. Relacionada amb aquesta qüestió trobem la noció comuna NC4, la qual afirma que coses coincidents, —s'entén per aplicació d'una sobre l'altra—, són iguals, però no trobem l'axioma recíproc del qual es fa ús implícit en I.4. Llavors, si no s'estableix la validesa d'aquest transport, podria ser que en aplicar una figura

⁵⁰ Aquesta igualtat va acompanyada del comentari: «perquè si quan B coincideix amb E i C amb F , la base BC no coincideix amb la base EF , dues rectes tancaríen una regió, la qual cosa és impossible». HEATH [1908], I, 249 de l'edició de 1956, explica que segons Heiberg això és una interpolació posterior, fet que justifica perquè en una versió d'an-Naziri [† ca. 922] s'inclou després d'acabada la demostració.

sobre una altra d'igual, la inicial i l'aplicada no fossin iguals en haver patit una deformació en el transcurs de l'operació. En aquest cas la demostració de I.4 no es pot dur a terme tal com es fa. Cal establir algun postulat de congruència que solucioni el tema.

D'altra banda si acceptem els mètodes d'Euclides, de validesa no declarada explícitament, assumint, en paraules de Heath, la invariabilitat de les figures, és cert que es pot demostrar P4 com un teorema⁵¹ i es podria excloure del grup de postulats. Finalment, tenint en compte aquest fet i que, a més, P4 no s'utilitza en el llibre I fins arribar al teorema I.47 sembla encertat opinar que P4 s'ha introduït abans que P5 per donar-li sentit a aquest últim postulat.

- Del postulat 5 només direm, de moment, que el seu enunciat no comparteix la característica de simplicitat dels altres. Es veu clarament que té a veure amb l'existència de paral·leles. De fet és així i ho analitzarem més a fons en les seccions posteriors.

1.3.2 Mancances axiomàtiques

Que els cinc postulats d'Euclides no són suficients per desenvolupar la seva geometria ha quedat en evidència quan hem considerat el teorema I.4 en què utilitza de forma implícita una mena de “transport sense deformació”. Aquesta no és l'única mancança axiomàtica i, tot seguit, en tractarem dues més.

Continuïtat

Quan estudiem el teorema I.1 —en la secció 1.6— en què es planteja la construcció d'un triangle equilàter de costat donat, veurem que tot anirà bé fins que considerem que existeix el punt de tall de dues circumferències de radi igual al costat donat i amb els centres separats per aquest costat. Per assegurar això cal postular-ho de sortida, i una manera de fer-ho seria imposant algun axioma de continuïtat de les línies.⁵²

Es podria argumentar contra aquesta observació que en un estat inicial de desenvolupament del sistema axiomàtic seria natural no incloure aquest axioma per la seva evidència, però el mateix haguéssim pogut dir d'algun dels altres, —no sembla igual d'evident que les rectes es puguin prolongar?—. A més, qualsevol que estigués sotmès a la limitació pitagòrica del “tot es nombre” podria rebatre molt fàcilment la construcció del teorema I.1, si abans no s'hagués establert un axioma que tirés per terra aquesta hegemonia numèrica tal com l'entenien els primers pitagòrics. La seva creença implicava que donats dos segments existia una unitat comuna de mesura, —en el sentit que aquesta amidava un nombre

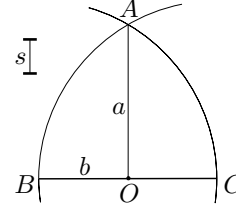
⁵¹Vegeu l'activitat 1.2.1

⁵²Parlarem d'aquest tema a la secció 3.6.

enter de vegades cada segment—, i per tant existia una unitat màxima de mesura per a cada parella de segments. Llavors des d'aquest punt de vista i utilitzant el teorema de Pitàgores l'argumentació pitagòrica hagués pogut ser així:

Sigui BC el segment donat, suposem que existeix el punt A d'intersecció de les circumferències (B, BC) i (C, BC) , i sigui O el punt mitjà de BC .

Sigui s la unitat comuna màxima de mesura de OA i OB , i siguin a i b els nombres que donen la mesura d'aquests segments. Llavors pel teorema de Pitàgores



$$a^2 = OA^2 = AB^2 - OB^2 = (2 \cdot OB)^2 - OB^2 = 3 \cdot OB^2 = 3b^2.$$

Això implica que a^2 és múltiple de 3 i, per tant, a també. O sigui que a^2 és múltiple de 9 i, per tant $3b^2$ també; la qual cosa implica que b^2 és múltiple de 3 i, per tant, b també. Però llavors, $3s$ també serà unitat comuna de mesura i això no pot ser perquè s era la màxima. Consegüentment, cap unitat de mesura que mesuri OB pot mesurar OA i si, segons la limitació pitagòrica, el nombre ho mesura tot, no pot existir A perquè no hem pogut establir la mesura de OA comparada amb la de OB . Una manera d'evitar aquest desenllaç i de trencar amb la limitació pitagòrica seria la d'imposar l'existència del punt A a partir d'algun axioma de continuïtat de línies.

Paral·lelisme

Presentarem uns objectes que compleixen els cinc postulats i en canvi no verifiquen el teorema I.31 que afirma l'existència de paral·lela per un punt exterior a una recta.

Considerem la superfície d'una esfera i ens plantegem de cercar quines línies podrien ser pensades com a “rectes” sobre ella. Si pensem que la distància més curta entre dos punts sobre la superfície d'una esfera ve donada per les circumferències màximes —circumferències que resulten de la intersecció de l'esfera amb un pla que passi pel seu centre—,⁵³ és natural considerar aquestes circumferències com les rectes sobre l'esfera. En definitiva, pensem un model sobre l'esfera de centre O en què els objectes primitius són:

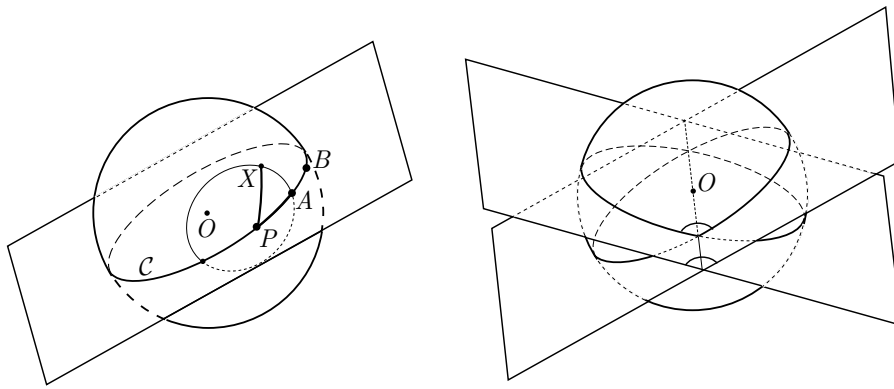
- Punts: Els punts P de la superfície de l'esfera.
- Rectes: Les circumferències màximes C de l'esfera.

Altres objectes:

- Els segments seran arcs PA de circumferència màxima.

⁵³Vegeu l'activitat 1.2.2.

- Donat un punt P i un arc de circumferència màxima PA , considerem la línia que conté tots els punts X de l'esfera tal que l'arc PX de circumferència màxima és igual a PA . El punt P s'anomena centre i l'arc PA radi de la circumferència determinada pels punts X .
- L'angle format per dos segments serà l'angle format pels dos semiplans que passen pel centre de l'esfera i contenen els segments.



Observem que es verifiquen els cinc postulats:

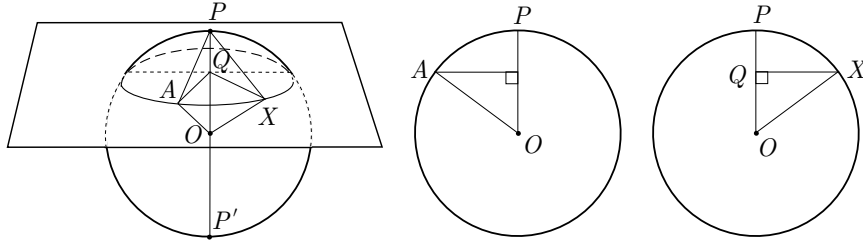
- P1. Donats dos punts de l'esfera existeix una circumferència màxima que els conté.

Efectivament, només cal considerar un pla que passi pels dos punts i el centre de l'esfera. Notem que si els dos punts no estan alineats amb el centre —no són diametralment oposats— llavors la circumferència és única i, per tant, fins i tot es verifica l'unicitat de la recta.⁵⁴

- P2. Un arc PA de circumferència màxima es pot prolongar sempre, malgrat ser finita la seva llargària. És a dir, podem trobar un punt B més enllà del A seguint l'ordre (P, A) .

- P3. Donat un punt P de l'esfera i un arc PA es pot construir una circumferència de centre P i radi l'arc PA . Només cal considerar un pla per A , perpendicular al diàmetre PP' per P ; la intersecció d'aquest pla amb l'esfera és la circumferència cercada.

⁵⁴Si s'és molt escrupolós en aquest punt i es vol exigir l'unicitat per a qualsevol parella de punts, cal modificar el model. Veurem una manera de fer-ho al final de la secció.



Efectivament, si Q és projecció de A sobre el diàmetre PP' , per a tots els punts X de la intersecció es compleix que els triangles AQO i XQO són iguals en ser rectangles amb un catet QO i la hipotenusa iguals. Per tant, $\widehat{AOP} = \widehat{XOP}$ i consegüentment els arcs PA i PX són iguals.

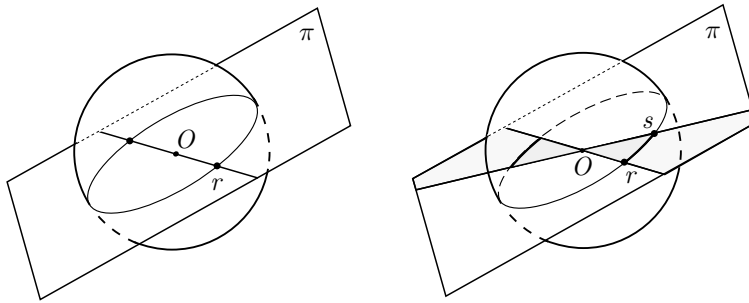
P.4 Tots els angles rectes són iguals.

És immediat en ser tots els angles determinats per plans perpendiculars iguals.

P.5 És cert perquè dues circumferències màximes sempre es tallen en punts diametralment oposats, és a dir es tallen dels dos costats d'una circumferència màxima que la talli i, per tant, del costat d'aquesta tal que la suma d'angles interiors és menor que dos angles rectes.

En canvi, tot i complir-se el cinc postulats, les rectes paral·leles no existeixen perquè dues circumferències màximes sempre es tallen sobre l'esfera en els punts de la recta intersecció dels plans que les contenen. Llavors el teorema I.31 — que afirma l'existència d'una paral·lela per un punt exterior a una recta— no es verifica, i això deixa al descobert una mancança axiomàtica, la qual serà analitzada en la secció següent.

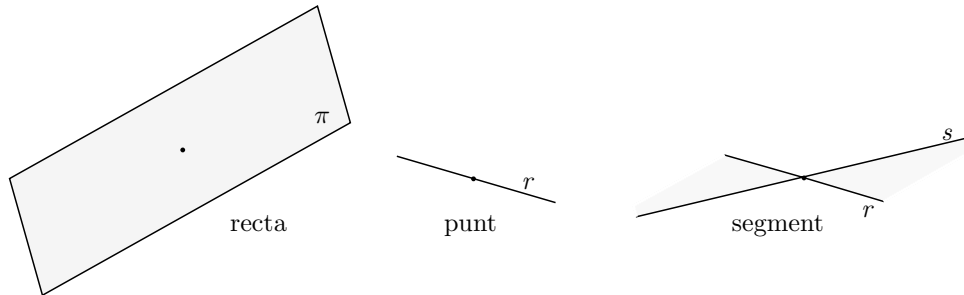
Si volem afinar el model presentat, per tal d'aconseguir la unicitat de la recta per dos punts, només cal identificar cada punt de l'esfera amb el seu punt diametralment oposat. Així aconseguim eliminar els únics casos en què podien existir més d'una recta per dos punts.



Es pot donar un model geomètric que permet visualitzar aquesta situació. Utilitzem el fet que dos punts diametralment oposats venen determinats per una única

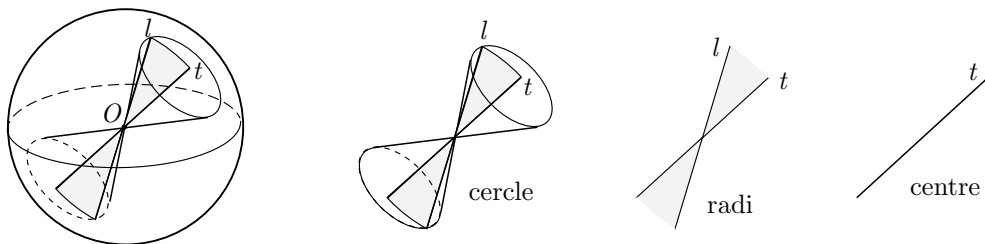
recta r que passa pel centre O de l'esfera, i que una circumferència màxima està continguda en un únic pla π que passa per aquest centre. Llavors considerem els objectes primitius següents:

- Punts: Les rectes r que passen per un punt fixat O de l'espai.
- Rectes: Els plans π que passen pel punt fixat O .



Notem que:

- Els segments són recintes del pla continguts entre dues rectes r i s que passen pel punt O .
- Les circumferències són els cons de doble full amb el vèrtex en el punt O i que té per generatriu una recta l per O i per eix una altra recta t per O , de manera que el segment-recinte lt , i la recta t són respectivament el radi i el centre de la circumferència en el nou model.

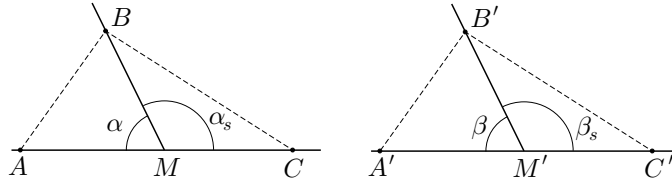


Activitats 1.2

1. Considereu vàlida la suposició d'Euclides que les figures iguals poden portar-se a ser coincidents. Demostreu que tots els angles rectes són iguals seguint els passos següents: \overline{B}

i) Demostreu que si α i β són dos angles iguals, també ho són els seus adjacents α_s i β_s .

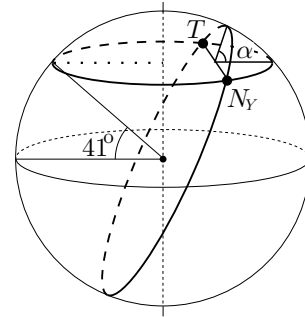
Indicació: Observeu la figura adjunta i considereu A, B, C i A', B', C' tals que $AM \equiv A'M'$, $MC \equiv M'C'$ i $BM \equiv B'M'$.⁵⁵ Aquesta és una operació vàlida gràcies a les proposicions I.2 i I.3, les quals permeten traslladar segments.⁵⁶



- S** ii) Demostreu que si α, α_s és una parella d'angles adjacents iguals i β, β_s n'és una altra, llavors $\alpha = \beta$ i, consegüentment, tots els angles rectes són iguals. *Indicació:* Supposeu $\alpha \neq \beta$.

- E₂** 2. New York i Tarragona es troben aproximadament sobre el mateix paral·lel, les dues tenen una latitud pròxima als 41° .

i) Esbrineu, observant el gràfic, quin serà el camí més curt per anar d'una ciutat a l'altra, el que segueix el paral·lel o el que segueix el cercle màxim que passa per les dues ciutats. Justifiqueu la resposta.



Indicació: Feu girar el paral·lel un angle α , al voltant de la corda TN_Y . Els dos cercles quedaran representats en un mateix pla. Dibuixeu-los agafant els mateixos radis que a la figura i observeu-los.

- S** ii) Comproveu sobre un globus de la Terra, la veracitat del resultat de l'anterior apartat, utilitzant un cordill per mesurar els dos arcs. Estimeu quina és cadascuna de les distàncies si sabem que el radi de la Terra mesura 6367 KM.

3. Si considereu la geometria sobre l'esfera, trobeu algun fet rellevant sobre:

- S** i) El conjunt de rectes perpendiculars a una recta donada.
 ii) La suma d'angles d'un triangle.

4. Considereu el següent conjunt d'axiomes on esports, persones i la relació entre persones i esports que llegim "la persona A practica l'esport B" o "l'esport B és practicat per la persona A" són termes primitius:

A₁: Tot esport té unes persones que el practiquen.

A₂: Considerats dos esports qualsevol, sempre hi ha quatre persones i no més

⁵⁵El símbol \equiv té el significat de congruència en el sentit de coincidència per superposició. Quan el context no porti a confusió utilitzarem el símbol $=$ en lloc de \equiv , i utilitzarem amb el mateix significat els mots igualtat i congruència.

⁵⁶Vegeu la secció 1.6.1.

de quatre persones que coincideixen en la seva pràctica.

A₃: *Qualsevol persona practica dos esports i només dos.*

A₄: *Es practiquen un total de cinc esports.*

i) *Esbrineu si algun axioma es pot demostrar a partir dels altres, i demostreu que les següents proposicions són teoremes que es dedueixen dels axiomes:*

T₁: *Hi ha exactament quaranta persones.*

T₂: *Cada esport té exactament setze practicants.*

ii) *Sabríeu enunciar algun teorema que impliqués el concurs dels quatre axiomes junt amb el axioma **A₅** següent?*

A₅: *Existeix una persona tal que unes altres catorze persones no practiquen cap dels dos esports practicats per aquella.*

S

□

1.4 Anàlisi del postulat 5 i l'existència de paral·leles

Es tracta d'esbrinar en quin teorema parla per primera vegada de rectes paral·leles, quan utilitza per primera vegada el postulat 5 i quina relació guarda amb l'existència de paral·leles.

Veurem que el primer lloc on trobem una referència a les rectes paral·leles és en el teorema I.27, en què dóna una condició suficient de paral·lelisme, i amb el seu ajut construeix, en el teorema I.31, una paral·lela a una recta donada. De quina manera ho aconsegueix, si hem vist que amb aquests postulats es podien construir geometries sense paral·leles? La resposta la trobarem en què per demostrar el teorema I.27 ha utilitzat el teorema I.16 que suposa un postulat no establert. D'altra banda cal notar que per demostrar aquests teoremes no ha utilitzat en cap moment el cinquè postulat. La primera vegada que l'utilitza és en el teorema I.29, el qual servirà per establir —mitjançant una reducció a l'absurd— que no es pot traçar més d'una recta paral·lela a una recta per un punt exterior a ella. Resumint:

- El teorema I.16 li permetrà assegurar, mitjançant I.27 i I.31, l'existència, com a mínim, d'una paral·lela, sense la intervenció del cinquè postulat.
- El postulat 5 li permetrà assegurar, mitjançant I.29, la no existència de més d'una paral·lela.

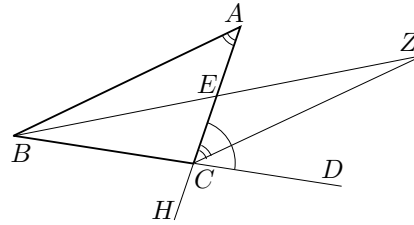
Comprovem totes aquestes afirmacions estudiant els teoremes implicats.⁵⁷

⁵⁷Farem constar els teoremes utilitzats en les demostracions. Així, per exemple, l'expressió “—per I.10—” voldrà dir que el teorema I.10 justificarà l'execució del pas efectuat. Molts dels

• **Teorema I.16**

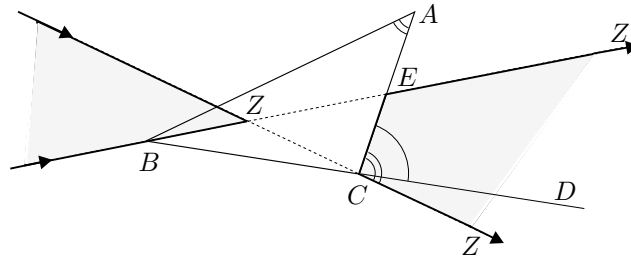
En tot triangle ABC , si prolonguem un dels costats BC , l'angle extern \widehat{DCA} és major que cadascun dels angles interns i oposats \widehat{CBA} i \widehat{CAB} .

Per provar-ho Euclides prolonga BC fins D , considera el punt mitjà E —per I.10— de AC i prolonga BE fins Z de manera que $BE = EZ$. Després considera el triangle ZEC i prolonga AC fins H . Com que $AE = EC$, $BE = EZ$ i —per I.15— $\widehat{AEB} = \widehat{ZEC}$, obté —per I.4— que $\widehat{BAE} = \widehat{ZCE} < \widehat{ACD}$.



Acaba dient que si fa el mateix a partir de la divisió de BC en dues parts iguals sortiria que $\widehat{ACD} = \widehat{BCH} > \widehat{ABC}$. \square

Aquí hi ha una operació no declarada en els axiomes inicials.⁵⁸ S'ha suposat que Z no cau entre B i E , la qual cosa en el model presentat sobre l'esfera no passa. Allí les rectes, quan es prolonguen, tornen sobre elles mateixes. Això vol dir que es podria presentar una situació com la de la figura adjunta, en què Z "torna" i se situa entre B i E . Llavors, $\widehat{BAE} = \widehat{ECZ} > \widehat{ACD}$.⁵⁹



Si Euclides s'imaginava un pla de manera que un punt mòbil sobre una recta no pogués tornar sobre la seva posició primitiva, si no canviava el sentit del seu moviment, ho tenia que haver dit, de la mateixa manera que va proposar el cinquè postulat per evitar l'existència de més d'una paral·lela. L'acceptació de l'operació realitzada en la demostració de I.16 és essencial de cara a eliminar un model com el de l'esfera en què no hi han paral·leles. Efectivament, ara veurem que es pot demostrar l'existència de paral·leles en I.31 mitjançant l'ús de I.16 en I.27.

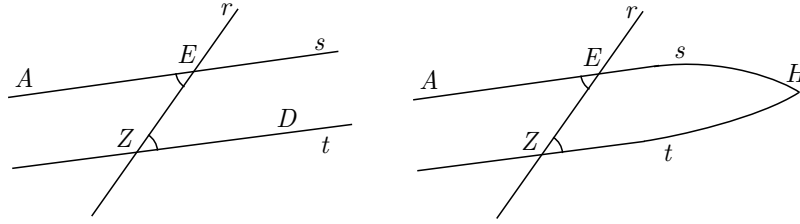
teoremes implicats seran utilitzats sense haver estat presentats i s'estudiaran més endavant. També, hem deixat algunes qüestions relacionades amb la secció present per ser estudiades a les activitats 1.7.

⁵⁸Vegeu DOU [1970], 31 i DOU [1967], 157–159.

⁵⁹La primera igualtat és certa perquè s'ha obtingut de I.4 que també es compleix sobre l'esfera. Notem, també, que Euclides diu que les rectes es poden prolongar, però no diu que, en prolongar-se, no puguin tornar sobre elles mateixes.

• **Teorema I.27**

Si una recta r , en incidir sobre dues rectes s i t fa angles alterns \widehat{AEZ} i \widehat{EZD} iguals entre si, aquestes rectes seran paral·leles entre si.



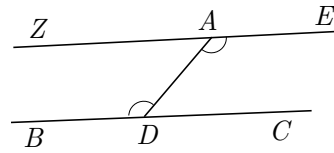
Euclides fa una reducció a l'absurd. Suposa que s i t no són paral·leles. Si es trobessin del costat de D en el punt H tindríem que l'angle \widehat{AEZ} extern al triangle seria igual a l'angle intern \widehat{EZH} i això —per I.16— no pot ser. Llavors, diu que es podria demostrar de manera semblant el mateix per a l'altre costat de la secant. Consegüentment les rectes són paral·leles perquè no es tallen. \square

Ara, ja té tot el que li fa falta per demostrar l'existència de paral·leles.

• **Teorema I.31**

Per un punt donat A traçar una paral·lela a una recta donada BC .

Euclides agafa un punt qualsevol D sobre BC i traça la recta AD . Construeix l'angle \widehat{DAE} igual a \widehat{BDA} —per I.23— i prolonga EA , pel costat de A fins a Z . Llavors —per I.27— ZE i BC són paral·leles.



\square

Passem a analitzar la responsabilitat del postulat cinquè en la impossibilitat de l'existència de més d'una paral·lela per un punt exterior a una recta.

• **Teorema I.29**

La recta r que incideix sobre dues rectes paral·leles, fa angles alterns \widehat{AHT} i \widehat{HTD} iguals entre si i l'angle extern \widehat{EHB} igual a l'interior i oposat \widehat{HTD} i els angles interns del mateix costat iguals a dos angles rectes.

Comença amb una reducció a l'absurd. Suposa, per a la primera part, que els dos angles són diferents i considera $\widehat{AHT} > \widehat{HTD}$. A més —per I.13— els angles adjacents aixecats sobre una mateixa recta sumen dos angles rectes.⁶⁰ Llavors,

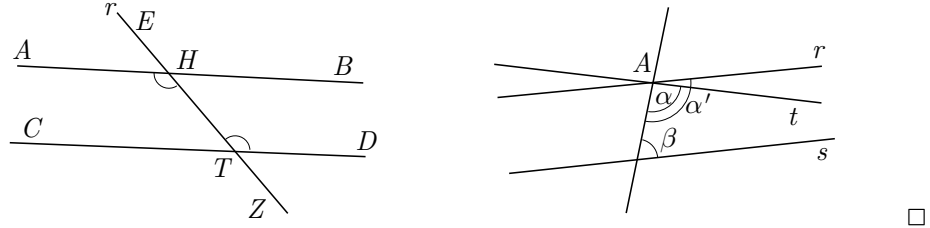
$$\pi = \widehat{AHT} + \widehat{BHT} > \widehat{HTD} + \widehat{BHT}.$$

Això, pel postulat 5, implica que AB i CD es trobarien del costat de B , la qual cosa contradia el fet que AB i CD són paral·leles.

⁶⁰A partir d'ara indicarem el valor de la suma de dos angles rectes pel símbol π .

La segona afirmació és certa perquè —per I.15— $\widehat{AHT} = \widehat{EHB}$ i, per tant, $\widehat{EHB} = \widehat{HTD}$.

Finalment —per I.13— sabem que $\widehat{EHB} + \widehat{BHT} = \pi$, per tant $\widehat{DTH} + \widehat{BHT} = \pi$.



D'aquest resultat obtenim immediatament que no poden existir dues paral·leles diferents, a una recta s , pel punt exterior A considerat. Efectivament, si hi hagués dues paral·leles r i t , a s , pel punt A exterior a s , llavors —vegeu la figura adjunta—

$$\alpha + \beta = \pi \quad \text{i} \quad \alpha' > \alpha \implies \alpha' + \beta > \alpha + \beta = \pi,$$

la qual cosa contradiu el fet que, en ser r i s paral·leles, $\alpha' + \beta = \pi$.

Conclusions sobre l'existència de paral·leles per un punt exterior a una recta:

- L'absència del postulat 5 i el que totes les rectes es puguin “doblar” sense tornar sobre elles mateixes, possibilita l'existència de geometries amb més d'una paral·lela. De fet, es poden construir models d'aquest tipus i la geometria que en resulta s'anomena *hiperbòlica*.
- La presència del postulat 5 i l'existència de rectes que en “doblar-se” tornin sobre elles mateixes, invalida la demostració de I.31 i possibilita l'existència de geometries sense paral·leles, de la qual n'hem vist un model en la secció anterior. La geometria que en resulta s'anomena *el·líptica*.
- La presència del postulat 5 i el que totes les rectes es puguin “doblar” implica l'existència d'una única paral·lela. La geometria que en resulta s'anomena *euclidiana*.

Quant a la geometria euclidiana plana, a la presentació feta per John Playfair el 1795 apareix el teorema I.31 en substitució del postulat 5. També és la forma que li va donar Hilbert quan va presentar l'any 1899 un sistema d'axiomes que determinaven aquesta geometria d'una manera completa.⁶¹ Va assolir aquesta fita a partir de quinze axiomes distribuïts en cinc grups:⁶²

⁶¹Vegeu HILBERT [1899], 3–37 de l'edició espanyola de 1991.

⁶²Es pot trobar una presentació axiomàtica de la geometria euclidiana plana, simplificada amb el supòsit del coneixement de l'estructura dels nombres reals, a REVENTÓS [1993].

- I. Tres axiomes d'incidència.
- II. Quatre axiomes d'ordre.
- III. Cinc axiomes de congruència.
- IV. L'axioma de les paral·leles.
- V. Dos axiomes de continuïtat.

1.4.1 Intents de demostració del postulat 5. Les geometries no euclidianes.

Hem esmentat que la presència o absència de P5 possibilitava l'existència d'una paral·lela o més d'una. Però, i si P5 es pogués demostrar a partir dels altres postulats sense afegir-ne cap de nou? En cas afirmatiu no hi podria haver geometries amb més d'una paral·lela. Al llarg de la història, fins a finals del segle XVII i tot el XVIII, aquest intent de demostració va ocupar l'interès de molts matemàtics.⁶³ Presentarem l'intent de Procle en els seus *Comentaris*,⁶⁴ perquè, entre d'altres coses, posa prèviament, al nostre abast una demostració de la falsedat de P5, la qual permetrà meditar sobre els mètodes de Zenó per criticar els mètodes dels geòmetres. Concretament:

- Adaptarem el raonament de la falsedat de P5 que fa Procle, a un cas concret.
- Comentarem, en la nostra opinió, algunes les seves mancances i implicacions
- Estudiarem la demostració de Procle de la veritat de P5, que té l'objectiu de refutar el tipus de raonament que ha presentat en primer lloc i li permet afirmar que P5 no hauria d'estar entre els postulats.

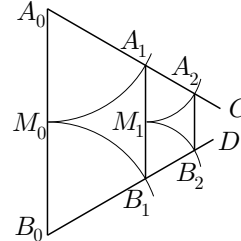
• Adaptació de la prova de falsedat de P5

Suposem que tenim una recta A_0B_0 i dues rectes A_0C i B_0D tals que $\widehat{CA_0B_0} = \widehat{DB_0A_0} = 60^\circ$, és a dir $\widehat{CA_0B_0} + \widehat{DB_0A_0} = 120^\circ < \pi$. Construïm:

⁶³Una selecció de lectures per treballar aquest tema podria ser: SACCHERI [1733], BONOLA [1906] —el qual inclou una traducció a l'anglès de les obres fonamentals de Bolyai i Lobachevski—, HEATH [1908] I, 202–220 de l'edició de 1921, MESCHKOWSKI [1964], FAUVEL–GRAY [1987], HOUZEL [1991], DOU [1992], MONTESINOS [1992], CHABERT [1993] i GREENBERG [1993].

⁶⁴Vegeu MORROW [1970], 289–292.

- El punt mitjà M_0 de A_0B_0 .
- Els punts A_1 i B_1 que resulten d'intersecar les circumferències (A_0, A_0M_0) i (B_0, B_0M_0) amb A_0C i B_0D , respectivament.
- El punt mitjà M_1 de A_1B_1 .
- Els punts A_2 i B_2 que resulten d'intersecar les circumferències (A_1, A_1M_1) i (B_1, B_1M_1) amb A_1C i B_1D , respectivament.
- Els punts M_k , A_k i B_k que resulten de repetir aquesta operació tantes vegades com vulguem.



Observem que s'ha format una col·lecció de trapezis isòsceles $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$ en què A_kA_{k+1} i B_kB_{k+1} no tenen punts en comú, perquè $A_{k+1}B_{k+1} = A_kB_k/2 > 0$. Per tant, les rectes A_0A_1 i B_0B_1 han estat prolongades a cada pas sense tallar-se i, en poder-se repetir aquesta operació tantes vegades com es vulgui sense trobar un punt en comú, el postulat és fals.

• **Mancances i implicacions de la prova de falsedat**

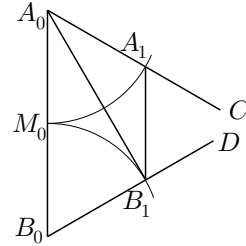
Aquesta prova conté una argumentació del tipus utilitzat per Zenó, concretament en el seu “Aquil·les”:⁶⁵ «El corredor més lent no serà mai avançat pel més ràpid; perquè és necessari que abans arribi el perseguidor al punt des d'on partí el perseguit, de manera que és necessari que el més lent, cada vegada, tingui quelcom d'avantatge». Simplicí [VI], filòsof neoplatònic comentador d'Aristòtil, ho descriu amb més detall i ho expressa dient que Aquil·les no agafarà mai la campiona de la lentitud que és la tortuga, en un exemple en què el primer porta una velocitat deu vegades més gran que la segona.⁶⁶

Aquest tipus d'argumentació es caracteritza per l'acceptació de l'existència d'un infinit potencial i el rebuig de l'infinit actual. És a dir, una operació es pot repetir de manera reiterada després d'executada, però no es pot considerar el conjunt de les infinites repeticions; en geometria podem prolongar i partir els segments tantes vegades com vulguem, però no acceptem la sèrie infinita de prolongacions acabada, amb existència actual. Els grecs no admeten que una suma d'infinites magnituds pugui ser una magnitud finita. De fet, admetre això, significaria admetre el límit com a eina per “actualitzar” una suma infinita. Per a nosaltres, que acceptem la partició “actual” d'un segment en infinits segments, no presenta cap dificultat establir que les prolongacions dels segments A_0A_1 i B_0B_1 es tallen en un punt P tal que, si $A_0B_0 = a$,

$$A_0P = B_0P = \lim_{n \rightarrow \infty} a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \dots + \frac{a}{2^n} = 2a.$$

⁶⁵Vegeu ARISTÒTIL *Física* 239b 14.
⁶⁶Vegeu SIMPLICI [VI dC], 116 de l'edició de 1989.

Procle no està d'acord amb la demostració de falsedat, perquè sap de casos en què dues rectes A_0C i B_0D , tals que $\widehat{CA_0B_0} + \widehat{DB_0A_0} < \pi$, es troben. Només cal considerar, segons ell, en l'exemple anterior com a rectes de sortida A_0C i B_0D , les rectes A_0B_1 i B_0B_1 , les quals es tallen en B_1 .



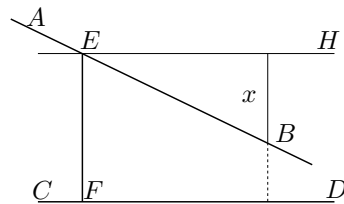
Però, tot i així, és conscient que li cal establir una demostració per a la convergència de totes les parelles de rectes possibles amb la propietat de tenir la suma d'angles menor que π , com indica el postulat.

Abans de presentar aquesta demostració, notem que un dels efectes que aconseguix Euclides amb la introducció de P5 és declarar fora de la geometria l'ús dels arguments en què s'admet l'entrada en joc de l'infinit potencial, però no la de l'infinit actual. Això implica el rebuig a recórrer a procediments infinits. De fet, aquesta és la tònica de l'obra i de la geometria grega en general, la qual cosa conduirà a la recerca d'una via per atacar els problemes que podrien ser tractats amb aquests tipus de procediments, com ara bé el tractament de les àrees i els volums. Aquesta recerca els portaria a la creació del mètode d'exhaustió.

• **Demostració de P5 per Procle**

Siguin AB , CD i EF tals que $\widehat{BEF} + \widehat{DFE} < \pi$ i aquests angles estan pel mateix costat de EF . Traça, pel mateix costat, EH tal que $\widehat{CFE} = \widehat{HEF}$.

Llavors —per I.31, que no necessita de P5— EH i CD són paral·leles. En poder-se separar AB i EH una magnitud x major que qualsevol distància, en particular major que la distància de separació entre les paral·leles EH i CD , les rectes AB i CD s'hauran de tallar



La demostració està acabada, però no s'ha aconseguit l'objectiu de no introduir cap postulat nou i l'intent ha fracassat. Efectivament, ha introduït, a més d'un terme no definit com és el de distància, el postulat:⁶⁷

Si des d'un punt es tracen dues rectes que formen angle, llavors la distància entre les dues creix, a mesura que es prolonguen, més enllà de tota magnitud fixada.

D'altra banda, quan parla de distàncies s'entén que les determina a partir de les rectes per B perpendiculars a EH , les quals pressuposa perpendiculars a la paral·lela CD . Per establir aquest supòsit caldria P5 —que és el que vol demostrar— o una proposició equivalent.⁶⁸

⁶⁷És equivalent a una afirmació d'ARISTÒTIL *De caelo*, I5 217b 28–30.

⁶⁸Vegeu l'activitat 1.7.6 en què es demostra a partir de P5 que si una recta és perpendicular a una altra, també és perpendicular a les seves paral·leles.

Els intents de demostració seguiran en els segles següents i a finals del segle XVII i al llarg del XVIII, Saccheri [1667–1733], Lambert [1728–1777], Wachter [1792–1817], Schweikart [1780–1859] i Taurinus [1794–1874], van trobar el camí que havia de conduir Bolyai [1802–1860] i Lobachevski [1793–1856], de manera independent, a la certesa de la impossibilitat d'aquesta demostració amb el descobriment i desenvolupament de la geometria hiperbòlica, a partir de la negació lògica de P5. És força segur que Gauss [1777–1855] conegué aquests resultats abans que ells dos, però no ho va fer públic tot i estar convençut de la seva validesa; possiblement la falta d'una demostració rigorosa que la nova geometria no portava a contradicció el va desanimar d'enfrontar-se amb el corrent de pensament dominant en el seu temps, el qual donava als principis de la geometria euclidiana una existència “a priori”, i que, per tant, l'establia com l'única geometria necessàriament verdadera.

Activitats 1.3

\overline{E}_2 1. El teoremes I.17 i I.32 tracten del valor de la suma d'angles d'un triangle.

- **Teorema I.17**

En tot triangle dos angles qualsevol agafats junts són menors que dos rectes.

- **Teorema I.32**

En tot triangle, si es prolonga un dels costats, l'angle extern és igual als dos angles interns i oposats, i els tres angles interns del triangle són iguals a dos rectes.

\boxed{S} i) Demostreu I.17 a partir de I.13⁶⁹ i I.16, mitjançant la prolongació d'un costat.

ii) Demostreu I.32 a partir de I.13, I.29 i I.31.

\boxed{S} 2. Calculeu la suma d'angles interns d'un polígon convex amb dos mètodes diferents. Si alguns angles són còncaus serveix el resultat d'abans? (En cap cas els costats es tallen interiorment)

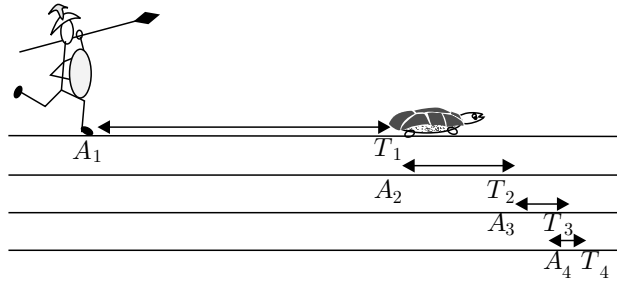
3. Disposeu d'un escaire, una plomada que podem penjar del vèrtex de l'angle recte, i un semicercle graduat.

i) De quina manera procediríeu per trobar, amb l'aproximació que proporciona el semicercle, l'angle d'elevació sobre l'horitzó de la part més alta d'un edifici, o d'un estel, o de qualsevol altre objecte que no es trobés al nivell de l'horitzó?

⁶⁹I.13 afirma que la suma d'angles formats per una recta que s'aixeca sobre una altra és igual a dos angles rectes. Vegeu a la pàgina 52, l'activitat 1.7.3

ii) Establiu raonadament la relació entre dos angles de costats perpendiculars en els casos: Agut–agut, agut–obtús i obtús–obtús. □ S

4. Considereu el problema de la persecució de la tortuga per part d'Aquil·les, en què aquest porta una velocitat de 10 metres per segon, i la tortuga de 1 metre per segon, essent la distància que els separa de 90 metres.



i) Actueu com dicta l'exposició de l'Aquil·les a la Física i calculeu la suma de “totes” les distàncies recorregudes per Aquil·les, amb l'ajut d'un pas al límit, la qual cosa implica la consideració actual de l'infinit en contra del pensament grec.

ii) Supposeu que Aquil·les agafa la tortuga, i anomenem x l'espai que recorre fins aconseguir-ho. Feu un raonament algebraic que us permeti calcular el valor de x , i comproveu que coincideix amb el resultat del primer apartat. □ S

□

1.5 Congruència de triangles

Hem vist sota quins supòsits el teorema I.4 estableix el criteri de congruència de triangles costat–angle–costat. En el teorema I.8 Euclides estableix el criteri costat–costat–costat. Ho aconseguim a partir de I.7, el qual demostra mitjançant I.5, en què s'utilitzen finalment I.4 i I.3. Estudiarem doncs aquests teoremes, amb l'excepció de I.3 que deixarem per a la secció 1.6. Veurem que la demostració de I.7 no considera tots els casos possibles i que, per tant, el criteri costat–costat–costat en I.8 no queda ben establert.⁷⁰

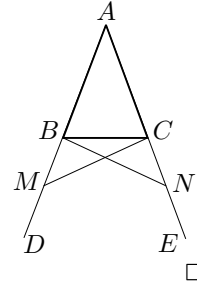
• Teorema I.5

⁷⁰El cas més complex que falta per demostrar a I.7 es pot deduir de I.21, però això no serveix perquè aquest últim utilitza I.16 —el teorema de l'angle exterior— que depèn de I.7. Quant als criteris, a partir d'ara els identificarem amb les seves inicials, per exemple C–A–C representa el criteri costat–angle–costat.

En els triangles isòsceles els angles de la base \widehat{ABC} i \widehat{ACB} són iguals entre si, i si es prolonguen els dos costats iguals AB i AC [fins els punts D i E pel costat de B i C respectivament], els angles \widehat{CBM} i \widehat{BCN} de sota la base també són iguals entre si.⁷¹

Euclides considera un punt M de BD i —per I.3— construeix N sobre AE de manera que $AM = AN$. Traça MC i BN , i llavors —per I.4— els triangles AMC i ANB són congruents i $BN = CM$.

A més, en ser $MB = MA - BA = NA - CA = NC$ i $\widehat{BMC} = \widehat{CNB}$, es compleix —per I.4— que els triangles BMC i CNB són congruents, i $\widehat{CBM} = \widehat{BCN}$. I també, $\widehat{ABC} = \widehat{ABN} - \widehat{CBN} = \widehat{ACM} - \widehat{BCM} = \widehat{ACB}$.

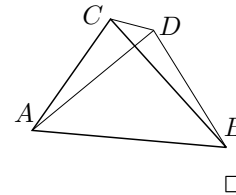


• **Teorema I.7**

No es poden construir sobre la mateixa recta AB dues rectes AD i DB respectivament iguals a dues rectes AC i CB donades, de manera que es trobin en dos punts diferents C i D pel mateix costat i amb els mateixos extrems A i B que les rectes donades.

Si es poguessin construir C i D es tindria —per I.5—

$$\begin{aligned} AC = AD &\implies \widehat{CDB} > \widehat{ADC} = \widehat{ACD} > \widehat{DCB}, \\ BC = BD &\implies \widehat{CDB} = \widehat{DCB}, \end{aligned}$$



la qual cosa es contradictòria. □

Està clar que queden per estudiar els casos en què D cau sobre un dels costats AC o BC , o bé és interior al triangle ABC .⁷²

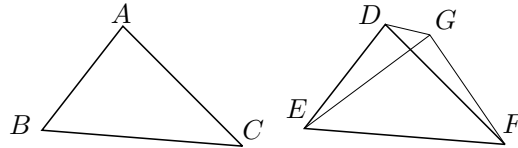
Un cop demostrat aquest teorema, Euclides estableix immediatament el criteri C–C–C de la manera següent.

• **Teorema I.8**

Si dos triangles ABC i DEF tenen dos costats AB i AC d'un respectivament iguals a dos costats DE i DF de l'altre, i iguals les bases BC i EF respectives, tindran iguals els angles compresos pels costats iguals.

⁷¹Es coneix aquest teorema sota l'expressió *Pons asinorum* [pont dels ases], la qual té interpretacions diverses, des de la que diu que representa una frontera pels no aptes per a la geometria, fins la que diu que el passa millor un ase lent però segur, que no pas un cavall àgil que s'hi queda clavats. Vegeu HEATH [1908], 413–414 de l'edició de 1956.

⁷²Vegeu l'activitat 1.4.1 en què utilitzareu la segona part de I.5.



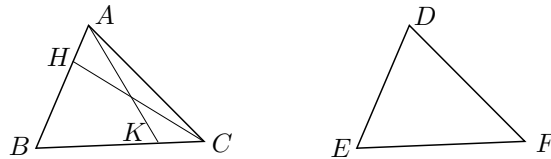
Per veure-ho fa una reducció al absurd. Aplica el triangle ABC sobre el triangle DEF , fent coincidir els costats BC i EF . Llavors diu que si no coincidissin BA sobre ED , i CA sobre FD , tindríem dos segments GE i GF respectivament iguals a uns altres dos DE i DF amb els extrems en un mateix segment EF . Aquests s'ajuntarien en dos punts D i G diferents pel mateix costat de la recta EF , i això —per I.7— no pot ser. \square

S'observa així que si I.7 és cert per a tots els casos, llavors I.8 estableix també el criteri per a tots els casos.

Els criteris A–C–A i A–A–C es presenten a I.26. És de notar que la demostració és una mica complexa, perquè es basa en I.4 i evita recórrer al transport d'angles que utilitza allí. L'ús d'aquest transport la faria, potser, més intuïtiva.⁷³

• **Teorema I.26**

Si dos triangles ABC i DEF tenen dos angles \widehat{ABC} i \widehat{ACB} d'un iguals respectivament a dos angles \widehat{DEF} i \widehat{DFE} de l'altre, i un costat d'un igual a un costat de l'altre, estigui aquest costat entre els dos angles iguals o oposat a un dels angles iguals, tindran els altres costats d'un iguals al de l'altre i l'altre angle \widehat{BAC} d'un igual a l'altre angle \widehat{EDF} de l'altre.



En els dos casos fa una reducció a l'absurd. En el primer cas els costats iguals són BC i EF . Suposa $AB > DE$ i considera —per I.3— BH , igual a ED , sobre BA . Llavors —per I.4—, els triangles HBC i DEF són congruents i $\widehat{HCB} = \widehat{DFE} = \widehat{ACB}$, la qual cosa no pot ser perquè $\widehat{HCB} < \widehat{ACB}$. Consegüentment $AB = DE$, i en ser $BC = EF$ i $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, tots els altres elements dels triangles ABC i DEF són —per I.4— iguals.

En el segon cas considera iguals els costats AB i DE . Suposa $BC > EF$ i considera —per I.3— BK , igual a EF , sobre BC . Llavors —per I.4—, els triangles ABK i DEF són congruents i $\widehat{BKA} = \widehat{EFD} = \widehat{BCA}$, la qual cosa no pot ser perquè —per I.16— $\widehat{BKA} > \widehat{BCA}$. Per tant, $BC = EF$ i, en ser

⁷³Vegeu l'activitat 1.4.2.

$AB = DE$ i $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, els elements dels dos triangles ABC i DEF són iguals. \square

Activitats 1.4

\overline{E}_2 1. Completeu la demostració del teorema I.7 per als casos en què el vèrtex D cau sobre un dels costats AC o AB del triangle ABC , o bé és interior a aquest triangle. [Utilitzeu la segona part de I.5]

\overline{S} 2. Demostreu I.26 utilitzant el transport d'angles i segments.

3. Estudiarem en quines condicions $C-C-A$ proporciona un criteri de congruència de triangles.

i) Considereu donats un segment AB i un angle BAH . Considereu, també, un segment BC de longitud donada i el punt C variable. Estudieu quants triangles es poden construir amb aquests elements i establiu els casos en què $C-C-A$ és un criteri d'igualtat de triangles.

\overline{B} ii) Feu una presentació amb el CABRI de l'estudi de l'apartat anterior.

\overline{E}_2 4. El teorema I.6 és el recíproc del teorema I.5, i en la seva demostració s'utilitza per primera vegada la reducció a l'absurd en els Elements.

• Teorema I.6

Si dos angles \widehat{ABC} i \widehat{ACB} d'un triangle ABC són iguals entre sí, els costats AC i AB que subtendeixen els angles iguals també són iguals entre sí.

\overline{S} Supposeu que no és cert i que, per tant, un dels costats, per exemple el AB , és major que el AC . Demostreu que això condueix a una contradicció. \square

1.6 El regle i el compàs

Segons els tres primers postulats d'Euclides disposem per a la representació dels objectes geomètrics d'un regle que només serveix per traçar rectes, —no té marques i per tant no serveix per traslladar segments—, i d'un compàs, el qual donat un punt i un radi permet traçar una circumferència però no permet traslladar-la, es a dir que el compàs és tanca quan aixequem les seves puntes del paper. La pregunta que es planteja és si aquests postulats permeten utilitzar un compàs modern, el qual a primera vista és més potent perquè en aixecar les puntes del paper conserva l'obertura. La resposta és afirmativa gràcies als dos primers teoremes dels *Elements*, els quals permeten construir un segment —a partir d'un

punt donat— igual a un altre segment donat.⁷⁴ Amb això, donada una circumferència podrem construir-ne una altra —amb l'ús de I.1 i I.2— de mateix radi i un altre centre, amb un compàs que es col·lapsi. Llavors, totes les construccions fetes amb compàs modern es poden executar amb el compàs euclidià, i els dos compassos són equivalents. El teorema I.3 afina el trasllat de segments que fa I.2, construint el traslladat sobre una semirecta donada.

1.6.1 Els teoremes I.1 a I.3

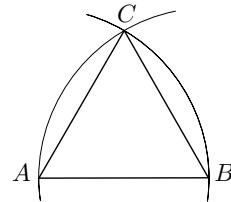
Presentem aquests teoremes començant pel I.1, del qual ja hem discutit la manca axiomàtica principal. Aquest permetrà establir el teorema I.2 del trasllat de segments.

• Teorema I.1

Construir un triangle equilàter ABC sobre una recta finita AB donada

La construcció consisteix en traçar dues circumferències (A, AB) i (B, BA) . Llavors, des del punt C d'intersecció de les dues, es tracen els segments CA i CB , i en resulta el triangle equilàter ABC .

Euclides ho prova dient que $BC = BA = AB = AC$, en ser C un punt de les dues circumferències d'igual radi.



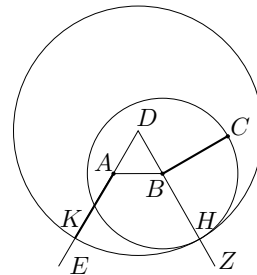
□

• Teorema I.2

En un punt A donat construir una recta AK igual a un altra recta BC donada.

Primerament construeix un triangle ABD equilàter sobre AB . Prolonga DB fins a Z i DA fins a E . Talla el cercle (B, BC) amb DZ , d'on en resulta el punt H . Finalment, considera el punt K d'intersecció entre el cercle (D, DH) i la recta DE , llavors AK és el segment cercat.

La prova resulta de considerar que $BH = BC$ i $DH = DK$ impliquen $BC = DH - DB = DK - DA = AK$.



□

⁷⁴Les construccions que es poden fer amb el regle i el compàs euclidià, o en el seu lloc el compàs modern, s'anomenen *construccions euclidianes*.

• **Teorema I.3**

Donades dues rectes desiguals, restar de la major una recta igual a la menor.⁷⁵

Activitats 1.5

\overline{B} 1. Trobeu la construcció demanada a I.3 i demostreu-la.

\mathcal{S} 2. Feu una presentació pas a pas amb el CABRI de la construcció de I.2.

\mathcal{S} □

1.6.2 Breu apunt sobre eines de construcció equivalents.

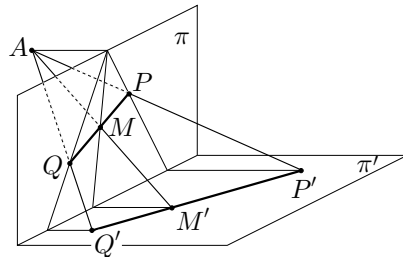
En diferents moments de la història han aparegut autors que per motivacions diverses, tant de tipus pràctic com teòric, s'han plantejat si les construccions euclidianes es podien assolir amb un compàs menys potent, o amb un sol dels dos instruments euclidians. Una de les conclusions a la que s'arriba en primer lloc, és que el domini dels punts construïbles amb el regle sol és més restringit que el domini de punts construïbles amb eines euclidianes. Un dels arguments més utilitzats en la demostració d'aquest fet, és el de la impossibilitat de construir el punt mitjà de dos punts donats. Actuem mitjançant una reducció a l'absurd:

Suposem que sigui possible construir el punt mitjà M de dos punts P i Q donats, traçant un nombre finit de rectes amb el regle sota les condicions donades pels dos primers postulats dels *Elements*:

- Sempre que tenim dos punts podem traçar la recta que els conté.
- Sempre que tenim un segment podem prolongar-lo.

Llavors, si projectem totes les línies construïdes, des d'un punt A exterior al pla π de construcció, sobre un altre pla π' que no passi per A i tal que la recta $\pi \cap \pi'$ no tingui la mateixa direcció que PQ , obtenim:

- Els punts P , Q i M es projecten sobre els punts P' , Q' i M' , els quals estan alineats perquè es troben sobre la intersecció dels plans APQ i π' .
- Totes les rectes de la construcció sobre π es projecten sobre rectes de π' .



Per tant, si la construcció de M amb regle sol fos correcta —la qual cosa vol dir que és independent dels punts P i Q triats—, M' hauria de ser el punt mitjà

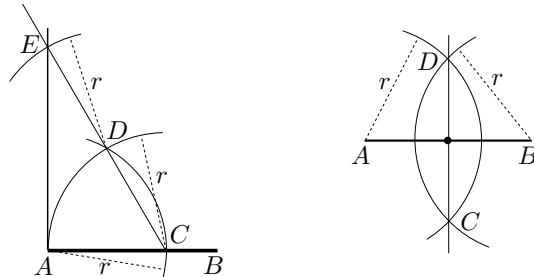
de P' i Q' ; perquè la col·lecció de rectes en el pla π' es pot construir amb els mateixos passos que la construcció de rectes en el pla π . Però, la realitat es que M' no és el punt mitjà de P' i Q' ,⁷⁶ i hem obtingut una contradicció.

Fins aquí hem establert la no equivalència de les construccions amb regle sol i les construccions euclidianes. Abu'l Wefa [940–998], matemàtic persa que va estudiar a l'Irak i va ser professor a Bagdad on va morir, fou un dels primers en plantejar-se la reducció de la potència de les eines euclidianes. S'interessà en les construccions amb el regle i un compàs rígid o d'obertura fixa. En un manuscrit, que és una còpia d'uns apunts d'un alumne seu, s'hi troben tot un seguit de construccions amb aquestes eines. Es creu que el seu interès en el tema era de caire pràctic, motivat per les aplicacions a la mecànica, l'arquitectura i la fabricació d'eines per a l'astronomia.⁷⁷ Presentarem dues de les seves construccions, en què anomenem r el radi del compàs.

• **AW.1**

Construir la perpendicular per l'extrem de la recta AB .

Traça les circumferències (A, r) —la qual talla AB en C — i la circumferència (C, r) . Considera el punt D d'intersecció de les dues i construeix la circumferència (D, r) . El punt E d'intersecció de la recta CD amb la circumferència (D, r) , determina la recta AE que és la perpendicular buscada. \square

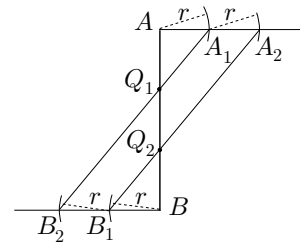


• **AW.2**

Dividir la distància AB en dues o en n parts iguals.

Traça les circumferències (A, r) i (B, r) les quals es tallen en els punts CD . Llavors, el punt M d'intersecció de AB i CD és el punt buscat.

Per dividir en n parts, traça les perpendiculars per A i B , a AB , en sentits oposats. Després, mitjançant el compàs, marca sobre aquestes perpendiculars els punts A_i i B_i , amb $i = n-1$ tals que $AA_1 = A_{i-1}A_i = r = B_{i-1}B_i = BB_1$. Les rectes A_iB_{n-i} tallen AB en els punts Q_i que parteixen AB en n parts iguals.



⁷⁶Vegeu l'activitat 1.6.1.

⁷⁷Vegeu GEPPERT[1929].

□

L'equivalència entre aquest últim tipus de construccions i les euclidianes va ser enunciada per Jean-Victor Poncelet [1778–1867] i tractada d'una manera completa per Jacob Steiner [1796–1863].

Finalment, apuntem que les construccions euclidianes es poden aconseguir amb l'ús del compàs i prescindint del regle. Aquest resultat era, en un principi, atribuït a Lorenzo Mascheroni [1750–1800] per la seva publicació, l'any 1797, a l'obra *La geometria del compasso*;⁷⁸ però als voltants del 1928 el matemàtic danès Johannes Hjelmslev va descobrir una còpia del llibre *Euclides Danicus*, publicat el 1672, de Georg Mohr, en què establia aquesta equivalència.

Activitats 1.6

\overline{B} 1. Demostreu, fent una reducció a l'absurd i utilitzant coneixements de semblança de triangles, que en una projecció del tipus presentat a l'inici de la secció, els punts mitjans no es transformen en punts mitjans.

\overline{P} 2. i) Construïu les interseccions d'una recta i un cercle, utilitzant únicament un compàs modern, si coneixeu dos punts A i B de la recta i el centre O i un punt P del cercle, en què P no pertany a la recta.

ii) Feu-ne una visualització amb el CABRI.

□

1.7 Algunes construccions del llibre I

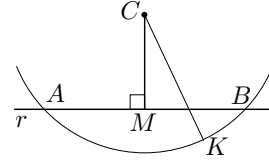
El grup de teoremes I.9–I.12 presenta les construccions de la bisectriu d'un angle, del punt mitjà de dos punts, i de les perpendiculars a una recta per un punt interior i per un punt exterior. Començarem amb la presentació de la construcció de I.12 la qual ens plantejarà la necessitat d'introduir I.10 i I.9. Per a les demostracions vegeu l'activitat 1.7.1.

• Teorema I.12

Donada una recta infinita r , traçar una perpendicular des d'un punt C exterior a ella.

⁷⁸Vegeu els problemes 110–112 de MASCHERONI [1797], 70–74 de la traducció francesa de 1980. Aquesta és una edició corregida de la traducció que Bonaparte va encarregar, el 1798, a l'oficial M. Carette. Per a algunes notes històriques i un tractament complet del problema de diversos tipus d'eines equivalents i no equivalents a les euclidianes vegeu CARREGA [1981], EVES [1963], EVES [1976], LEBESGUE [1950], 25–35.

Primerament traça la circumferència (C, CK) en que K és un punt de “l’altre costat” de la recta r . Després construeix el punt mitjà M de les seves interseccions A i B amb la recta r , i construeix el segment CM . Aquest és el segment perpendicular buscat.



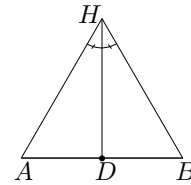
□

La construcció del punt mitjà d'un segment la trobem a I.10.

• **Teorema I.10**

Dividir en dues parts iguals una recta finita donada.

Comença amb la construcció —per I.1— d'un triangle equilàter AHB sobre el segment AB i després traça la bisectriu de l'angle \widehat{AHB} . El punt D d'intersecció d'aquesta última amb el segment AB és el punt mitjà buscat.



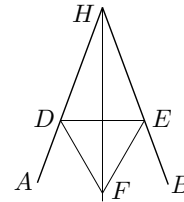
□

La construcció de la bisectriu d'un angle la trobem a I.9.

• **Teorema I.9**

Dividir en dues parts iguals un angle \widehat{DHE} rectilini donat.

Considera —per I.3— D sobre HA i E sobre HB tals que $HD = HE$, i construeix —per I.1— el triangle equilàter DEF sobre DE del costat contrari de H . Llavors, la bisectriu és HF .



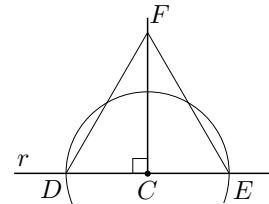
□

Finalment presentem I.11, la construcció del qual no guarda cap relació directa amb les anteriors.

• **Teorema I.11**

Traçar una línia recta que formi angles rectes amb una recta donada r des d'un punt C d'aquesta.

Considera $D \neq C$ sobre la recta r , i E sobre r tal que $CE = DC$. Construeix el triangle equilàter DFE , i FC és el segment buscat.



□

Activitats 1.7

1. i) Proveu que les construccions dels quatre teoremes anteriors són correc- \overline{E}_2

tes utilitzant, per a cada teorema, els teoremes ja demostrats, i per a:

- I.9, els triangles HDF i HEF .
- I.10, els triangles ADH i BDH .
- I.11, els triangles DCF i ECF .
- I.12, els triangles AMC i BMC .

\boxed{S}

\overline{B} ii) Elaboreu una visualització, amb el CABRI, del traçat d'una perpendicular per un punt exterior a una recta, inspirada en I.12,

2. Feu anàlisis diverses que us permetin construir una recta perpendicular pel punt extrem A d'un segment donat AB , si aquest segment no es pot prolongar a partir de A .

\boxed{S}

3. Demostreu els teoremes I.13, utilitzant I.11, i I.15, utilitzant I.13.

• **Teorema I.13**

Si una recta aixecada sobre una altra recta forma angles, o bé formarà dos angles rectes, o bé formarà angles iguals a dos rectes.⁷⁹

\boxed{S}

• **Teorema I.15**

Si dues rectes es tallen, formen angles en el vèrtex iguals entre si.⁸⁰

4. Demostreu el teorema I.28:

i) Directament a partir de I.13, I.15 i I.27. (Així ho fa Euclides)

\boxed{S}

ii) Fent una reducció a l'absurd i utilitzant I.13 i I.16.

• **Teorema I.28**

Si una recta t en incidir sobre dues rectes r i s fa l'angle extern igual a l'angle intern i oposat del mateix costat, o els dos interns del mateix costat iguals a dos angles rectes, les rectes són paral·leles entre si.

\boxed{S}

5. Demostreu el teorema I.30.

• **Teorema I.30**

Les paral·leles a una mateixa recta són també paral·leles entre si.

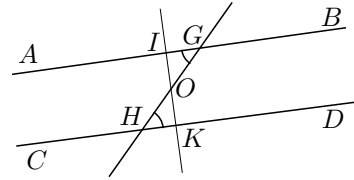
\overline{P}

6. L'objectiu d'aquesta activitat és analitzar una demostració de la primera part de I.29 que es troba a ROUCHÉ-COMBEROUSSE [1883], la qual presentem a l'últim apartat. Aquesta és desenvolupada amb l'ajut dels postulats i teoremes no posteriors a I.16, tenint en compte que I.26 s'obté d'aquests teoremes.

i) Demostreu que per un punt interior o exterior a una recta donada, existeix una única recta que li és perpendicular.

ii) Demostreu que tota recta perpendicular a una recta r donada, és perpendicular a qualsevol recta paral·lela a r .

iii) En la pàgina 32 de l'obra citada a l'inici de l'activitat, trobem la demostració següent sobre la igualtat d'angles alterns interns determinats per dues paral·leles AB i CD tallades per una secant. Si G i H són les seves interseccions amb la secant, procedeix així:



Sigui O el punt mitjà de GH i tracem, per O , la perpendicular comuna IK a les paral·leles AB i CD ; OI caurà dins l'angle agut OGA i OK caurà dins l'angle agut OHD . A més, els triangles rectangles OGI i OHK tenen les seves hipotenuses OG i OH iguals, en ser O punt mitjà de GH , i els angles \widehat{IOG} i \widehat{KOH} iguals, en ser oposats pel vèrtex: són llavors iguals [els triangles] i, consegüentment, l'angle \widehat{OGI} és igual a l'angle \widehat{OHK} .

S

Feu la recerca de tots els teoremes —fins el I.16— implicats en la demostració.

□

1.8 Anàlisi del transport d'angles. Teorema I.23

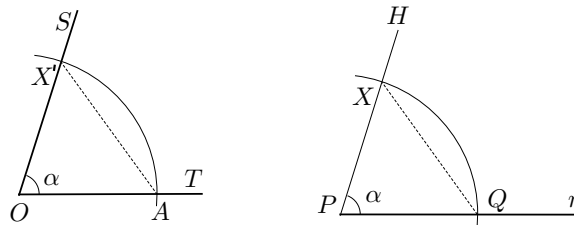
Presentem una anàlisi per a la construcció d'un angle sobre una recta r donada, d'origen P , igual a un angle donat $\alpha = \widehat{TOS}$, inspirada en la construcció i síntesi d'Euclides a I.23.

• **Teorema I.23**

Sobre una recta i en un punt d'ella construir un angle rectilini igual a un angle rectilini donat.

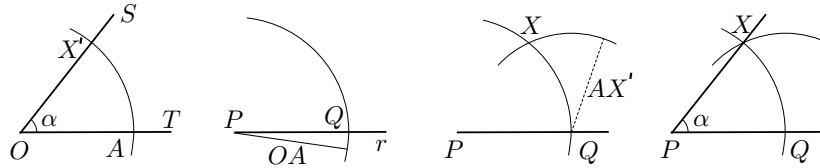
El fil que conduirà l'anàlisi serà la consideració de dos triangles congruents en què un dels angles sigui l'angle α donat.

Suposem doncs el problema resolt. O sigui que hem construït un punt H tal que $\widehat{QPH} = \alpha$, —on Q és un punt qualsevol de la semirecta r —.



Considerem X , X' i A respectivament dels segments PH , OS i OT tals que $OX' = PX = PQ = OA$. Llavors, pel criteri C-A-C, —teorema I.4—, en ser

$PQ = OA$, $PX = OX'$ i $\widehat{QPX} = \alpha = \widehat{AOX'}$, els triangles QPX i AOX' són congruents i tenen $QX = AX'$.⁸¹ Però els punts Q , A i X' són coneguts i, consegüentment, també es coneix QX en magnitud; i es coneixen PQ en posició, i PX en magnitud. Això ens indica que l'anàlisi s'ha acabat perquè, mitjançant I.22, podem construir un triangle a partir de les magnituds dels tres costats. A més es podrà fer en la posició desitjada perquè PQ és donat. Així construirem:



- La circumferència (O, OA) , en què A pertany a OT , i la seva intersecció X' sobre OS .
- La circumferència (P, OA) i la seva intersecció Q sobre r .
- La circumferència (Q, AX') i la seva intersecció X amb la circumferència (P, OA) .
- L'angle \widehat{QPX} cercat.

La síntesi és immediata, a partir del criteri C-C-C [I.8] i del teorema I.22, el qual hem estudiat en la secció 3.6 junt amb el “diorismós” que li proporciona el teorema I.20; ens limitarem, doncs, ha donar-ne explícitament l'enunciat. Com que I.20 depèn, directa o indirectament, de I.18 i I.19, també donarem els enunciats d'aquests últims i la citació dels teoremes que s'utilitzen en la seva demostració.

• **Teorema I.18**

En qualsevol triangle ABC el costat AC més gran subtendeix l'angle \widehat{ABC} més gran.

Utilitza els teoremes I.2, I.5 i I.16 en la seva demostració. L'estratègia d'aquesta consisteix en considerar BD tal que D està sobre AC i $AD = AB$, i comparar els angles adequats.

• **Teorema I.19**

En qualsevol triangle ABC l'angle \widehat{ABC} més gran és subtendit pel costat AC més gran.

Fa una reducció a l'absurd que el porta a contradir, en un cas el teorema I.5, i en l'altre el teorema I.18.

⁸¹No caldria considerar $OX' = OA$ i $OA = PQ$; ho hem fet de cara a la construcció final, perquè en resultés el traçat d'una circumferència menys.

- **Teorema I.20**

En qualsevol triangle ABC , dos costats qualsevol agafats junts són més grans que l'altre.

En l'estudi esmentat d'aquest teorema a la secció 3.6, es pot comprovar que s'utilitzen I.5 i I.19 en la seva demostració.

- **Teorema I.22**

Construir un triangle amb tres rectes que siguin iguals a tres rectes donades: consegüentment és necessari que dues de les línies agafades juntes de qualsevol manera, siguin més grans que l'altra que queda.

Per a la demostració només utilitza I.3, però per poder-la dur a terme cal que compleixi la condició que ha establert a I.20.

Finalment, abans d'entrar en un nou grup de teoremes que tracten amb la comparació d'àrees, farem la presentació dels enunciats de tres teoremes que falten per completar el conjunt d'enunciats fins el teorema I.32, els quals no intervenen en l'establiment dels teoremes posteriors del llibre I. Aquest són els teoremes I.21, I.24 i I.25:

- **Teorema I.21**

Si a partir dels extrems d'un dels costats d'un triangle es construeixen dues rectes que es trobin en el seu interior, les rectes així construïdes seran menors que els altres dos costats del triangle, però formaran un angle major.

Euclides demostra aquest resultat amb la participació dels teoremes I.16 i I.20.

- **Teorema I.24**

Si dos triangles tenen dos costats respectivament iguals a dos costats, però un té l'angle format per les rectes iguals major que l'altre, també tindrà la base major que l'altra.

En aquest cas els teoremes que utilitza en la demostració són I.4, I.5, I.19 i I.23.

- **Teorema I.25**

Si dos triangles tenen costats respectivament iguals a dos costats, però un té la base major que l'altra base, també tindrà l'angle format per les rectes iguals més gran que l'altre.

Aquest últim teorema el demostra a partir de I.4 i I.24.

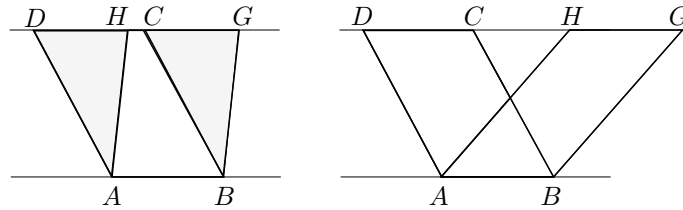
Activitats 1.8

- P** 1. Feu una presentació pas a pas de la construcció del teorema I.23 amb el CABRI; creeu una macro —amb l'ajut d'aquest teorema— tal que donat un angle α determinat per tres punts, i un segment AB com a objectes inicials, produeixi un angle $\widehat{BAH} = \alpha$
- S** 2. Representeu, pas a pas amb el CABRI, la construcció d'una paral·lela per un punt exterior a una recta, del teorema I.31. □

1.9 Comparació i aplicació d'àrees

A partir del teorema I.33 comença una secció dedicada a la comparació i aplicació d'àrees entre paral·lelograms i triangles, la qual es pot generalitzar a polígons en general. Per fer-nos una idea prèvia dels tipus de tractament utilitzat per Euclides presentem una comparació d'àrees inspirada en els seus teoremes.

Si considerem un paral·lelogram $ABCD$, li retallem el triangle AHD —en què H és interior a CD — i apliquem ADH sobre BC , en resulta el paral·lelogram $ABGH$ que té la mateixa àrea.



Ens preguntem si aquesta invariància de les àrees també es produeix quan construïm un paral·lelogram $ABGH$ en que HG està sobre la recta suport de CD i és exterior a aquest segment. Una observació atenta ens dona una resposta afirmativa perquè, en ser els triangles ADH i BCG congruents pel criteri C–A–C.⁸²

$$ABCD = ABGD - BCG = ABGD - ADH = ABGH.$$

Una conseqüència immediata d'aquest resultat és que les àrees dels triangles que tenen la mateixa base i el vèrtex oposat sobre una línia paral·lela a aquesta, són iguals.

El problema de quadrar superfícies resulta força accessible amb l'ús de tècniques associades a aquestes observacions.⁸³ Per exemple, si el que es pretén és

⁸²A partir d'ara quan parlem d'igualtat de figures ens referim a igualtat d'àrees.

⁸³El terme *quadrar* s'utilitza en el sentit de construir un quadrat d'igual àrea que la superfície donada.

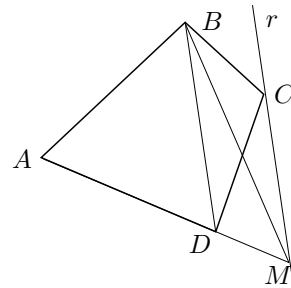
construir un quadrat d'àrea igual a un quadrilàter donat, els geòmetres grecs construïrien en primer lloc un rectangle d'àrea igual a la donada i, a continuació, construïrien el quadrat igual tal com es fa en el teorema II.14.⁸⁴ La primera fase seria realitzada, a partir del quadrilàter $ABCD$, amb les construccions següents:

- El triangle ABM igual al quadrilàter $ABCD$.
- El paral·lelogram $AHJM$ igual al triangle ABM .
- El rectangle $PQJM$ igual al paral·lelogram $AHJM$.

La construcció més complexa és la primera, la qual es pot resoldre si tenim en compte, com ja hem observat anteriorment, que triangles amb la mateixa base i situats entre paral·leles són iguals.

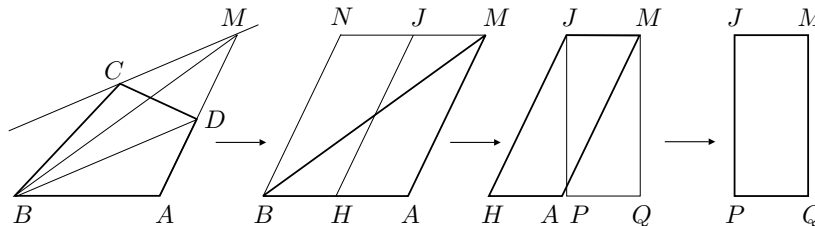
Efectivament, considerem la recta BD i una paral·lela r pel punt C . Si prolonguem AD fins tallar r , el triangle BDM és igual al BDC i, per tant,

$$ABM = ABD + BDM = ABD + BDC = ABCD.$$



□

Els passos de la totalitat del procés es presenten en el gràfic adjunt.



1.9.1 Comparació d'àrees. Teoremes I.33 a I.41

Aquest primer grup de teoremes proporciona una idea clara de les tècniques en què es fonamentaria la comparació d'àrees, en absència d'una teoria de la proporció, en el primer període pitagòric.⁸⁵ Farem una presentació dels tres primers i deixarem els altres en forma d'activitat.

⁸⁴Veurem el teorema II.14 a la secció la secció 2.4.6.

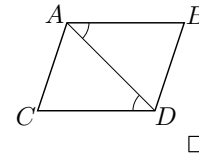
⁸⁵GUZMÁN [1986], 24–26, situa el teorema I.44, el qual depèn del grup I.33–I.41, entre «algunas de las porciones de los elementos que parecen provenir de fuentes pitagóricas, a juzgar por diversos testimonios y por razones lógicas internas». EVES [1963], 24–25 de l'edició espanyola de 1969, proposa —referint-se al problema de construir, a partir d'un polígon donat, un altre polígon amb un costat menys i de mateixa àrea— la tècnica que hem presentat al principi de la secció pel cas d'un quadrilàter, i diu d'ella que «probablement era coneguda dels pitagòrics».

• **Teorema I.33**

Les rectes AC i BD que uneixen rectes AB i CD iguals i paral·leles [amb extrems] en la mateixa direcció, són també iguals i paral·leles.

L'estratègia de la demostració passa per considerar la diagonal AD i en comparar els triangles CDA i BAD .

Tenim, per I.29 i ser AB i CD paral·leles, $\widehat{CDA} = \widehat{BAD}$, AD comú i, per hipòtesi, $AB = CD$; llavors —per I.4— $AC = BD$. A més —per I.4— $\widehat{ADB} = \widehat{DAC}$; llavors —per I.27— AC i BD són paral·leles.



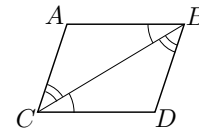
• **Teorema I.34**

En les àrees dels paral·lelograms els costats i els angles oposats són iguals entre si, i la diagonal les divideix en dues parts iguals.

Actua de manera semblant a la de I.33, amb els triangles ABC i DCB .

Tenim, per I.29 i els costats paral·lels entre si, $\widehat{CBA} = \widehat{BCD}$ i $\widehat{ACB} = \widehat{DBC}$ i BC comú; llavors —per I.26— tots els altres elements són iguals, i per tant,

$$\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = \widehat{DBC} + \widehat{CBA} = \widehat{DBA}.$$



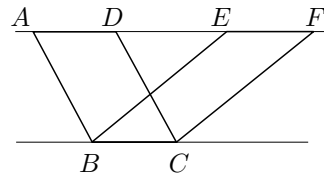
A més, $AB = CD$, BC comú i $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$ impliquen, per I.4, que els triangles ABC i DCB són iguals. □

• **Teorema I.35**

Els paral·lelograms $ADBC$ i $EFBC$ que estan sobre la mateixa base BC i entre les mateixes paral·leles AF i BC són iguals entre sí.

En aquest cas, la seva estratègia està en demostrar la congruència dels triangles EAB i FDC , perquè llavors

$$\begin{aligned} ADBC &= AFBC - FDC = \\ &= AFBC - EAB = EFBC \end{aligned}$$



Estableix la igualtat dels triangles, a partir de I.4, de la manera següent:
 – $AE = DF$ en ser —per I.34— $AE = AD + DE = BC + DE = EF + DE = DF$.
 – $AB = DC$ també per I.34.
 – $\widehat{EAB} = \widehat{FDC}$ en ser —per I.29— AB i DC paral·leles tallades per la secant AF . □

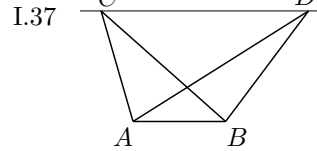
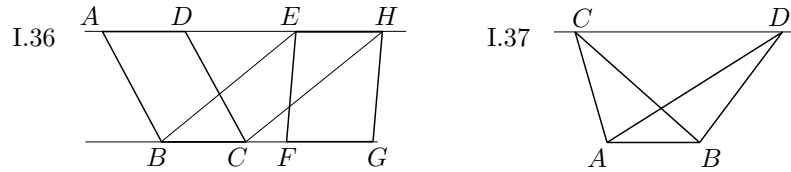
Activitats 1.9

1. Demostreu els teoremes I.36 a I.41 a partir dels teoremes que els precedeixen \overline{E}_2 en els Elements.

- **Teorema I.36**

Els paral·lelograms $ADBC$ i $EHFG$ que estan sobre les bases BC i FG iguals i entre les mateixes paral·leles són iguals entre si.

Indicació: Considereu els segments BE i CH .

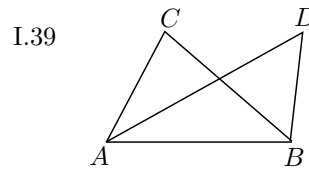
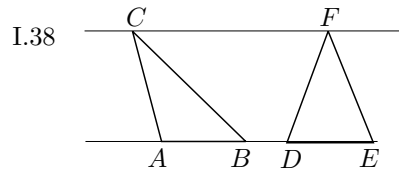


- **Teorema I.37**

Els triangles ABC i ABD que estan sobre la mateixa base AB i entre les mateixes paral·leles AB i CD són iguals entre si.

- **Teorema I.38**

Els triangles ABC i DEF sobre bases AB i DE iguals i entre les mateixes paral·leles AE i CF són iguals entre si.



- **Teorema I.39**

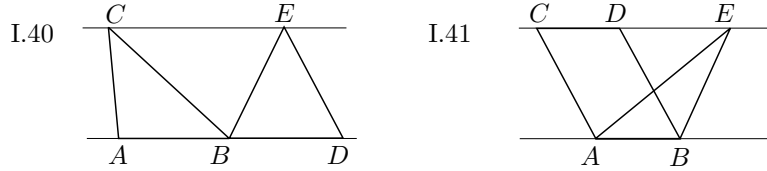
Els triangles ABC i ABD iguals que estan sobre la mateixa base AB i en el mateix costat, estan també entre les mateixes paral·leles.

Indicació: Feu una reducció al absurd. Suposeu que AB i CD no són paral·leles i apliqueu I.31 al punt C i la recta AB .

- **Teorema I.40**

Els triangles ABC i BDE iguals que estan sobre bases iguals AB i BD i en el mateix costat, estan també entre les mateixes paral·leles.

Indicació: Actueu de manera semblant a I.39.



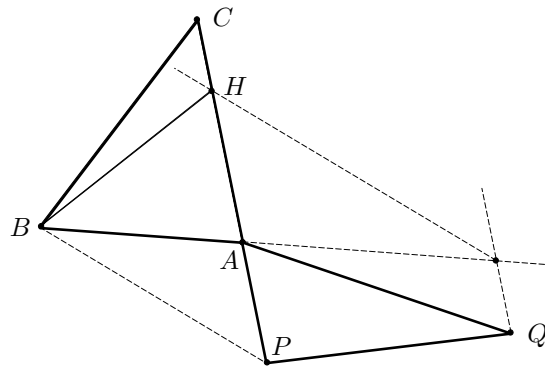
• **Teorema I.41**

Si un paral·lelogram $ABCD$ té la mateixa base AB que un triangle ABE i està entre les mateixes paral·leles, el paral·lelogram és el doble del triangle.

\overline{B} 2. Visualitzeu en un fitxer CABRI la construcció de la diferència de dos triangles, seguint les indicacions adjuntes:

- Considereu els triangles BAC i APQ , en què P pertany a la prolongació de AC .
- Expressau la diferència mitjançant $BHC = BAC - APQ$, en què H és interior al segment AC .

\boxed{S} - Tingueu en compte les línies auxiliars del gràfic, i el teorema I.37.



3. Es tracta de dividir un triangle en dues figures d'àrea igual, mitjançant una recta que passi per un punt donat del seu perímetre.

i) Feu-ne una anàlisi que us permeti elaborar un mètode de construcció.

\boxed{S} ii) Creeu una visualització i una macro, amb el CABRI, que proporcionin la solució.

\overline{E}_2 4. Supposeu que treballem sota les hipòtesis següents:

H1: A cada segment se li pot associar un sol nombre al qual anomenarem longitud del segment.

H2: Es pot identificar l'àrea d'un rectangle amb el nombre resultant de multiplicar les longituds dels seus costats.

i) Establiu fórmules per al càlcul de les àrees dels paral·lelograms, triangles, trapezis i polígons regulars. S

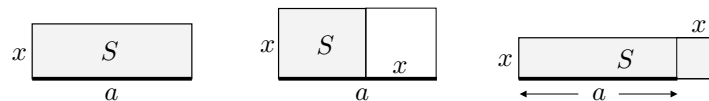
ii) Suposeu que es poden tractar els cercles com a polígons de molts costats, i que la relació entre el perímetre i el diàmetre de cada cercle és un valor constant que anomenem π . Trobeu una fórmula per al càlcul de l'àrea.

□

1.9.2 Aplicació d'àrees. Teoremes I.42 a I.45

Els teoremes I.42 a I.45 constitueixen un cos en què es troba per primera vegada el concepte d'*aplicació d'àrees*, concretament en el teorema I.44. En aquest es proposa d'aplicar un paral·lelogram, d'àrea i angles coneguts, sobre un segment donat; això significa construir el paral·lelogram de manera que un dels seus costats coincideixi “exactament” amb el segment donat. Es torna a trobar el concepte d'aplicar un paral·lelogram sobre un segment, en les proposicions VI.28 i VI.29, en què es planteja aquesta aplicació, respectivament, amb un “defecte” o un “excés” d'un paral·lelogram semblant a un paral·lelogram donat.

Per fer-ne una interpretació, traduïm el significat de tots aquests termes al llenguatge de l'àlgebra moderna, estudiant el cas més senzill en què el paral·lelogram d'àrea S donada que es vol aplicar és un rectangle, i que l'excés o defecte sobre el segment AB donat és un quadrat. Fem $AB = a$ i el costat perpendicular AB del rectangle aplicat igual a x :



- Aplicar exactament \iff trobar x tal que $a \cdot x = S$.
- Aplicar amb defecte \iff trobar x tal que $x \cdot (a - x) = S$.
- Aplicar amb excés \iff trobar x tal que $x \cdot (a + x) = S$.

Hem trobat una equivalència entre els problemes d'aplicació d'àrees i la resolució de determinats tipus d'equacions algebraïques de primer i segon grau.

D'altra banda, veurem en el capítol pròxim que algunes proposicions del llibre II permetran establir la solució d'aquests problemes de segon grau, amb unes tècniques que s'atribueixen als antics pitagòrics, sense haver de recórrer —com es fa en el llibre VI— a una teoria de la proporció. Amb aquest motiu s'ha agrupat I.44 juntament amb els resultats del llibre II i amb alguns altres de posteriors, en un cos anomenat *àlgebra geomètrica*.⁸⁶ En opinió d'alguns historiadors, aquest

⁸⁶Segons DAHAN-PEIFFER [1986], 76, el nom d'àlgebra geomètrica s'utilitza des de Tannery, a l'últim quart del segle passat.

nom es justificaria perquè Euclides, realment, estaria fent àlgebra en el domini de les magnituds geomètriques, les quals no podien ser explicades amb el nombre degut a l'existència de magnituds incommensurables.⁸⁷ Per aquest motiu calia utilitzar el llenguatge de la geometria i s'havien d'interpretar en el camp de les magnituds geomètriques, les lleis de l'àlgebra, perfectament conegudes per la matemàtica babilònica,⁸⁸ com ara la distributiva, quadrat del binomi, diferència de quadrats, i els mètodes de resolució d'equacions quadràtiques i sistemes reductibles a equacions quadràtiques. Les magnituds geomètriques podien representar els nombres, però no podien ser representades d'una manera exhaustiva per aquests. Tanmateix això incorporava una nova limitació, la de les tres dimensions de l'espai geomètric. No hi havia interpretació geomètrica possible per a problemes que impliquessin un producte de més de tres nombres. Aquest fet representà un condicionament molt fort en la resolució de molts tipus de problemes, com per exemple els equivalents a la resolució general de l'equació de tercer grau, el qual implica la resolució d'una equació de sisè grau.

Finalment, abans de centrar-nos en els quatre teoremes d'aquesta secció, apuntem que si en els tres problemes d'aplicació d'àrees presentats considerem l'àrea S igual a la d'un quadrat y^2 variable, obtenim tres famílies de parelles de segments (x, y) que han de complir respectivament:

- Aplicació exacta : $a \cdot x = y^2$.
- Aplicació amb defecte: $a \cdot (a - x) = y^2$.
- Aplicació amb excés : $a \cdot (a + x) = y^2$.

Si representem aquestes parelles d'una en una, en una referència determinada, determinen una col·lecció de punts situats sobre unes corbes que Menecm va introduir en el seu estudi sobre la resolució del problema de la duplicació del cub.⁸⁹ Aquestes serien identificades amb les seccions planes d'un con, l'estudi de les quals adquiriria una importància capital en la tradició de la geometria grega.

Tornem al teorema I.44 i observem que per a la seva construcció Euclides necessita un teorema i una construcció prèvies, els quals presenta en I.43 i I.42.

• **Teorema I.42**

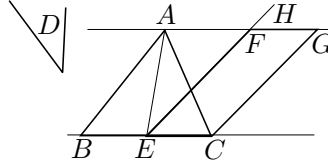
Construir en un angle rectilini D donat, un paral·lelogram $EFCG$ ⁹⁰ igual a un triangle ABC donat.

⁸⁷Vegeu VAN DER WAERDEN[1961], 125–126. Aquesta opinió ha estat molt debatuda i no hi ha acord en aquest punt. Vegeu UNGURU [1975] i un fragment de l'article d'Unguru a FAUVEL–GRAY [1987], 142.

⁸⁸Vegeu BASHMAKOVA–SMIRNOVA [2000], 1–10.

⁸⁹Vegeu la secció 6.4.

Pot construir —per I.10— el segment AE en què E és el punt mitjà de BC . Llavors, construïm —amb I.23— \widehat{CEH} igual a l'angle D donat. Finalment construïm el paral·lelogram $ECFG$ determinat per EH , EC i les paral·leles construïdes —per I.31— per C a EH , i per A a EC .



Aquest paral·lelogram —per I.41 i I.38— verifica

$$ECFG = 2 \cdot ECA = ECA + EBA.$$

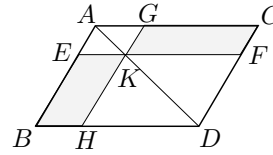
□

• **Teorema I.43**

En qualsevol paral·lelogram, els complements EH i GF dels paral·lelograms AK i KD situats al voltant de la diagonal AD són iguals entre si.

Es compleix —per I.34— $ADB = ADC$, $AKE = AKG$ i $KDH = KDF$ i, per tant,

$$\begin{aligned} EBKH &= ADB - AKE - KDH = \\ &= ADC - AKG - KDF = GKCF. \end{aligned}$$

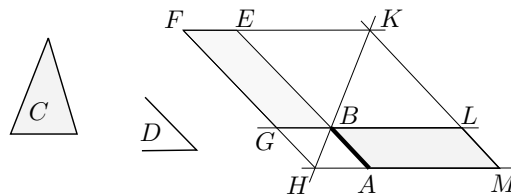


□

• **Teorema I.44**

Aplicar a una recta donada AB , en un angle rectilini D donat, un paral·lelogram igual a un triangle C donat.

L'estratègia de la resolució passa per utilitzar I.42 per construir un paral·lelogram $BEFG$, d'àrea C sobre la prolongació del segment AB , en l'angle donat i, amb la construcció del gnòmon⁹¹ determinat per aquest paral·lelogram i el segment AB , obtenim el paral·lelogram $ABLM$ que té la superfície desitjada com assegura I.43. Vegem la construcció amb detall, en què es traça:



- El paral·lelogram $BEFG$, en què E cau sobre la prolongació de AB i $\widehat{GBE} = D$.

⁹¹El recurs a aquesta figura és una constant en el llibre II dels *Elements* on està definida, i de la que ens ocuparem amb detall. Valgui de moment dir que el gnòmon, en aquest cas, es podria definir com la figura que queda del paral·lelogram quan li restem un paral·lelogram semblant, és a dir que el gnòmon és el polígon de sis costats $HMLBEF$.

- El punt d'intersecció H de la prolongació de FG amb la paral·lela per A a BG .
- El punt d'intersecció K de les rectes suport de FE i HB .
- Els punts d'intersecció L i M de les prolongacions de GB i HA amb la paral·lela per K a EB .

Per totes les consideracions anteriors, el paral·lelogram desitjat és $ABLM$. \square

Activitats 1.10

\overline{P} 1. Feu una representació pas a pas amb el CABRI, de la construcció del teorema I.44. Comproveu amb les eines de mesura que quan $D = \pi/2$, la construcció proporciona la solució de l'equació de primer grau $AB \cdot x = C$.

\overline{B} 2. El teorema I.45 és una generalització del teorema I.42, en el sentit que la figura d'àrea donada és un polígon qualsevol —un quadrilàter en la presentació d'Euclides— en lloc d'un triangle. Se situa en aquesta posició perquè utilitza I.44 en la construcció.

• **Teorema I.45**

Construir en un angle rectilini donat, un paral·lelogram igual a una figura rectilínia donada.

\overline{S} Descriviu la construcció, suposant que la figura donada és un quadrilàter, partint-la en dos triangles i aplicant I.42 i I.44.

\square

1.10 El teorema de Pitàgores.

Hem tingut oportunitat de veure que el teorema de Pitàgores era conegut de totes les civilitzacions de l'Orient, en èpoques anteriors o contemporànies a la civilització grega del temps de Pitàgores. L'únic dubte es presenta en el cas d'Egipte, en el qual no tenim constància escrita d'aquest coneixement. Gillings es mostra escèptic davant del testimoni de Turnbull, el qual afirma:⁹²

Els seus agrimensors eren coneguts com a tibadors de cordes, perquè utilitzaven cordes amb nusos o marques, en intervals iguals, per mesurar els seus terrenys. Amb aquests mitjans senzills eren capaços de construir angles rectes, perquè coneixien que les tres cordes de longituds, tres, quatre i cinc unitats respectivament, es podien disposar en forma de triangle rectangle.

⁹²Vegeu GILLINGS [1972], 238 en què cita TURNBULL [1951].

Tanmateix Van der Waerden es mostra favorable a acceptar que els egipcis coneixien alguns terns pitagòrics, encara que no hi ha cap menció a la seva associació amb triangles rectangles.⁹³

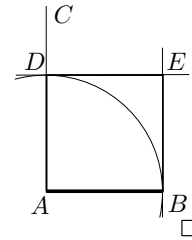
En els *Elements* trobem el teorema de Pitàgores i el seu recíproc en les proposicions I.47 i I.48. Se suposa que la demostració de I.47 és del propi Euclides, i s'han proposat conjetures diverses sobre com els pitagòrics o el mateix Pitàgores podrien haver establert aquest resultat. S'especula des d'algun tipus de “demostració visual” a l'estil de la presentada en l'apartat 1.1.2,⁹⁴ fins a una demostració en què hi participés la semblança de triangles, la qual per estar ben fonamentada necessita d'una teoria de la proporció.⁹⁵ El que s'accepta àmpliament, malgrat l'absència de documentació original, és que els primers pitagòrics tenien una demostració que incorporava, potser d'una manera primitiva, elements del patró axiomàtic–deductiu.

La demostració d'Euclides és constructiva, és a dir que construeix sobre el quadrat de la hipotenusa dos rectangles que el parteixen i tals que les seves àrees són respectivament iguals a cadascun dels quadrats sobre els catets. Per demostrar-ne la veritat utilitza els teoremes I.4, I.14, I.31, I.41 i I.46.

• **Teorema I.46**

Traçar un quadrat sobre una recta donada.

Construeix —per I.11— AC perpendicular a AB per A i considera D sobre AC tal que $AD = AB$. Traça —per I.31— una paral·lela a AB per D , i una paral·lela a AD per B . Aquestes es tallen en E i el quadrat buscat és $ABDE$, la qual cosa justifica amb I.29 i I.34.



⁹³Vegeu l'activitat 1.11.2 i VAN DER WAERDEN [1983], 24.

⁹⁴Vegeu l'activitat 1.11.3.

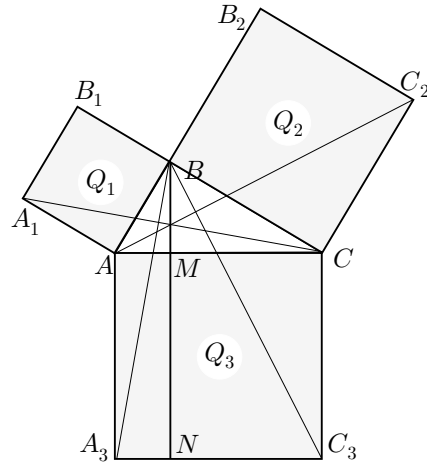
⁹⁵Vegeu la secció 1.2.3.

• **Teorema I.47**

En els triangles rectangles el quadrat sobre el costat que subtendeix l'angle recte és igual als quadrats sobre els costats que formen l'angle recte.⁹⁶

Siguin ABC el triangle rectangle, Q_1 i Q_2 els quadrats AB_1 i BC_2 sobre els catets AB i BC , i Q_3 el quadrat AC_3 sobre la hipotenusa AC . Euclides comença construint aquests quadrats i l'altura des del vèrtex B de l'angle recte —utilitzant I.46 i I.31—, i justifica —per I.14— que els catets estan alineats respectivament amb els costats BB_1 i BB_2 dels quadrats Q_1 i Q_2 . Llavors estableix que si prolonga l'altura BM corresponent al vèrtex B fins tallar en N el costat A_3C_3 més allunyat del quadrat Q_3 , el quadrat Q_1 és igual al rectangle A_3M i el quadrat Q_2 al rectangle C_3M . Consegüentment $Q_1 + Q_2 = Q_3$.

Ho justifica així:



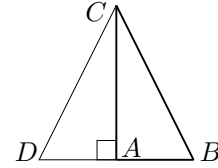
- Q_1 és el doble del triangle A_1AC , per I.41.
- Els triangles A_1AC i BAA_3 són congruents, per I.4.
- El rectangle A_3M és el doble del triangle BAA_3 , per I.41.
- El quadrat Q_1 i el rectangle A_3M són iguals.
- Diu que passaria el mateix per a Q_2 i C_3M .
- $Q_1 + Q_2 = A_3M + C_3M = Q_3$. □

Finalment el teorema I.48 estableix que la propietat de Pitàgores —sobre les àrees dels quadrats dels costats dels triangles— determina els triangles rectangles.

• **Teorema I.48**

Si en un triangle ABC el quadrat sobre un dels costats BC és igual als quadrats sobre els altres dos costats AB i AC del triangle, l'angle format per aquests dos costats del triangle és recte.

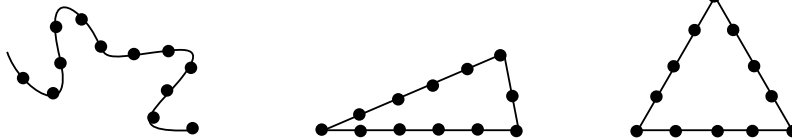
L'estratègia d'Euclides consisteix en construir un triangle rectangle ADC a partir del triangle ABC donat, i demostrar que els dos són congruents amb el teorema I.8, —criteri C–C–C—.



Actua construint —per I.11— una perpendicular a AC en A . Sobre ella considera —per I.3— el punt D tal que $AD = AB$. Llavors —per I.47— $AD^2 + AC^2 = DC^2$; per tant, en ser $AD = AB$ i AC comú als triangles ABC i ADC , s'obté $AB^2 + AC^2 = DC^2$. Per hipòtesi $AB^2 + AC^2 = BC^2$ i, consegüentment, $DC^2 = BC^2$ i $DC = BC$. Per tant els triangles ABC i ADC tenen els tres costats iguals entre si i, per I.8, l'angle $\widehat{BAC} = \widehat{DAC} = \pi/2$. \square

Activitats 1.11

1. Considereu una corda amb dotze nusos, tals que la distància entre cada dos nusos consecutius és constant, un dels nusos es troba en un dels seus extrems, i la distància de l'altre extrem al primer nus és igual a la que hi ha entre dos nusos consecutius. Uniu els extrems de la corda i poseu la corda tibant, mentre estireu per tres nusos a la vegada. Amb aquest procediment, quants triangles diferents, de vèrtexs els nusos pels quals estireu, es poden construir? Algun d'ells és rectangle? Justifiqueu la vostra resposta. E₁



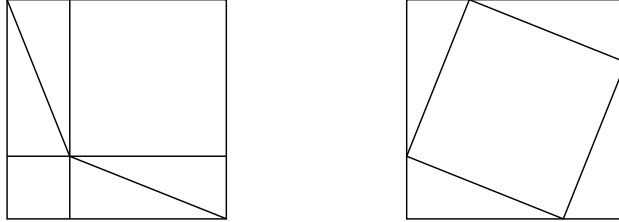
2. La transcripció de Van der Waerden del primer problema del papir Berlin 6619 de l'Imperi Mitjà [ca. 2100–1700] diu: E₂

Un quadrat i un segon quadrat de costat una meitat i una quarta part del primer quadrat, tenen conjuntament àrea 100. Mostreu-me com calcular això.

Utilitzeu el simbolisme algebraic actual per reduir el problema a la resolució d'un sistema d'equacions, i comproveu que s'hi troba implicat un tern pitagòric.⁹⁷ S

3. Observeu els dos gràfics adjunts i establiu el teorema de Pitàgores comparant \overline{E}_1 les àrees dels triangles i quadrilàters que hi apareixen.

\overline{S}



\overline{E}_2 **4.** Proveu que de la demostració d'Euclides a I.47, podem treure el teorema del catet, és a dir que:

\overline{S}

El quadrat construït sobre un catet és igual al rectangle contingut per la seva projecció sobre la hipotenusa i la hipotenusa.

\overline{P} **5.** Construïu un fitxer amb el CABRI en què es visualitzin les transformacions d'àrees que converteixen el quadrat sobre un catet d'un triangle rectangle, en el rectangle sobre la hipotenusa que presenta el teorema I.47.

\overline{S}

\overline{S} **6.** Elaboreu un puzle amb el CABRI, inspirat en el gràfic de la demostració de la pàgina 5, per visualitzar el teorema de Pitàgores.

□

⁹⁷Per al tractament dels terns pitagòrics, vegeu la secció 4.2.

Capítol 2

Els llibres II, III i IV dels *Elements*

En el capítol anterior s'ha posat de manifest el tipus de tractament que fa Euclides, en els *Elements*, de les qüestions que estudia. Ara, presentarem alguns teoremes dels llibres II, III i IV, des de perspectives diverses. En alguns casos purament descriptives, en d'altres, des de la relació que guarden amb altres qüestions de la geometria, o altres parts de la matemàtica. També, en algun casos, cercarem els problemes que els van originar i alguna aplicació.

El llibre II es pot considerar com la continuació natural dels problemes tractats en l'última part del llibre I. Els seus teoremes tenen a veure amb la transformació i aplicació d'àrees, en què les figures implicades són rectangles i quadrats. Com ja hem explicat a la secció 1.9.2, els seus resultats pertanyen a l'àlgebra geomètrica. S'estableixen, entre d'altres qüestions, en llenguatge geomètric i amb el rigor que proporciona el mètode axiomàtic deductiu, els coneixements algebraics coneguts des de molts segles abans, a nivell numèric i no simbòlic, pels babilonis. Tractarem concretament la llei distributiva, el quadrat d'un binomi, una propietat lligada amb el problema de la incommensurabilitat de la diagonal i el costat d'un quadrat, així com amb un conjunt de solucions de $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, i una generalització del teorema de Pitàgores.

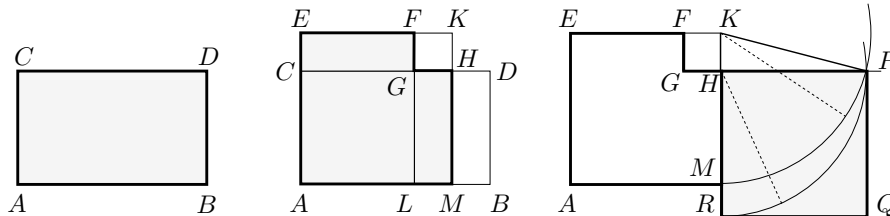
El llibre III està dedicat a la geometria del cercle. En farem una presentació descriptiva, i aprofundirem una mica més en alguns resultants interessants de cara a la resolució de problemes i a l'estudi dels teoremes del llibre IV. Des d'aquest punt de vista són remarcables els teoremes relacionats amb angles inscrits en el cercle, i aquells que originen el concepte posterior de potència d'un punt.¹

¹Trobem a EVES [1963], 102–103 de la traducció espanyola de 1969, que el terme potència d'un punt no fou introduït fins el segle XIX per Jacob Steiner. Abans que ell, l'any 1813, Louis Gaultier publicà un article en el *Journal de l'École Polytechnique* en què no utilitzava

El llibre IV tracta principalment de la inscripció i circumscripció de polígons regulars en una circumferència, amb regle i compàs. Estudiarem, principalment, la inscripció del pentàgon regular. No ho farem perquè tingui un interès pràctic, sinó per veure el tipus d'anàlisi que comporta la no disposició d'una teoria de la proporció.

2.1 Del “merkhet” egipci al gnòmon euclidià

La primera vegada que vam trobar el gnòmon en aquest treball fou en la presentació del teorema I.44, en la secció 1.9.2. Euclides el presenta en la segona definició del llibre II. Veurem que una part del seu interès raurà en què proporciona una representació gràfica de la diferència de dos quadrats. Això servirà per relacionar àrees de rectangles amb àrees de quadrats, amb el concurs del teorema de Pitàgores. En donem una primera mostra en la figura adjunta, en què $ALGC$ és un quadrat, $LM = MB$ i $HMBD = ECGF$. Si en fem una inspecció visual, i tenim present el teorema I.47, observem que el rectangle $ABCD$, s'ha transformat en dues figures d'igual àrea: el gnòmon $AMHGFE$ i, després, en el quadrat $HPQR$.



Presentarem la definició d'Euclides i, tenint en compte que un dels significats de la paraula gnòmon —del grec $\gamma\nu\acute{\omega}\mu\omega\nu$ — significa «allò que té o porta coneixement»,² revisarem l'origen i l'evolució del seu significat.

• Definició II.2

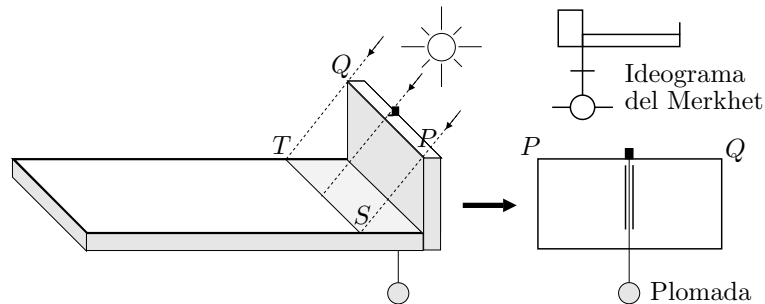
En qualsevol recinte paral·lelogramàtic s'anomena gnòmon a qualsevol dels dos paral·lelograms travessats per la diagonal junt amb els seus dos complements.

Sembla ser que el terme gnòmon és una traducció literal del terme egipci “merkhet”. Se sap que en temps de la dinastia 18a —allà pels segles XIV–XVI aC— els egipcis utilitzaven un instrument anomenat “merkhet” per mesurar les hores del dia. El significat literal d'aquesta paraula era “instrument de coneixement”.

aquest terme, però en desenvolupava el concepte i introduïa, per primera vegada, els termes “eix radical” i “centre radical”.

² $\gamma\nu\omega\mu\eta$ —gnomé— és «coneixement»

Aquest era un objecte amb forma de “L”. N’existien models diferents, i un d’ells consistia en dues peces rectangulars, una vertical més curta, i una altra horitzontal més llarga, de la mateixa amplada. Una plomada certificava l’horitzontalitat. Per fer-ne la lectura s’havia d’orientar, abans del migdia, en direcció a l’Est, i després en direcció a l’Oest. La distància de la línia d’ombra ST —del costat superior PQ del rectangle vertical— a la base de la peça vertical determinava l’hora del dia.³ Les hores extremes de sortida i de posta de Sol no es podien determinar perquè les ombres eren massa llargues. Això es corregí inclinant el rectangle horitzontal, de manera que formés un angle agut amb el vertical. En temps de la dinastia 19a —XIII aC—, aquests objectes evolucionaren cap als rellotges consistents en un estilet, vareta, obelisc o qualsevol altre objecte plantat perpendicularment al terra o superfície horitzontal. El punt de contacte amb el terra era el centre d’una circumferència amb dotze radis gravats al llarg de mitja circumferència. La seva lectura s’havia de fer orientant-lo sempre en una mateixa direcció.



Més endavant, entre els cronistes dels científics grecs, trobem alguns testimonis sobre la invenció o introducció d'aquest instrument:⁴

Diògenes Laertes atribueix la invenció a Anaximandre [VI aC]:

[...] fou el primer en inventar un gnòmon i el situà sobre els rellotges de Sol en Lacedemònia, segons diu Favorinus en la seva *Historia varia*, per marcar els solsticis i els equinoccis, i va construir un indicador d'hores.

D'altra banda l'enciclopèdia *Suda*⁵ no li atribueix la invenció sinó la introducció:

Fou el primer en descobrir l'equinocci, els solsticis, un indicador d'hores i que la terra està situada en el centre. Va introduir el gnòmon i, en general, donà a conèixer un esbós de geometria.

³Hem trobat aquesta descripció a GAZALÉ [1999], 6–7, en què estudia objectes de la natura i de les matemàtiques als que si s'afegeix un cert objecte o gnòmon, conserven la forma original. Una descripció més detallada es troba a SÁNCHEZ [2000], 96–101. L'ideograma que es presenta a la figura adjunta està tret de PAVANELLO–TRINCHERO [1998], 39.

⁴Vegeu KIRK–RAVEN [1966], 145–152 de la traducció espanyola de 1974.

⁵Enciclopèdia bizantina del segle X sobre el món mediterrani antic.

I, finalment, Herodot s'expressa dient:

Els grecs van adquirir dels babilonis el coneixement de l'esfera celeste, del gnòmon i de les dotze parts del dia.

De tot això es desprèn que possiblement Anaximandre va introduir aquest instrument a Grècia, però no va ser el seu inventor. Tanmateix tenim cites que afirmen que Tales [VI aC] va mesurar l'altura de les piràmides a partir de les seves ombres i les ombres d'una vareta vertical, i que va predir solsticis. Això podria implicar el coneixement del gnòmon per part de Tales i, en ser aquest de més edat que Anaximandre, podria haver-ne sigut el seu introductor. Plutarc escriu:⁶

També a tu t'admira per altres coses, però sobretot ell [Amasis⁷] es va sentir profundament satisfet amb la teva manera de mesurar la piràmide, quan sense dificultat ni assistència de cap instrument, simplement posant un “bastó dret” en l'extrem de l'ombra projectada per la piràmide, i havent-se fet dos triangles amb la intersecció dels raigs del sol, vas mostrar que la piràmide té amb el bastó la mateixa raó que l'ombra amb l'ombra.

Amb tot això, podem entendre com el terme gnòmon, —estretament lligat en un principi amb el terme coneixement—, es pren com a traducció literal de merkhet —instrument de coneixement—, i s'utilitza per designar una vareta perpendicular a una superfície i, per extensió, alguna mena d'escaire o traçador d'angles rectes en forma de “L”. Des d'aquesta observació s'entén la definició d'Aristòtil:⁸

El significat més estricte de la paraula [gnòmon] és el que resta d'un quadrat quan se li treu un altre quadrat més petit.

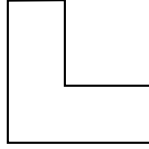
Des d'aquesta concepció es pot entendre la definició d'Euclides com una extensió general a paral·lelograms. Efectivament, el gnòmon euclidià, constituït pels paral·lelograms P_1 , P_2 i P_3 , coincideix amb la figura que resta de treure a un paral·lelogram, un paral·lelogram semblant amb un angle coincident.⁹

⁶Vegeu el fragment 147a de PLUTARC [I-II].

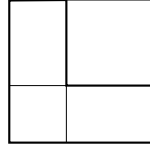
⁷Rei d'Egipte (570–526), penúltim de la dinastia saïta.

⁸Vegeu el fragment 203a de la *Física* d'ARISTÒTIL [IV aC].

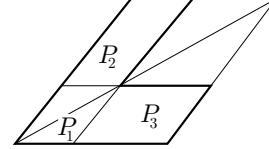
⁹Aquesta concorda amb la definició més general d'Heró [III]. Afirmar que un gnòmon és una figura \mathcal{G} que, afegida a una altra \mathcal{F} , proporciona una figura \mathcal{F}' semblant a la figura \mathcal{F} .



Escaire



Gnòmon aristotèlic



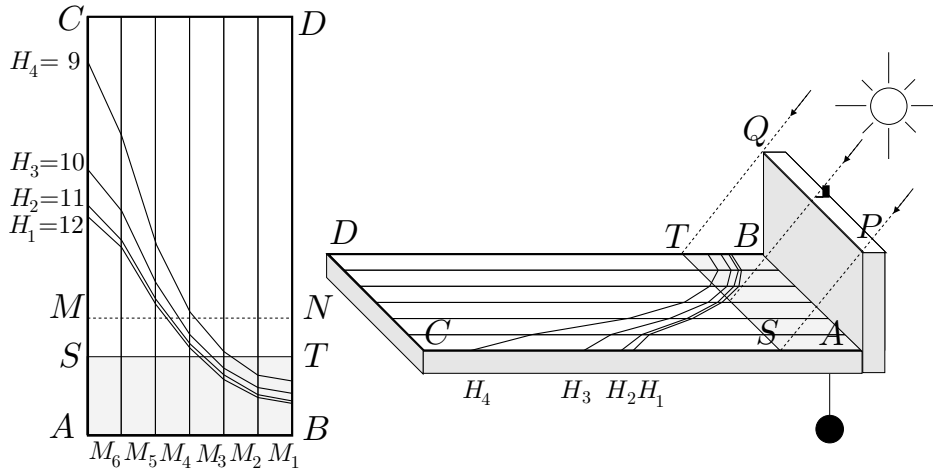
Gnòmon euclidià

Evolució del significat del terme *gnòmon*

Activitats 2.1

1. Presentem una versió alternativa d'un rellotge d'ombra, inspirada en un merkhet. En aquest cas, l'estructura està formada, igual que abans, per dues peces rectangulars, una vertical i l'altra horitzontal; la diferència rau en què, en la nova versió, la lectura es fa orientant el rellotge en la direcció del Sol. És a dir, si mireu la figura, fent que el pla de cada raig paral·lel QT , PS , etc., i la seva ombra respectiva siguin perpendiculars a la peça vertical. Imaginem la peça horitzontal dividida en sis regions M_i per cinc línies perpendiculars al rectangle $\overline{E_2}$ vertical. Unes línies H_k travessen, amb inclinacions diferents, les regions M_i . Aquestes últimes determinen els mesos —cadascuna serveix per a dos mesos separats per mig any—; cada mes s'ha d'observar la posició de l'ombra en una d'aquestes regions. Les línies H_k determinen les hores al voltant del migdia solar —en el nostre model set hores—. L'hora es llegeix a partir de la intersecció de la línia d'ombra ST amb les línies H_k , dins de la regió del mes corresponent M_i . A la figura adjunta les línies de separació de les regions M_i representen el 21 de cada mes.¹⁰ Les línies H_k representen les hores solars que van de les 9 del matí a les 3 de la tarda. Per exemple, si ens trobem a M_1 —entre el 21 de maig i el 21 de juliol—, la línia d'ombra ST indica que no s'ha arribat a les 9 h. del matí o que s'ha passat de les 3 h. de la tarda.

¹⁰N'hem elaborat un gràfic simulat, representant la posició de les ombres per a les diferents altures del Sol sobre l'horitzó, —en intervals de 15° del seu recorregut circular diari—, dels dies 21 dels mesos de desembre a juny. Les lectures dels altres mesos es fan simètricament; per exemple, el 21 de novembre i el 21 de gener es llegeixen sobre la mateixa línia, encara que això produeix una mica d'error.



i) Imagineu que us trobeu entre el 14 i el 21 d'abril. Aproximeu l'hora que marca el merkhet?

\boxed{S}

ii) En quins mesos podem trobar que la línia d'ombra ST coincideix amb MN a alguna hora del dia? I amb la línia CD ?

iii) Quina zona rectangular estarà sempre a l'ombra, el 21 de gener?

\overline{P}

2. Elaboreu un fitxer amb el CABRI que presenti un merkhet amb la línia H_1 del migdia, i que indiqui els possibles mesos de l'any en què us trobeu, segons la posició de l'ombra projectada.

\boxed{S}

□

2.2 La llei distributiva, la potència d'un binomi i els teoremes II.1, II.4 i II.7

Enfocarem aquests tres teoremes des de la perspectiva de l'àlgebra simbòlica, amb la finalitat de veure que proporcionen una excel·lent presentació geomètrica d'algunes de les seves propietats.¹¹ No ens cansarem d'advertir i recordar, amb el perill de fer-nos pesats, que aquest enfoc comporta la identificació biunívoca de cada segment amb un nombre positiu, i de cada superfície rectangular amb el producte dels dos nombres identificats amb els seus costats. Aquesta identificació implica l'acceptació que la crisi de la incommensurabilitat està resolta amb la introducció de nous tipus de nombres, i això no és un afer trivial.

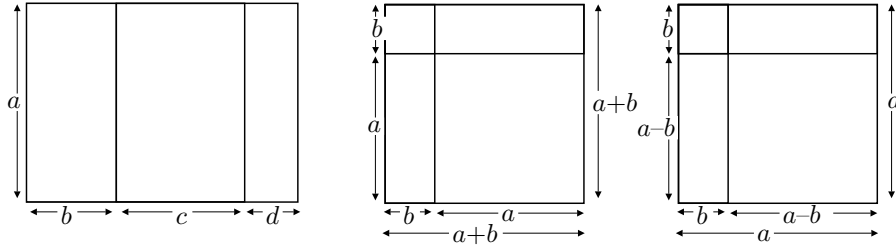
Un cop fet l'advertiment, presentem la propietat distributiva i les expressions per al quadrat d'un binomi, en farem una interpretació geomètrica i veurem que proporcionen els teoremes citats:

¹¹Aquest fet pot ser interessant de cara a la pràctica docent, en una primera aproximació a la presentació de l'àlgebra simbòlica.

Llei distributiva: $a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots$

Potència d'un binomi: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$



- La llei distributiva manifesta que el rectangle de costats a i $b + c + d + \dots$, té la mateixa àrea que els rectangles de costats a i b , a i c , a i d , \dots , agafats conjuntament.
- La potència d'un binomi, pel cas de la suma, expressa la descomposició d'un quadrat de costat $a + b$, en dos quadrats de costats respectius a i b , i dos rectangles de costats a i b . Això és pot demostrar traçant una perpendicular sobre cadascun de dos costats $a + b$ adjacents del quadrat, que els parteixi en dos segments a i b .
- La potència d'un binomi, per al cas de la diferència, —considerem $a > b$ —, també es pot expressar com

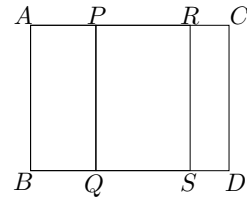
$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab.$$

És a dir la descomposició d'una suma de quadrats en un quadrat i dos rectangles. Es pot demostrar aquest resultat, considerant el quadrat de costat a i traçant una perpendicular sobre cadascun de dos costats adjacents de manera que quedin partits en els segments $a - b$ i b .

Finalment, podem veure que aquestes interpretacions són, exactament, els teoremes que presenta Euclides.

• **Teorema II.1**

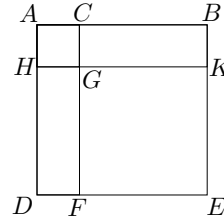
Si hi ha dues línies rectes AC i AB , i una d'elles AC es talla en un nombre qualsevol de segments AP , PR i RC , el rectangle contingut per les dues rectes AC i AB és igual als rectangles continguts per la recta AB no tallada i cadascun dels segments.



És a dir, $AC \cdot AB = AP \cdot AB + PR \cdot AB + RC \cdot AB$.

• **Teorema II.4**

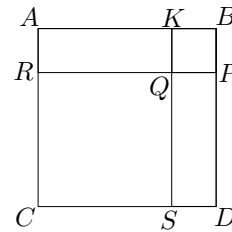
Si es talla una línia recta AB , el quadrat sobre la recta sencera és igual als quadrats sobre els segments AC i CB , i dues vegades el rectangle contingut pels segments.



És a dir, $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2 AC \cdot CB$.

• **Teorema II.7**

Si es talla a l'atzar una línia recta AB , el quadrat sobre la línia sencera i el quadrat sobre un dels segments KB , agafats conjuntament, són igual a dues vegades el rectangle contingut per la recta sencera i el segment citat, i el quadrat sobre el segment AK que resta.



És a dir, $AB^2 + KB^2 = 2 AB \cdot KB + AK^2$.

Activitats 2.2

1. Considerem l'expressió $(a+b+c)^2$, la qual podem interpretar geomètricament com un quadrat de costat $a + b + c$, en què a , b i c són tres segments donats.

\overline{E}_1 i) Trobeu una descomposició gràfica del quadrat $(a + b + c)^2$ en què només estiguin implicats els quadrats a^2 , b^2 i c^2 , i els rectangles $a \cdot b$, $a \cdot c$ i $b \cdot c$.

\overline{E}_2 ii) Feu una demostració algebraica del resultat obtingut, utilitzant el quadrat del binomi i les lleis distributiva, associativa i commutativa.

\overline{P} iii) Elaboreu una presentació amb el CABRI, que plantegi la descomposició a nivell geomètric per alumnes de primer cicle de ESO.

\overline{B} 2. Tracteu de generalitzar l'estudi anterior, —amb llenguatge algebraic—, mitjançant les següents etapes:

i) Trobeu una expressió algebraica per a $(a + b + c + d)^2$.

ii) Trobeu una expressió per a $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$, i demostreu-la per inducció.

iii) Observem que del desenvolupament de $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$, resulten tants sumands com parelles $a_i a_j$, —amb elements repetits o no—, es puguin construir. És a dir n^2 sumands, dels quals n corresponen als quadrats a_k^2 , i $n^2 - n$ corresponen als productes $a_i a_j$, amb $i \neq j$. Observem, també, que el nombre de sumands $s_n = n^2$ del desenvolupament es pot expressar en forma recurrent:

$$s_1 = 1, \quad s_n = s_{n-1} + 2(n-1) + 1 = s_{n-1} + 2n - 1,$$

en què $2(n - 1)$ és el nombre de sumands $a_i a_n$, amb $i < n$ que s'afegeixen en cada etapa, al qual hem d'afegir un sumand a_n^2 . Així, hem trobat una expressió no recurrent per a s_n .

Ara volem generalitzar aquesta qüestió, i us plantegem que trobeu una expressió no recurrent per a la successió, S

$$s_n = s_{n-1} + an + b.$$

□

2.3 Els nombres costat i diagonal i el teorema II.10

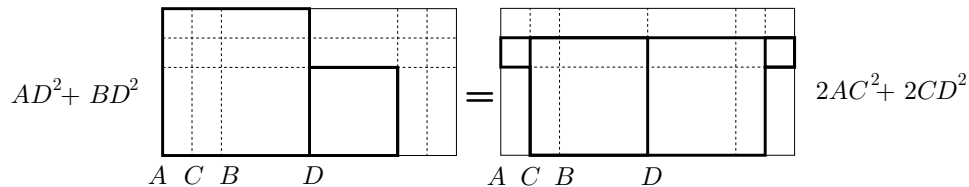
Presentem el teorema II.10 des del punt de vista de la relació que guarda amb les propietats dels nombres costat i diagonal, descoberts amb motiu de les investigacions entorn de la incommensurabilitat. Veurem que aquest teorema es podria haver generat en l'intent de d'aproximar, en nombres enters, la relació entre la diagonal i el costat d'un quadrat. Una conseqüència de l'estudi serà la recerca d'un algorisme per al càlcul aproximat d'arrels.

• **Teorema II.10**

Si es divideix una línia recta AB en dues parts iguals AC i CB i se li afegeix, en línia recta, una altra línia recta BD , el quadrat de la línia sencera AB amb l'afegida BD , i el quadrat de l'afegida BD agafats conjuntament, són el doble del quadrat sobre la meitat AC i el quadrat sobre la línia CD construïda a partir de la meitat CB i la línia afegida BD , agafades conjuntament.

Amb la notació que proporciona la nostra àlgebra, escriuríem

$$AD^2 + BD^2 = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot CD^2 \text{ o, també, } AD^2 - 2 \cdot CD^2 = 2 \cdot AC^2 - BD^2. \quad (2.1)$$



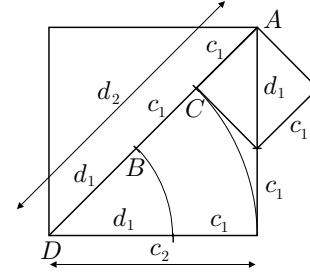
La demostració d'Euclides utilitza els resultats del llibre I. En el seu lloc presentem la "demostració gràfica" adjunta, força accessible a una primera intuïció. Es tracta de retallar i comparar convenientment els quadrats implicats.¹²

¹²Vegeu l'activitat 2.3.1.

2.3.1 Nombres costat i diagonal

Quan fèiem la recerca d'una unitat comuna de mesura, a la secció 1.2.3, entre la diagonal i el costat d'un quadrat, vam observar que, per a cada quadrat de diagonal d_2 i costat c_2 , es podia construir un quadrat més petit de diagonal, d_1 i costat c_1 , tals que

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1 + d_1 \\ d_2 &= 2c_1 + d_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$



A més, segons el teorema de Pitàgores, aquests segments compleixen

$$d_1^2 = 2c_1^2 \quad \text{i} \quad d_2^2 = 2c_2^2. \quad (2.3)$$

La possibilitat de repetició indefinida d'aquesta construcció comportava la no existència d'aquesta unitat comuna. Això implicava la no existència d'una relació, en nombres enters, entre la diagonal i el costat d'un quadrat. Un dels problemes que, en conseqüència, es plantejaren, fou el de trobar una aproximació, en nombres enters, d'aquesta relació.¹³ Els nombres que resultaran d'aquesta recerca van ser anomenats pels grecs, "nombres costat i diagonal". En trobem una presentació en la *Expositio* de Teó d'Esmirna [ca. 125],¹⁴ en què els defineix i en dóna una propietat essencial. El fet que guardin una relació estreta amb el teorema 10 del llibre II dels *Elements* i que n'aparegui la parella (5,7) en el fragment 546c de la *La República*, origina que s'atribueixi el seu descobriment als pitagòrics. Estudiarem aquest problema seguint el camí, de construcció de quadrats, invers al que hem utilitzat per establir la incommensurabilitat.

Construïm un quadrat de costat c i diagonal d . Considerem c amb mesura entera c_1 , i aproximem d amb un segment de mesura entera d_1 . Després, construïm el quadrat de costat c_2 , sota les condicions de les equacions (2.2), i considerem l'aproximació entera d_2 de la seva diagonal. Si agafem c com a unitat de mesura, —és a dir $c_1 = 1$ —, l'aproximació entera òptima per a d_1 haurà de ser, pel teorema de Pitàgores, $d_1 = 1$ o $d_1 = 2$. Agafem $d_1 = 1$ perquè proporciona un error més petit en la verificació de les equacions (2.3).¹⁵ Efectivament,

$$1^2 = 2 \cdot 1^2 \boxed{-1} \quad \text{i} \quad 2^2 = 2 \cdot 1^2 \boxed{+2}.$$

¹³Això equival al càlcul d'aproximacions racionals del nombre irracional $\sqrt{2}$.

¹⁴Vegeu TEÓ D'ESMIRNA [II], 71–75, i la secció 8.12.1.

¹⁵És interessant fer la lectura del fragment de Teó per tal d'observar i contrastar la motivació diferent que manifesta per agafar $c_1 = d_1 = 1$.

D'aquesta manera obtenim les dues parelles de nombres costat i diagonal

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ d_1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c_2 = c_1 + d_1 = 1 + 1 = 2 \\ d_2 = 2c_1 + d_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \end{cases}$$

els quals compleixen les condicions

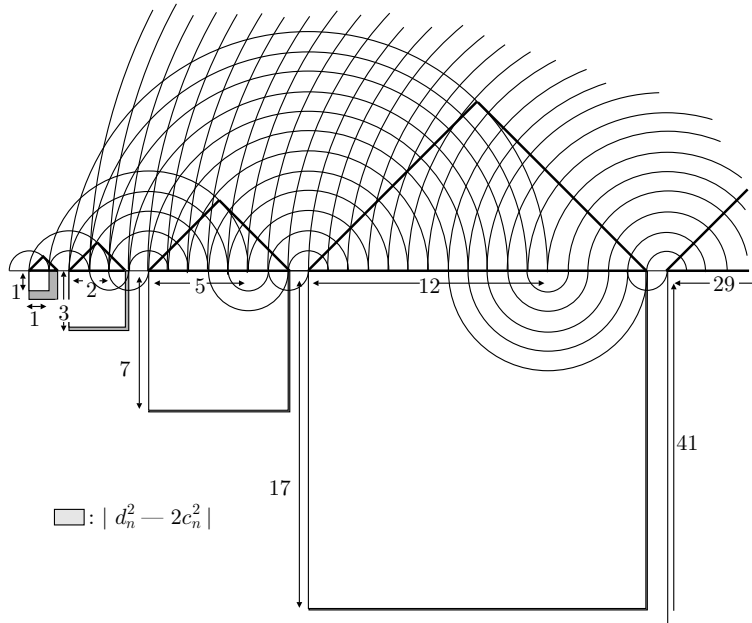
$$d_1^2 - 2c_1^2 = 1 - 2 = -1 \quad \text{i} \quad d_2^2 - 2c_2^2 = 9 - 8 = 1. \quad (2.4)$$

Aquestes indiquen que l'incopliment per excés o per defecte de les relacions (2.3) es manté, en valor absolut, en una diferència igual a 1. Per tant, en ser el quadrat de costat c_2 de dimensions més grans que el quadrat de costat c_1 , les mesures enteres $c_2 = 2$ i $d_2 = 3$ aproximen millor que les mesures $c_1 = 1$ i $d_1 = 1$, tal com es veu al gràfic adjunt. Aquesta optimització de l'aproximació suggereix la conveniència de repetir el procés. Crearem la col·lecció de quadrats de costats c_n i les parelles corresponents (c_n, d_n) de nombres costat i diagonal tals que

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n + d_n \\ d_{n+1} &= 2c_n + d_n, \end{aligned}$$

i estudiarem les diferències

$$d_n^2 - 2c_n^2. \quad (2.5)$$



Si aquestes es mantenen constants, en valor absolut, c_n i d_n aproximaran, en ser creixents, cada vegada millor la relació entre la diagonal i el costat dels quadrats. En aquest cas la col·lecció de nombres costat i diagonal

$$(1, 1), (2, 3), (5, 7), (12, 17), (29, 41), \dots$$

determinarà, cada vegada millor, la relació $\sqrt{2}$ entre els dos segments. Així, d'aquestes parelles obtenim les aproximacions,

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{3}{2} = 1.5, \quad \frac{7}{5} = 1.4, \quad \frac{17}{12} = 1.41666\dots, \quad \frac{41}{29} = 1.41379\dots$$

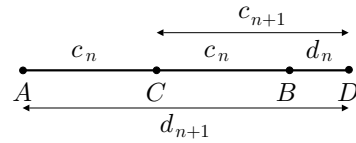
2.3.2 Relació entre II.10 i els nombres costat i diagonal

La resposta a la qüestió de l'estudi de les diferències $d_n^2 - 2c_n^2$, la trobem en el teorema II.10. Així ho declara Procle en els *Comentaris sobre la República de Plató*:¹⁶

La propietat dels nombres costat i diagonal es provada gràficament en el segon llibre dels *Elements* per ell. Perquè si una línia recta és afegida a una altra, el quadrat sobre tota la línia, inclosa l'afegida, i el quadrat sobre aquesta última, són el doble del quadrat sobre la meitat de la línia inicial i del quadrat sobre la línia construïda ajuntant aquesta meitat i la línia afegida.

Efectivament, veiem que aquest és l'enunciat del teorema II.10. Llavors, si anomenem en la igualtat (2.1)

$$c_n = AC = CB \quad \text{i} \quad d_n = BD,$$



aquest teorema implica en el nostre cas que, per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d_{n+1}^2 - 2c_{n+1}^2 &= (2c_n + d_n)^2 - 2(c_n + d_n)^2 = \\ &= AD^2 - 2 \cdot CD^2 = 2 \cdot AC^2 - BD^2 = (-1) \cdot (d_n^2 - 2c_n^2). \end{aligned}$$

Finalment, per les condicions inicials (2.4),

$$\begin{aligned} d_n^2 - 2c_n^2 &= (-1) \cdot (d_{n-1}^2 - 2c_{n-1}^2) = (-1)^2 \cdot (d_{n-2}^2 - 2c_{n-2}^2) = \dots = \\ &= (-1)^{n-1} \cdot (d_1^2 - 2c_1^2) = (-1)^n \end{aligned}$$

En resum, la recerca d'una aproximació, en nombres enters, de la relació entre la diagonal i el costat d'un quadrat ha originat la successió de parelles (c_n, d_n) de nombres costat i diagonal, de la qual interessava estudiar el comportament de $d_n^2 - 2c_n^2$. És a dir, s'ha generat un problema en què:

¹⁶Vegeu HEATH [1908], I, 400 de l'edició de 1956.

- Les hipòtesis de sortida són les mateixes que les de II.10.¹⁷ Disposem dels segments $c_n = AC = CB$ i $d_n = BD$, i considerem els segments

$$\begin{aligned}c_{n+1} &= c_n + d_n = CB + BD = CD \\d_{n+1} &= 2c_n + d_n = AC + CB + BD = AD.\end{aligned}$$

- La qüestió que es planteja, és l'estudi —que soluciona II.10— de la relació entre les diferències

$$d_n^2 - 2c_n^2 = BD^2 - 2 \cdot AC^2 \quad \text{i} \quad d_{n+1}^2 - 2c_{n+1}^2 = AD^2 - 2 \cdot CD^2.$$

Sembla doncs natural, conjecturar que II.10 es podia haver generat amb motiu de l'estudi de les propietats dels nombres costat i diagonal. Tanmateix, cal notar que el seu caràcter més general permet considerar parelles (c_n, d_n) amb $c_1 \neq d_1$; llavors les diferències (2.5) també es mantenen constants i es tornen a obtenir aproximacions de $\sqrt{2}$.

Per exemple, si $c_1 = 1$ i $d_1 = 3$, obtenim les relacions

$$\frac{3}{1} = 3, \quad \frac{5}{4} = 1.25, \quad \frac{13}{9} = 1.44444\dots, \quad \frac{31}{22} = 1.40909\dots, \quad \frac{75}{53} = 1.41509\dots$$

2.3.3 Tractament numèric de l'aproximació de $\sqrt{2}$

El fet de treballar amb nombres, ens invita a utilitzar les propietats —conegudes des de les tradicions més antigues—, distributiva, quadrat del binomi, etc., per completar l'estudi dels nombres costat i diagonal i les aproximacions que proporcionen de la relació $\sqrt{2}$. En definitiva, es tracta de provar, sense recórrer a la geometria, que els nombres costats i diagonal c_n i d_n , definits per

$$\begin{aligned}c_1 &= d_1 = 1 \\d_{n+1} &= 2c_n + d_n \\c_{n+1} &= c_n + d_n,\end{aligned}$$

compleixen $d_n^2 - 2c_n^2 = (-1)^n$, i estudiar el grau d'aproximació que ofereix d_n/c_n respecte $\sqrt{2}$, en funció de n .

En primer lloc, $d_1^2 - 2c_1^2 = -1$ i

$$\begin{aligned}d_{n+1}^2 - 2c_{n+1}^2 &= (2c_n + d_n)^2 - 2(c_n + d_n)^2 = \\&= (4c_n^2 + d_n^2 + 4c_n d_n) - (2c_n^2 + 2d_n^2 + 4c_n d_n) = \\&= (2c_n^2 - d_n^2) = (-1) \cdot (d_n^2 - 2c_n^2),\end{aligned}$$

¹⁷Amb la restricció que, aquí, els segments c_n i d_n són commensurables.

impliquen $d_n^2 - 2c_n^2 = (-1)^n$.

Quant al quocient d_n/c_n , si dividim la última igualtat per c_n^2 , tenim

$$\frac{d_n^2}{c_n^2} - 2 = \frac{(-1)^n}{c_n^2} \implies \left| \frac{d_n^2}{c_n^2} - 2 \right| = \frac{1}{c_n^2}.$$

Llavors, $c_n = c_{n-1} + d_{n-1} \geq c_{n-1} + c_{n-1} = 2c_{n-1} \implies \frac{1}{c_n} \leq \frac{1}{2c_{n-1}}$; per tant,

$$\left| \frac{d_n^2}{c_n^2} - 2 \right| = \frac{1}{c_n^2} \leq \frac{1}{4c_{n-1}^2} \leq \frac{1}{16c_{n-2}^4} \leq \dots \leq \frac{1}{4^{n-1}c_1^{2(n-1)}} = \frac{1}{4^{n-1}}.$$

D'aquí, finalment, podem obtenir la mesura i convergència de les aproximacions:

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{d_n}{c_n} + \sqrt{2} \right) \left(\frac{d_n}{c_n} - \sqrt{2} \right) \right| &\leq \frac{1}{4^{n-1}} \implies \\ \left| \left(\frac{d_n}{c_n} - \sqrt{2} \right) \right| &\leq \frac{1}{4^{n-1} \left(\frac{d_n}{c_n} + \sqrt{2} \right)} < \frac{1}{4^{n-1} \cdot 2}. \end{aligned}$$

Per exemple, si considerem la successió de nombres costat i diagonal,

$$(1, 1), (2, 3), (5, 7), (12, 17), (29, 41), (70, 99),$$

tenim l'acotació de l'error, produït per l'aproximació 99/70,

$$\left| \frac{99}{70} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{4^5 \cdot 2} = \frac{1}{2048} < 4.9 \cdot 10^{-4}.$$

És a dir, com que $99/70 = 1.4142857\dots$,

$$\boxed{1.41379} < 1.4142857 - 4.9 \cdot 10^{-4} < \boxed{\sqrt{2}} < 1.4142857 + 4.9 \cdot 10^{-4} < \boxed{1.41478}.$$

De fet sabem, per altres mitjans, que $\sqrt{2} = 1.4142136\dots$, i l'error comès és, en realitat, menor que $7.3 \cdot 10^{-5}$.

2.3.4 Generalització per al càlcul de \sqrt{A} , amb $A \in \mathbb{N}$

Sabem que podem resoldre el problema de duplicar el quadrat de costat a_1 , construint el seu costat a_2 que coincideix amb la diagonal del quadrat a_1^2 . Utilitzant el teorema de Pitàgores, podem triplicar el quadrat a_1^2 , construint el seu costat a_3 el qual coincideix amb la diagonal del rectangle de costats a_1 i a_2 . En general, podem construir un quadrat tal que la seva àrea sigui n vegades la de a_1^2 , a

partir del seu costat a_n que coincideix amb la diagonal del rectangle a_1 i a_{n-1} . Efectivament, pel teorema de Pitàgores,

$$a_n^2 = a_{n-1}^2 + a_1^2 = a_{n-2}^2 + 2a_1^2 = \dots = a_1^2 + (n-1)a_1^2 = na_1^2.$$

Si agafem a_1 com a segment unitat de mesura, hem obtingut, en el llenguatge de la nostra aritmètica, la construcció de \sqrt{n} , en què $n \in \mathbb{N}$.¹⁸ En efecte,

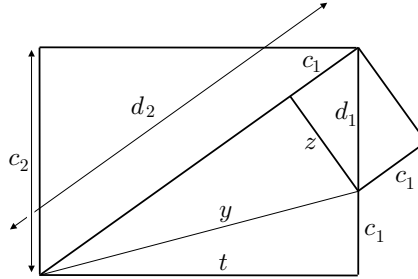
$$a_n^2 = na_1^2 = n \cdot 1^2 = n \implies a_n = \sqrt{n}.$$

Ara, generalitzarem l'estudi de les seccions anteriors. Podem pensar \sqrt{A} com la diagonal d_1 d'un rectangle de costats $c_1 = 1$ i $\sqrt{A-1}$, del qual hem presentat una possible construcció. A més, es compleix $d_1^2 = A = A \cdot 1 = Ac_1^2$.

Actuem com en el cas del quadrat i construïm un altre rectangle amb un costat

$$\boxed{c_2 = c_1 + d_1},$$

amb la seva diagonal d_2 sobre la recta suport del costat c_1 del primer rectangle.



Ara, cerquem una expressió per a d_2 en funció de c_1 i d_1 , utilitzant el teorema de Pitàgores, el quadrat d'un binomi, i la notació de la figura adjunta:¹⁹

$$\begin{aligned} (d_2 - c_1)^2 &= y^2 - z^2 = c_1^2 + t^2 - (d_1^2 - c_1^2) = \\ &= c_1^2 + (d_2^2 - (d_1 + c_1)^2) - (d_1^2 - c_1^2) = \\ &= c_1^2 + d_2^2 - 2d_1^2 - 2c_1d_1. \end{aligned}$$

Desenvolupant i cancel·lant termes, obtenim

$$d_2^2 - 2d_2c_1 + c_1^2 = c_1^2 + d_2^2 - 2d_1^2 - 2c_1d_1,$$

$$d_2c_1 = d_1^2 + c_1d_1 = Ac_1^2 + c_1d_1,$$

$$\boxed{d_2 = Ac_1 + d_1}.$$

¹⁸Per a una representació gràfica vegeu l'activitat 2.3.3.

¹⁹No utilitzem la semblança de triangles, en no tenir definida la raó entre magnituds incommensurables. Si s'assumeix la teoria de la proporció també s'assoleix l'objectiu:

$$d_1^2 = Ac_1^2 \quad \text{i} \quad \frac{d_1}{c_1} = \frac{d_2}{c_2} = \frac{d_2}{c_1 + d_1} \implies d_1c_1 + d_1^2 = c_1d_2 \implies d_2 = \frac{d_1^2}{c_1} + d_1 = Ac_1 + d_1.$$

Si busquem la relació entre els quadrats sobre c_2 i d_2 , obtenim

$$\begin{aligned} d_2^2 &= (Ac_1 + d_1)^2 = A^2c_1^2 + 2Ac_1d_1 + d_1^2 = \\ &= Ad_1^2 + 2Ac_1d_1 + Ac_1^2 = A(c_1 + d_1)^2 = Ac_2^2. \end{aligned}$$

En resum, hem construït dos rectangles tals que entre els costats c_i i les diagonals d_i hi ha les relacions següents:

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1 + d_1 \\ d_2 &= Ac_1 + d_1 \\ d_1^2 &= Ac_1^2 \quad \text{i} \quad d_2^2 = Ac_2^2 \end{aligned}$$

La situació és idèntica a la presentada en el cas $A = 2$, quan d_1 i c_1 eren incommensurables. Ens plantegem la qüestió de trobar aproximacions en nombres enters a la relació $d_1/c_1 = \sqrt{A}$. Actuem com en aquell cas:

- Prenem c_1 com a unitat de mesura. Considerem d_1 una aproximació entera a la diagonal, la qual de moment no ens preocuparà que sigui la millor. Per exemple, agafem $d_1 = 1$.
- Construïm les parelles de nombres enters,

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = d_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n + d_n \\ d_{n+1} = Ac_n + d_n. \end{array} \right.$$

- Estudiem les diferències $d_n^2 - Ac_n^2$, des de la perspectiva numèrica, en no disposar d'una generalització del teorema II.10, per a $A \neq 2$.²⁰

$$\begin{aligned} d_{n+1}^2 - Ac_{n+1}^2 &= (Ac_n + d_n)^2 - A(c_n + d_n)^2 = A^2c_n^2 + d_n^2 - Ac_n^2 - Ad_n^2 = \\ &= (1 - A)(d_n^2 - Ac_n^2) = \dots = (1 - A)^{n+1} \end{aligned}$$

Les diferències no són constants en valor absolut i, a més, creixen per sobre de qualsevol límit. No queda clar que de les seves raons en resultin unes aproximacions que convergeixin a \sqrt{A} .

- Estudiem si d_n/c_n convergeix a \sqrt{A} . En ser, per a $n \geq 2$,

$$c_n > d_{n-1} > Ac_{n-2} > A^2c_{n-4} > \dots > \left\{ \begin{array}{l} A^{\frac{n-1}{2}}c_1, \quad n \text{ senar} \\ A^{\frac{n-2}{2}}c_1, \quad n \text{ parell,} \end{array} \right.$$

²⁰No creiem difícil aconseguir l'aproximació, amb el procediment "gràfic" suggerit quan hem enunciat II.10. A més les igualtats d'aquest apartat queden justificades per a magnituds geomètriques a partir dels teoremes del llibre II.

se n'observa la convergència,

$$\left| \frac{d_n^2}{c_n^2} - A \right| = \frac{|1-A|^n}{c_n^2} < \begin{cases} \left(\frac{|1-A|}{A} \right)^{n-1} |1-A| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, & n \text{ senar} \\ \left(\frac{|1-A|}{A} \right)^{n-2} |1-A|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, & n \text{ parell,} \end{cases}$$

Observem que es dona la convergència però amb velocitat decreixent conforme agafem valors de A més elevats i més allunyats de la unitat. Per exemple, si pretenem aproximar $\sqrt{7}$, obtenim les primeres parelles

$$(1, 1), (2, 8), (10, 22), (32, 92),$$

les quals proporcionen les aproximacions,

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{8}{2} = 4, \quad \frac{22}{10} = 2.2, \quad \frac{92}{32} = 2.875, \quad \frac{316}{124} = 2.548 \dots$$

Veiem que convergeix més lentament que per al cas $\sqrt{2}$. Si partim de valors inicials més convenients, com ara $c_1 = 1$ i $d_1 = [\sqrt{A}]$, s'optimitza el rendiment però no de manera molt significativa. Per exemple, en el cas de $\sqrt{7}$ obtenim,

$$(1, 2), (3, 9), (12, 30), (42, 114), (156, 408),$$

i les aproximacions que en resulten,

$$\frac{2}{1} = 2, \quad \frac{9}{3} = 3, \quad \frac{30}{12} = 2.5, \quad \frac{114}{42} = 2.71428 \dots, \quad \frac{408}{156} = 2.6153 \dots$$

El responsable d'aquest alentiment és el factor $\frac{|1-A|}{A}$, el qual té valors més propers a la unitat a mesura que considerem A més gran, i la convergència de les seves potències cap a 0 requereix un nombre més elevat d'etapes.

2.3.5 Optimització de les aproximacions de \sqrt{A}

Una manera d'aconseguir la transformació del radicand A en un altre de valor proper a la unitat, per tal d'accelerar la convergència, és la de treballar amb $a = [\sqrt{A}]$. En aquest cas podem escriure,

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a\sqrt{1 + \frac{b}{a^2}}, \quad \text{en què } b = A - a^2.$$

Ara podem aplicar el mètode, —desenvolupat en l'aproximació de \sqrt{A} —, a l'aproximació de $\sqrt{A_1}$, en què $A_1 = 1 + \frac{b}{a^2}$. Prescindim d'esbrinar la seva viabilitat

des del punt de vista geomètric, —ara A_1 no és enter, sinó racional—, i fem un apunt del tractament des de l'aritmètica. Definim,

$$\begin{aligned}c_1 &= d_1 = 1 \\d_{n+1} &= A_1 c_n + d_n \\c_{n+1} &= c_n + d_n,\end{aligned}$$

Llavors, el fet que $|d_n^2 - A_1 c_n^2| = |1 - A_1|^n = \left(\frac{b}{a^2}\right)^n < 3$,²¹ indica una acceleració del procés de convergència. Per a l'exemple de $\sqrt{7}$ tenim,

$$\sqrt{7} = \sqrt{4+3} = 2\sqrt{1+\frac{3}{4}}.$$

Llavors, les primeres parelles serien,

$$(1, 1), (2, 11/4), (19/4, 25/4), (44/4, 233/16), (409/16, 541/16),$$

i s'observa que les aproximacions convergeixen més ràpidament,

$$2, 2.75, 2.631\dots, 2.6477\dots, 2.6454\dots$$

Per tancar aquestes disquisicions, apuntem que és fàcil comprovar la igualtat

$$a \cdot \frac{d_{n+1}}{c_{n+1}} = a + \frac{b}{a + a \cdot \frac{d_n}{c_n}}.$$

Això permet presentar \sqrt{A} sota una expressió del tipus,

$$\sqrt{A} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a} \dots}}$$

Activitats 2.3

E₁ 1. Completeu la “demostració gràfica” suggerida després de l'enunciat del teorema II.10 de la pàgina 77.

S

²¹En ser $a = \lfloor \sqrt{A} \rfloor \geq 1$, la desigualtat queda justificada de la manera següent,

$$\frac{b}{a^2} = \frac{A - a^2}{a^2} < \frac{(a+1)^2 - a^2}{a^2} = \left(\frac{a+1}{a}\right)^2 - 1 = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 - 1 \leq (1+1)^2 - 1 = 3.$$

2. A partir de la definició de les parelles (c_n, d_n)

$$\begin{cases} c_1 = 1, d_1 = k \\ c_{n+1} = c_n + d_n \\ d_{n+1} = Ac_n + d_n. \end{cases}$$

i) Considereu $k = 2$ i $A = 2$, i construïu una taula amb les deu primeres parelles i els seus quocients d_n/c_n . Compareu aquests quocients amb el valor de $\sqrt{2}$ que proporciona la calculadora. Feu el mateix amb $k = 10$.

ii) Considereu $k = 5$ i A igual a un valor convenient per aproximar $\sqrt{21}$. \overline{E}_2
Elaboreu una taula amb les deu primeres parelles i els valors d_n/c_n corresponents. \boxed{S}
Doneu, a partir d'ella, un valor aproximat de $\sqrt{21}$ i una cota de l'error comès.

3. Considereu \sqrt{A} , en què $A \in \mathbb{N}$.

i) Construïu geomètricament \sqrt{A} , per a $2 \leq A \leq 13$, amb l'ajut del teorema \overline{E}_1
de Pitàgores.

ii) Elaboreu una macro amb el CABRI que permeti construir un triangle rec- \overline{E}_2
tangle a partir de dos segments qualssevol agafats com a catets. Utilitzeu-la per \boxed{S}
a la construcció de l'apartat anterior.

4. Sigui la successió (c_n, d_n) definida com a l'apartat 2. Definim la nova suc-
cessió $x_n = d_n/c_n$.

i) Justifiqueu que $x_n = \frac{A + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$. \overline{E}_2

ii) Definiu amb el DERIVE:

- Una funció que a partir de c_1, d_1 i $A \in \mathbb{N}$, proporcioni les k primeres \overline{B}
parelles (c_n, d_n) .
- Una funció que a partir d'un valor inicial $x_1 \in \mathbb{Q}$ i $A \in \mathbb{N}$, proporcioni la
parella d'aproximacions x_k i x_{k+1} successives de \sqrt{A} i una cota de l'error
d'aquestes.
- Una funció que permeti visualitzar el procés de convergència de x_n , amb \boxed{S}
l'ajut de la funció

$$f(x) = \frac{A + x}{1 + x}.$$

5. Sabem que $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a\sqrt{1 + \frac{b}{a^2}}$, en què $a = \lceil \sqrt{A} \rceil$. Anomenem
 $A_1 = 1 + \frac{b}{a^2}$ i considerem la successió (c_n, d_n) que aproxima $\sqrt{A_1}$, mitjançant

d_n/c_n . Sigui finalment la successió

$$x_n = a \cdot \frac{d_n}{c_n}.$$

i) Justifiqueu que $x_n = \frac{A + ax_{n-1}}{a + x_{n-1}}$.

ii) Definiu amb el DERIVE:

- Una funció que calculi $\left[\sqrt{A}\right]$, sense utilitzar les funcions arrel quadrada i part entera del DERIVE.
- Una funció que a partir d'un valor inicial $x_1 \in \mathbb{Q}$ i $A \in \mathbb{N}$, proporcioni la parella d'aproximacions x_k i x_{k+1} successives de \sqrt{A} i una cota de l'error d'aquestes.
- Una funció que permeti visualitzar el procés de convergència de x_n , amb l'ajut de la funció

\boxed{S}

$$f(x) = \frac{A + ax}{a + x}.$$

6. Feu una comparació visual dels processos d'aproximació de \sqrt{A} , en el cas concret en què $A = 21$. Utilitzeu les dues funcions del DERIVE que heu creat en els apartats 4 i 5 anteriors, a partir de

\boxed{S}

$$f(x) = \frac{A + x}{1 + x} \quad i \quad f(x) = \frac{A + ax}{a + x}.$$

□

2.4 Els teoremes II.5, II.6, II.11 i II.14 i l'equivalent geomètric de l'equació de segon grau

Plantejarem l'estudi d'aquests teoremes des de la doble perspectiva de l'anàlisi geomètrica de II.11, i del problema geomètric equivalent a la resolució d'una equació de segon grau. Decidim fer aquest tractament perquè els teoremes II.5 i II.6 proporcionen els mitjans per establir l'equivalent geomètric de la resolució de certs tipus generals d'equacions de segon grau, mentre que els teoremes II.11 i II.14 equivalen a la construcció geomètrica de la solució d'un tipus particular d'aquestes equacions.²² Concretament, si considerem $a, b > 0$, podem presentar

²²De sortida, ha de quedar ben clar que Euclides no fa àlgebra, —amb totes les implicacions d'abstracció contingudes en aquest terme respecte de les magnituds implicades en les seves operacions—, sinó que fa geometria. Construeix magnituds geomètriques i en demostra propietats. Presentem l'equivalència entre els problemes que ell tracta i els de l'àlgebra per treure un profit de la doble perspectiva, sense oblidar mai que la perspectiva dels *Elements* és geomètrica.

aquestes equivalències de la manera següent:

$$\text{II.5} \quad ax - x^2 = b^2 \quad (2.6)$$

$$\text{II.6} \quad x^2 + ax = b^2 \quad \text{i} \quad x^2 - ax = b^2 \quad (2.7)$$

$$\text{II.11} \quad a^2 - ax = x^2 \quad (2.8)$$

$$\text{II.14} \quad x^2 = ab. \quad (2.9)$$

També veurem que una conseqüència directa tant del teorema II.5 com del II.6, després de fer-ne la traducció al llenguatge algebraic, és la igualtat²³

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

En aquests teoremes, com a la resta dels *Elements*, la presentació és sintètica. Les proposicions brollen unes de les altres amb gran claredat. Tanmateix, —em permeto utilitzar la metàfora pictòrica de Pla i Viader—,²⁴ «aquesta mateixa claror produeix zones de clarobscur i de penombres». En aquesta secció es pretén dispersar les penombres aixecades pel tipus de presentació sintètica. Aquesta provoca que quedin ocultes les vies de recerca i descobriment. Per tal de revelar-les, es farà una proposta d'anàlisi estrictament geomètrica. Aquesta es podrà aplicar als problemes de segon grau esmentats i, permetrà establir les proposicions anteriors, sense recórrer a l'eina més sofisticada que representa la teoria de la proporció. Aquesta anàlisi no es basarà en cap analogia aritmètica, contràriament a l'anàlisi que presenta Knorr a II.11 —citant Van der Waerden—, la qual s'exposarà més avall.²⁵ Aquesta última es basa en manipulacions aritmètiques hereves de la cultura babilònica que comporten implícitament la identificació de nombres i segments. D'altra banda es mostrarà que la nostra anàlisi portarà, atíats per la llum del teorema de Pitàgores, a la consideració del *gnòmon* com a una eina valuosa per a la seva marxa. Això donarà ple sentit a la introducció que fa Euclides d'aquesta figura a la definició II.2.

2.4.1 El teorema II.11

Iniciem el discurs amb l'anàlisi de la proposició II.11. Allí es construeix la secció àuria d'un segment,²⁶ la qual tenia gran rellevància entre les pitagòrics. Aquests estaven interessats en la construcció del pentagrama, —símbol de reconeixement mutu—, constituït per les cinc diagonals del pentàgon regular. L'anàlisi d'aquesta construcció constata que les diagonals es tallen segons el cànon de la secció

²³Vegeu l'activitat 2.4.1

²⁴Vegeu la seva introducció a *La Géométrie* de PLA, VIADER [1999], X n. 3.

²⁵Vegeu KNORR [1986], p. 91 n. 48 de l'edició de 1993.

²⁶El nom de secció àuria sembla ser relativament modern [segle XIX]. També se l'ha anomenat *divina proporció*, vegeu PACIOLI [1509].

àuria. Així podem veure que Euclides utilitza II.11, en les proposicions IV.10 i IV.11, per inscriure un pentàgon regular en un cercle donat. D'altra banda sembla que aquesta construcció va jugar un paper important en el descobriment de les magnituds incommensurables.²⁷ Aquestes van colpejar de manera fulminant la concepció pitagòrica que el nombre és el principi material de les coses,²⁸ la qual cosa constituïa en el terreny de la geometria, allò que Pla anomena la *limitació pitagòrica*.²⁹ Finalment notem que aquesta proposició reapareix a VI.30 sota l'enunciat de «tallar una recta finita donada en extrema i mitjana raó», un cop presentada la teoria de la proporció. Aquesta trenca amb la limitació pitagòrica i permet estendre els resultats de la geometria del commensurable a les noves magnituds incommensurables. Amb això s'aconsegueix incorporar uns procediments alternatius i enriquidors a l'anàlisi dels problemes i proposicions.

• **Teorema II.11**

Dividir una recta AB donada de manera que el rectangle comprès per la recta sencera i una de les parts BX sigui igual al quadrat sobre l'altra part AX .

Anàlisi segons Knorr

Només començar l'exposició de la seva construcció,³⁰ Euclides ens situa sense preàmbuls davant d'un fet clau que conduirà de manera inexorable, pas a pas i sense sobresalts, a la construcció del punt X sobre el segment AB donat, tal que el quadrat de costat AX és igual al rectangle de costats AB i XB . El fet clau consisteix en la consideració del punt mitjà G d'un dels costats del quadrat construït sobre el segment AB que es vol partir. Euclides, amb la seva presentació sintètica, amaga com s'ha concebut la consideració d'aquest punt G .

Knorr diu que l'anàlisi d'aquesta construcció no presenta cap dificultat:

²⁷Vegeu VON FRITZ [1945].

²⁸Vegeu ARISTÒTIL [IV aCb] 986a 15.

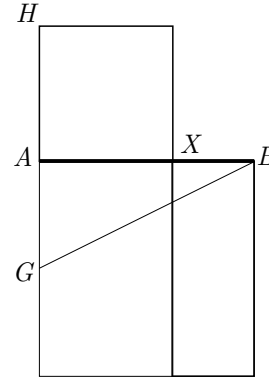
²⁹A partir d'aquell moment caldria incorporar un nou tipus de magnituds no susceptibles de ser amidades. Vegeu PLA [1998], 44.

³⁰Vegeu la construcció d'Euclides a la secció 8.4.3.

Això resulta fàcilment d'una anàlisi basada en la "completació del quadrat". Assumint que $AX^2 = AB \cdot XB$ s'obté $AX^2 + AX \cdot AB = AB^2$, o

$$\left(AX + \frac{1}{2}AB\right)^2 = AB^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2, \quad (2.10)$$

d'aquesta manera $AX + \frac{1}{2}AB$ és la hipotenusa del triangle rectangle de catets AB i $\frac{1}{2}AB$. Si considerem $AG = \frac{1}{2}AB$ i $HG = BG$, obtenim $AX = HA$ que és la longitud buscada.



Des del punt de vista geomètric aquesta anàlisi no descobreix completament la idea clau amagada a la igualtat (2.10). No descobreix l'anàlisi que condueix l'autor al fet de considerar $\frac{1}{2}AB$, tot i que una línia més avall diu:

Aquesta forma d'anàlisi ha sigut proposada en base als còmputos conservats a les tauletes mesopotàmiques del segon mil·lenni abans de Crist.

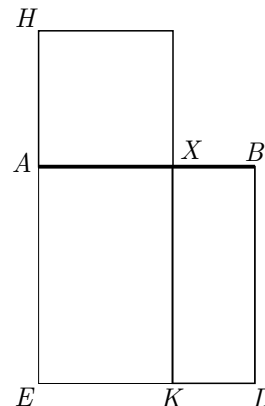
En resum ve a dir que es basaria en els coneixements adquirits per la transmissió de tècniques de tipus aritmètic, com la completació del quadrat, des de la veïna Babilònia. Tanmateix, cal recordar una vegada més que per als grecs el món de la geometria ultrapassava el món dels nombres, els segments constituïen un tipus de magnituds que en principi no estaven associades a cap nombre, —Euclides no parla mai de longitud numèrica d'un segment—, i el seu tractament era totalment independent dels tractaments numèrics. Llavors no és acceptable pensar en una anàlisi basada en l'aritmètica babilònica, a no ser que aprofundíssim en les possibles arrels geomètriques d'aquesta aritmètica.

Anàlisi alternativa

Reiniciem l'anàlisi tot prescindint del ressò dels coneixements aritmètics i algebraics. Ens situem sota la perspectiva que proporciona el teorema de Pitàgores —I.47 i I.48— en forma de relació entre les àrees de tres quadrats. Suposem el problema resolt, és a dir tenim construït el quadrat HX igual al rectangle XD . Llavors, si considerem el quadrat AD sobre AB ,

$$HK = HX + AK = XD + AK = AD.$$

El nostre objectiu és expressar el rectangle HK com a suma o diferència de dos quadrats, els quals quedaran, així, relacionats amb el quadrat AD .



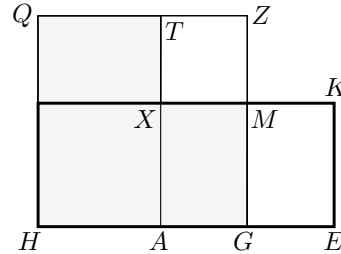
Tenim dues opcions per seguir endavant, descompondre HK en una suma de quadrats o bé en una diferència de quadrats. Triem la segona opció perquè ens sembla més accessible a una anàlisi.

Suposem el problema resolt, és a dir que hem construït dos quadrats HZ i XZ tals que

$$HZ - XZ = HK.$$

Obtenim el gnòmon $QHGMXT$, el qual és igual a la superfície del quadrat HZ que excedeix el quadrat XZ . Ara, per construir un rectangle HK equivalent al gnòmon, només cal aplicar un rectangle $ME = QX$ sobre el segment GZ , a partir de G , i tenim

$$HK = QHGMXT = HZ - XZ.$$



L'anàlisi s'ha acabat perquè el rectangle HK i els punts A i G són coneguts. Ha quedat al descobert la clau de la construcció:

« G és el punt mitjà dels punts A i E , en què, si HE i EK són els costats del rectangle, llavors $HA = EK$.»

Ara es pot refer el camí enrere, i expressar un rectangle HK qualsevol com a diferència de dos quadrats:

- Construïm el punt A sobre el costat HE tal que $HA = EK$.
- Construïm el punt mitjà G del segment AE .
- Construïm els quadrats HZ sobre HG , i XZ de costat igual a AG .
- Conclusió: El rectangle HK és igual al gnòmon $QHGMXT$ diferència dels quadrats HZ i XZ .

Aquesta manera de procedir, per expressar un rectangle com a diferència de dos quadrats, l'anomenarem "tècnica del gnòmon", la qual aplicarem al desenvolupament de l'anàlisi de la proposició II.11.

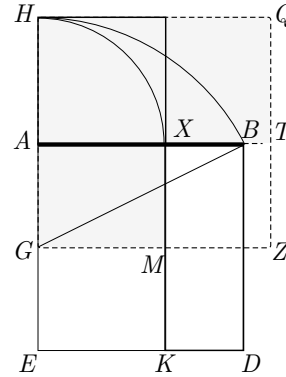
Haviem deixat l'anàlisi de II.11 en el punt en què teníem un rectangle HK igual al quadrat AD . Aplicar la tècnica del gnòmon al rectangle HK , requereix considerar el quadrat HX de costat $HA = EK$, i el punt mitjà G del segment AE .³¹

³¹Aquí s'aclareix el punt fosc de la síntesi d'Euclides.

Llavors, si HZ és el quadrat sobre HG i XZ és el quadrat sobre $ZT = AG$:

- $AD = HK = HGMXTQ = HZ - XZ$.
- $AB^2 = AD = HZ - XZ = HG^2 - AG^2$.
- $AX = GH - AG$.

En aquest punt l'anàlisi s'ha acabat perquè podem construir el punt X , en ser els punts G , A i H punts coneguts. Concretament,



- G és el punt mitjà del costat AE del quadrat sobre AB .
- A és l'extrem del segment AB donat.
- H ve determinat pel segment GH , el qual és igual –per I.48– a la hipotenusa del triangle rectangle de catets AG i AB , és a dir $GH = GB$.

La construcció del punt X que resulta d'aquestes observacions, coincideix amb la d'Euclides i consta de les etapes següents:

- Punt G mitjà del costat AE del quadrat sobre AB .
- Punt H d'intersecció de la prolongació de AE amb la circumferència (G, GB) .
- Punt X d'intersecció de AB amb la circumferència (A, AH) .

2.4.2 Proposta general d'anàlisi per als problemes de segon grau i els teoremes II.5, II.6 i II.14

Els problemes geomètrics equivalents a la resolució d'equacions de segon grau comparteixen la característica comuna de poder ser reduïts a una de les qüestions següents:

- Trobar un rectangle de suma o diferència de costats coneguda, igual a un quadrat donat, [equacions (2.6), (2.7), (2.8), pàg. 89].
- Trobar un quadrat igual a un rectangle conegut, [equació (2.9), pàg. 89].

Efectivament,

- $ax - x^2 = b^2$ equival a trobar un rectangle de costats x, y , amb $x + y = a$ i àrea $x \cdot y = b^2$, $a > 0$.
- $x^2 + ax = b^2$ i $x^2 - ax = b^2$ equivalen a trobar un rectangle de costats x, y , amb $|x - y| = a$ i àrea $x \cdot y = b^2$, $a > 0$.
- $a^2 - ax = x^2$ hem vist que equival a trobar un rectangle HK de costats $x = EK$ i $y = HE$, amb $y - x = a = AE = AB$ i àrea $xy = AB^2 = a^2$.

- $x^2 = ab$ equival a trobar un quadrat de costat x tal que la seva àrea és la d'un rectangle de costats a i b .

A la secció anterior hem generat una forma metòdica de portar l'anàlisi. Aquesta serà utilitzada en els problemes de segon grau que resten, i permetran, a més, establir les proposicions II.5, II.6, i II.14. Pot ser esquematitzada així:

- 1) Expressar el rectangle desconegut o conegut com un gnòmon o diferència de quadrats, amb la tècnica del gnòmon descrita a la pàgina 92.
- 2) Imposar la condició d'igualtat entre les àrees del gnòmon —o diferència de quadrats— i el quadrat conegut o desconegut.
- 3) Determinar el segment buscat amb el concurs de I.48.

Exemple d'aplicació

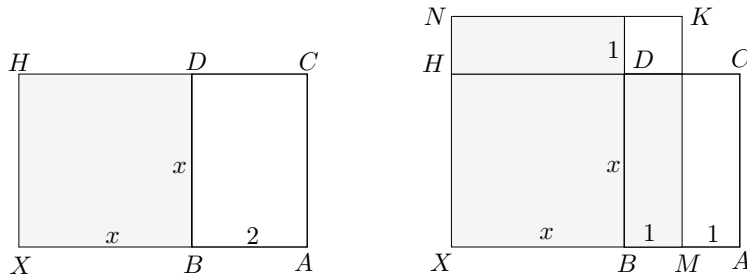
Abans d'aplicar el mètode a l'estudi dels casos generals presentem un exemple d'actuació, resolent l'equació $x^2 + 2x = 15$. Una primera versió geomètrica d'aquest enunciat podria ser:

Construir un segment x tal que el rectangle de costats x i $x + 2$ tingui una superfície de 15 unitats quadrades.

Una altra manera d'enunciar el problema és la utilitzada en la proposició VI.29 dels *Elements*, on es fa ús del llenguatge d'aplicació d'àrees. L'enunciat equivalent, incorporant les dades concretes de la nostra equació, vindria a ser:³²

Sobre un segment AB de longitud 2, aplicar un rectangle $XC[x^2 + 2x]$ d'àrea $Q = 15$, de manera que excedeixi del rectangle $BC[2x]$ sobre el segment AB , en un quadrat $DX[x^2]$.

Suposem construït el rectangle solució XC de costats $AX[x + 2]$ i $AC = BX[x]$.



³²Allí es resol una qüestió equivalent per a paral·lelograms amb l'ajut de la teoria de la proporció. Afegim la notació algebraica entre claudàtors per facilitar-ne la lectura.

- 1) Pel punt mitjà M de AB determinem dos rectangles iguals MC i MD , i apliquem sobre HD un rectangle $ND = MC$. Tot seguit, completem el quadrat de costat XM i obtenim

$$XC = \text{gnòmon}(XMDN) = XK - DK.$$

- 2) Imposem la condició d'igualtat entre el gnòmon i el quadrat $Q = 15$ conegut:

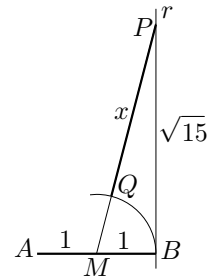
$$XK - DK = XC = Q = 15 \implies XM^2 - MB^2 = 15. \quad (2.11)$$

- 3) El segment solució $XB = x$ ve determinat per la igualtat $XB = XM - MB$, en què MB i XM compleixen:

- $MB = MA = 1$ és el segment meitat del segment donat $AB = 2$.
- XM és —per I.48 i la igualtat (2.11)— la hipotenusa del triangle rectangle de catets $BM = 1$ i $b = \sqrt{15}$.

L'anàlisi s'ha acabat perquè podem determinar $x = XB$, a partir de dades conegudes. Per fer la construcció de la solució $x = XB$, considerem un segment unitat s i les dades inicials $AB = 2s$ i l'àrea d'un quadrat de costat $\sqrt{15}s$:³³

- Representem A , M i B sobre una recta tals que $AM = MB = s = 1$.
- Tracem una recta r perpendicular, per B , a AB , i determinem sobre r un punt P tal que $BP = \sqrt{15}$.
- Tracem MP , el qual compleix $MP^2 = MB^2 + 15 = XM^2$. Consegüentment $MP = XM$.
- Finalment $x = XM - MB = MP - MB = PQ$, en què Q és la intersecció de la circumferència (M, MB) amb el segment MP .



En les seccions següents, aplicarem el mètode als casos generals relacionats amb II.6, II.5 i II.14.

³³Fem la identificació $s = 1$ i recordem que sabem representar $\sqrt{15}$ utilitzant el teorema de Pitàgores, encara que més endavant ho podrem aconseguir aplicant II.14.

Finalment, notem que la traducció al llenguatge de l'àlgebra, proporciona les etapes de l'algoritme algebraic per resoldre l'equació:

$$\begin{aligned} \begin{cases} BX^2 + 2BX = 15 \\ x^2 + 2x = 15 \end{cases} &\implies \begin{cases} XM^2 - MB^2 = 15 \\ (x+1)^2 - 1^2 = 15 \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} XM^2 = 15 + MB^2 \\ (x+1)^2 = 15 + 1^2 = 16 \end{cases} \implies \begin{cases} XM = \sqrt{15 + MB^2} \\ x+1 = \sqrt{16} = 4 \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} XB = XM - MB \\ x = 4 - 1 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

2.4.3 Resolució de l'equació $x^2 + ax = b^2$, $a > 0$, $b > 0$, i II.6

Aquest problema equival a trobar un rectangle XC de costats x i $x + a$, i d'àrea igual a la d'un quadrat Q de costat b . Utilitzant el llenguatge d'Euclides a VI.29 en termes d'*aplicació d'àrees*, el problema es pot enunciar així:

Aplicar sobre un segment $AB[a]$ donat, un rectangle $XC[x^2 + ax]$ d'àrea donada $Q[b^2]$, de manera que excedeixi del rectangle $BC[a \cdot x]$ sobre el segment AB , en un quadrat $DX[x^2]$.

Suposem construït el rectangle solució XC de costats $AX[x + a]$ i $AC = BX[x]$. Seguim l'esquema en tres apartats de la nostra proposta:

- 1) En el pas (1) de la figura apliquem la tècnica del gnòmon al rectangle XC per obtenir el gnòmon que li és igual. Partim el rectangle BC en dos rectangles iguals MC i MD , els quals s'apliquen ND i MD sobre dos costats adjacents del quadrat XD .

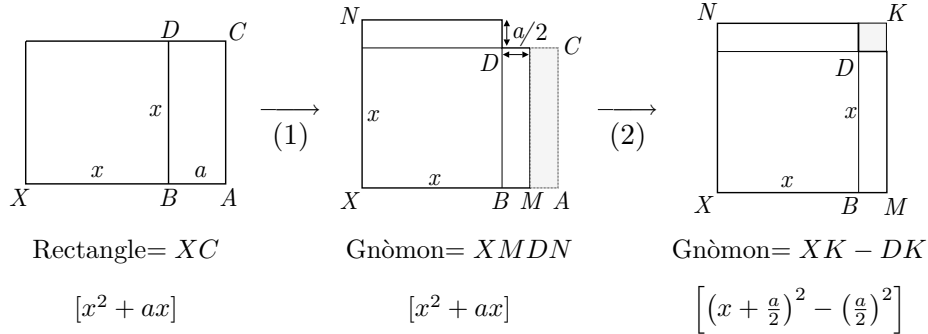
En el pas (2) es visualitza el gnòmon com a diferència dels quadrats $XK \left[\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]$ i $DK \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$, és a dir

$$XC = \text{gnòmon}(XMDN) = XK - DK. \quad (2.12)$$

- 2) Imposem la condició d'igualtat entre el quadrat Q de costat b conegut, i el gnòmon:

$$XK - DK = Q \left[\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 = b^2 \right].$$

- 3) El segment solució XB ve determinat per la igualtat $XB = XM - MB$, en què MB i XM compleixen:



Primera part de la resolució de $x^2 + ax = b^2$.

- $MB = MA$ és el segment meitat del segment donat AB .
- XM és —per I.48— la hipotenusa del triangle rectangle de catets BM i b , perquè

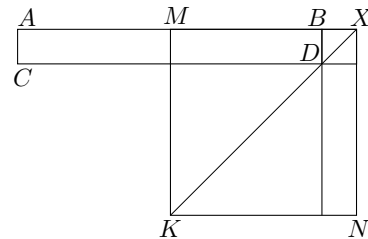
$$XK - DK = Q \implies XM^2 - BM^2 = b^2.$$

Així, podrem construir la solució amb regle i compàs, restant la meitat $a/2$ del segment a donat, de la hipotenusa del triangle rectangle de catets $a/2$ i el costat b del quadrat donat.

Observem finalment que es compleix el teorema II.6.

• **Teorema II.6**

Si es divideix una línia recta AB en dues parts iguals AM i MB i se li afegeix en línia recta una altra recta qualsevol BX , el rectangle XC comprès per la recta sencera i l'afegida AX , i per l'afegida BX , junt amb el quadrat DK sobre la línia meitat BM , és igual al quadrat XK sobre la línia MX composta de la línia meitat MB i de l'afegida BX .



Efectivament, en el transcurs de l'anàlisi, a la igualtat (2.12) de l'apartat (1), ha quedat establert aquest teorema. Allí hem aconseguit, amb el recurs d'un gnòmon, la relació entre el rectangle XC i els quadrats XK i DK , que enuncia II.6:

$$XC = XK - DK \quad \text{o bé} \quad XC + DK = XK.$$

2.4.4 Resolució de l'equació $x^2 - ax = b^2$, $a > 0$, $b > 0$

Aquest problema equival a trobar un rectangle XC de costats x i $x - a$ d'àrea igual a la d'un quadrat Q de costat b . Igual que en el cas anterior podríem enunciar aquest problema així:

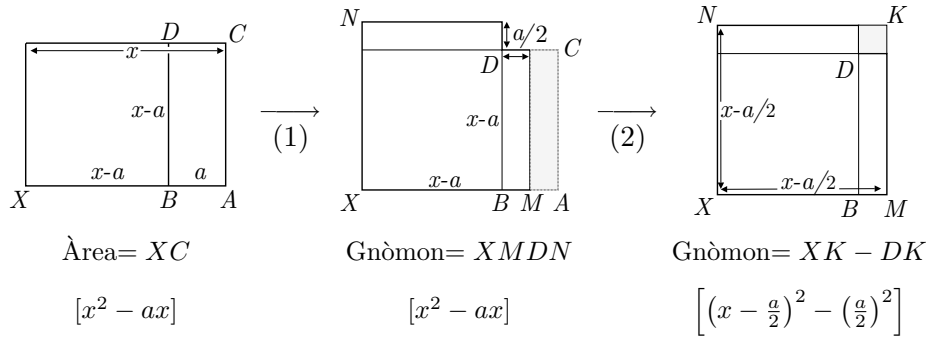
Aplicar sobre un segment $AB[a]$ donat, un rectangle $XC[x^2 - ax]$ d'àrea donada $Q[b^2]$, de manera que excedeixi del rectangle $BC[a \cdot (x - a)]$ sobre el segment AB , en un quadrat $DX[(x - a)^2]$.

Suposem construït el rectangle solució XC de costats $AX[x]$ i $AC = BX[x - a]$. La marxa de l'anàlisi serà paral·lela a la del cas anterior:

- 1) En el pas (1) de la figura, apliquem la tècnica del gnòmon al rectangle XC . Partim el rectangle BC en dos rectangles iguals MC i MD , els quals després s'apliquen $—ND$ i $MD—$ sobre dos costats adjacents del quadrat XD .

En el pas (2) es visualitza el gnòmon com a diferència dels quadrats $XK[(x - \frac{a}{2})^2]$ i $DK[(\frac{a}{2})^2]$, és a dir

$$XC = \text{gnòmon}(XMDN) = XK - DK. \quad (2.13)$$



Primera part de la resolució de $x^2 - ax = b^2$.

- 2) Imposem la condició d'igualtat entre el quadrat Q de costat b conegut, i el gnòmon:

$$XK - DK = Q \left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 \right].$$

- 3) El segment solució XA ve determinat per la igualtat $XA = XM + MA$, en què MA i XM compleixen:

- $MA = MB$ és el segment meitat del segment donat AB .
- XM és —per I.48— la hipotenusa del triangle rectangle de catets AM i b , perquè

$$XK - DK = Q \implies XM^2 - AM^2 = b^2.$$

Així, podrem construir la solució amb regla i compàs, sumant la meitat $a/2$ del segment a donat, amb la hipotenusa del triangle rectangle de catets $a/2$ i el costat b del quadrat donat.

Observem també, que en el transcurs de l'anàlisi, a l'apartat (1), ha quedat establerta la proposició II.6 de la mateixa manera que en el cas anterior.

2.4.5 Resolució de l'equació $ax - x^2 = b^2$, $a > 0$, $b > 0$, i II.5

Aquest problema equival a trobar un rectangle XC de costats x i $a - x$ d'àrea igual a la d'un quadrat Q de costat b . Euclides utilitza la teoria de la proporció per resoldre una qüestió equivalent per a paral·lelograms a VI.28, amb una condició que aquest cas es traduiria com a $b < \frac{a}{2}$. L'enunciat en el seu estil seria:

Aplicar sobre un segment $AB[a]$ donat, un rectangle $XC[ax - x^2]$ d'àrea donada $Q[b^2]$, de manera que sigui deficient del rectangle $BC[a \cdot x]$, sobre el segment AB , en un quadrat $BT[x^2]$.

Suposem construït el rectangle solució XC de costats $AX[a - x]$ i $AC = BX[x]$. En aquest cas tindrem:

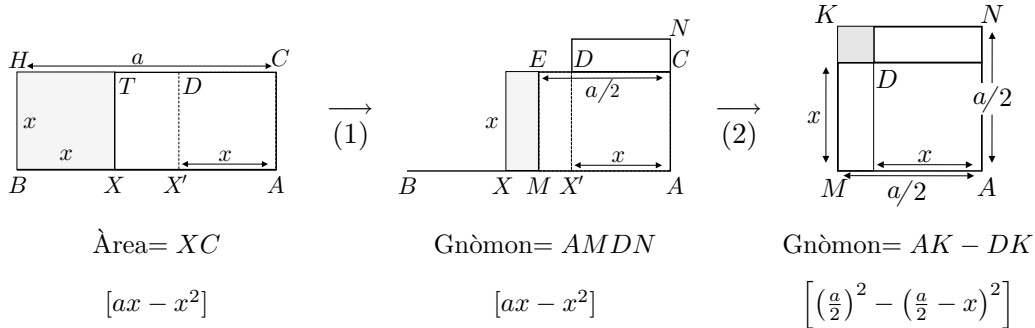
- 1) En la figura considerem X' en el segment AX tal que $AX' = BX$. Obtenim el quadrat $AD = BT$ de base AX' , i el rectangle XD de base XX' . Apliquem, en el pas (1) de la figura, la tècnica del gnòmon al rectangle XC partint el rectangle XD en dos rectangles iguals EX i EX' . Els apliquem — MD i ND — sobre dos costats adjacents del quadrat AD .

En el pas (2) es visualitza el gnòmon com a diferència dels quadrats $AK \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$ i $DK \left[\left(\frac{a}{2} - x \right)^2 = b^2 \right]$, és a dir

$$XC = \text{gnòmon}(XMDN) = XK - DK. \quad (2.14)$$

- 2) Imposem la condició d'igualtat entre el quadrat Q de costat b conegut, i el gnòmon:

$$AK - DK = Q \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x \right)^2 = b^2 \right].$$



Primera part de la resoluci\`o de $ax - x^2 = b^2$.

3) El segment soluci\`o $BX = AX'$ ve determinat per la igualtat $AX' = AM - X'M$, en qu\`e AM i $X'M$ compleixen:

- AM \u00e9s el segment meitat del segment donat AB .
- $X'M$ \u00e9s —per I.48— un catet del triangle rectangle de hipotenusa AM i catet b , perquè

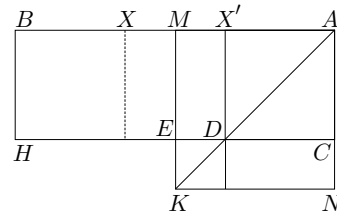
$$AK - DK = Q \implies AM^2 - X'M^2 = b^2.$$

Aix\u00ed, podrem construir la soluci\`o amb regle i comp\`as, restant a la meitat $a/2$ del segment a donat, el catet del triangle rectangle amb hipotenusa $a/2$ i l'altre catet igual al costat b del quadrat donat.³⁴

Observem finalment que es compleix el teorema II.5.

• **Teorema II.5**

Si es divideix una l\u00ednia recta AB en parts iguals BM , MA i desiguals BX' , $X'A$, el rectangle $X'H$ compr\u00e8s per les parts desiguals de la recta total m\u00e9s el quadrat DK sobre el segment MX' entre els dos punts de secci\`o, \u00e9s igual al quadrat AK sobre la meitat AM de la recta donada.



³⁴Fem notar que l'estudi no \u00e9s complet, perquè hem suposat $x < \frac{a}{2}$. Si hagu\u00e9ssim suposat $x > \frac{a}{2}$, hagu\u00e9ssim obtingut la condici\`o

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = b^2.$$

Llavors, la soluci\`o s'hagu\u00e9s obtingut sumant —en lloc de restant, com en el cas estudiat— el segment $a/2$ donat, i el catet del triangle rectangle d'hipotenusa $a/2$ i l'altre catet igual a b .

Efectivament, en el transcurs de l'anàlisi, a l'equació (2.14) de l'apartat (1), hem aconseguit, amb el recurs d'un gnòmon, la relació entre el rectangle $XC = X'H$ i els quadrats AK i DK , de l'enunciat del teorema:

$$X'H = XC = AK - DK \quad \text{o bé} \quad X'H + DK = AK.$$

2.4.6 Resolució de l'equació $x^2 = ab$, $a > 0$, $b > 0$, i II.14

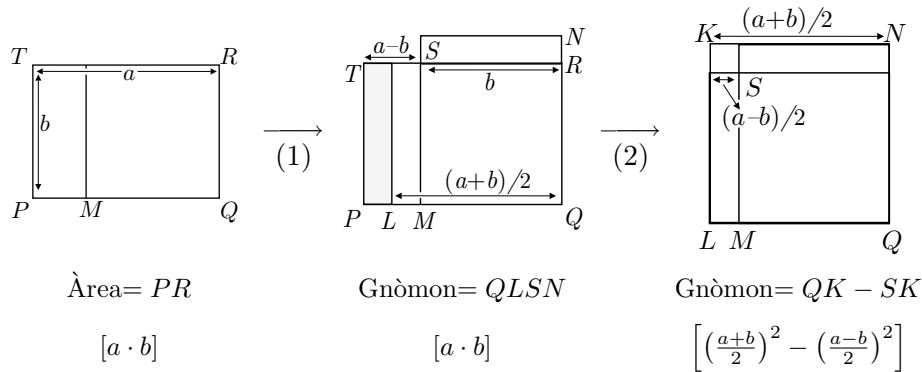
Aquest problema és del tot equivalent a la construcció que demana II.14.

• **Teorema II.14**

Construir un quadrat igual a una figura rectilínia donada.³⁵

- 1) En el pas (1), apliquem la tècnica del gnòmon al rectangle $PR[a \cdot b]$ donat. Obtenim el gnòmon partint el rectangle MT , —en què M és un punt de PQ tal que MR és un quadrat—, en dos rectangles LT i LS iguals, els quals s'apliquen — LS i SN — sobre dos costats adjacents del quadrat $MR[b^2]$.

En el pas (2) visualitzem el gnòmon com a diferència dels quadrats QK $\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$ i SK $\left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$.



Primera part de la resolució de $x^2 = ab$.

- 2) Suposem el quadrat $X[x^2]$ construït i imposem que sigui igual al gnòmon:

$$X = QK - SK \left[x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \right]$$

- 3) S'observa que el segment LQ , costat del quadrat QK , és la meitat de la suma dels costats del rectangle PR inicial, —només cal aplicar un quadrat

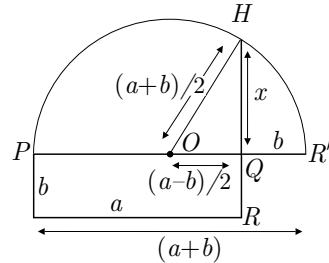
congruent amb QS a l'esquerra del costat PT del rectangle PR . També es veu que el segment LM , costat del quadrat SK , és la meitat de la diferència PM dels costats del rectangle PR inicial. Per tant, en ser

$$x^2 = LQ^2 - LM^2,$$

es pot construir x com un catet del triangle rectangle d'hipotenusa la meitat de la suma dels costats del rectangle PR , i l'altre catet igual a la meitat de la diferència d'aquests costats.

Amb això s'estableix la construcció que es demana a II.14. Euclides l'assoleix considerant:

- Una semicircumferència de diàmetre PR' igual a la suma dels costats PQ i QR del rectangle PR , i centre O .
- Una recta perpendicular per Q a PR' .
- La intersecció H de la semicircumferència amb la perpendicular.
- El segment QH .



Llavors, pel teorema de Pitàgores, el segment QH és el costat x del quadrat X buscat. Això es justifica perquè el radi de la semicircumferència és la meitat de la suma dels costats del rectangle PR , i el segment QO és la meitat de la diferència d'aquests costats.

Activitats 2.4

- \overline{E}_2 1. Obteniu la identitat algebraica $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, aplicant un canvi de llenguatge sobre el teorema II.5. Feu el mateix actuant sobre el teorema II.6.
- \overline{S}
- \overline{B} 2. Elaboreu una visualització pas a pas, amb el CABRI, de la construcció del teorema II.11.
- \overline{S}
- \overline{P} 3. Prepareu una presentació amb el CABRI, del tema de la construcció de la solució de l'equació de segon grau $x^2 + ax = b$, tal que $a, b > 0$, en què:
- Es plantegi i visualitzi el problema gràficament i se'n pugui fer una resolució aproximada.
 - Es visualitzi el procediment de recerca de solució, mitjançant l'ús d'un gnòmon.
- \overline{S} – Es visualitzi pas a pas una construcció amb regla i compàs de la solució, conseqüència del procediment anterior, a partir de les dades inicials a i b .

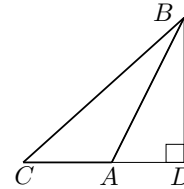
□

2.5 Més enllà del teorema de Pitàgores. Els teoremes II.12 i II.13

Els teoremes II.12 i II.13 enllacen directament amb el teorema del cosinus. De fet, aquest últim és una versió posterior i unificada en el llenguatge més sofisticat de la trigonometria. Com a rerefons, hi trobem el teorema de Pitàgores, perquè II.12 i II.13 constitueixen la resposta a la necessitat de generalitzar I.47, en el sentit de trobar relacions entre els quadrats construïts sobre els costats d'un triangle qualsevol. Tractarem a fons el teorema II.12, el qual és la versió per a triangles obtusangles, i deixarem II.13 per a les activitats. Ho farem presentant la demostració d'Euclides simplificada amb el llenguatge de l'àlgebra. La seva estratègia passa per reduir el problema a un altre en què es troben implicats triangles rectangles, als quals pot aplicar el resultat demostrat a I.47. Per poder assolir el seu objectiu, li caldrà utilitzar l'expressió per al quadrat d'una suma demostrada a II.4. Després estudiarem la demostració de Gregory de Saint Vincent, publicada l'any 1647 a l'*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii*.³⁶ Finalment, farem una anàlisi del teorema de Tabhit Ibn Qurra [826–901],³⁷ i establirem la seva equivalència amb els teoremes d'Euclides.

• Teorema II.12

En els triangles obtusangles, el quadrat sobre el costat BC , que subtendeix l'angle obtús \widehat{BAC} , és més gran que els quadrats sobre els costats AB i AC que contenen l'angle obtús, en dues vegades el rectangle contingut per un dels costats AC de l'angle obtús, sobre el que cau la perpendicular BD , i la recta exterior AD tallada per la perpendicular fins l'angle obtús.



És a dir, $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 AC \cdot AD$.

Euclides ho prova aplicant I.47 als triangles rectangles BDC i BDA , i amb l'auxili de II.4 per descompondre el quadrat sobre CD :

$$- \text{I.47} \implies BC^2 = CD^2 + BD^2.$$

$$- \text{II.4} \implies CD^2 = (AC + AD)^2 = AC^2 + 2 AC \cdot AD + AD^2.$$

$$- \text{I.47} \implies AB^2 = AD^2 + BD^2.$$

$$\text{Per tant, } BC^2 = AC^2 + 2 AC \cdot AD + AD^2 + BD^2 = AC^2 + 2 AC \cdot AD + AB^2.$$

2.5.1 La demostració de Saint Vincent

Aquest autor proporciona una prova en què no utilitza els resultats del llibre II. La seva estratègia està inspirada en la demostració I.47 d'Euclides, és a dir en

³⁶L'hem trobat a HEATH [1908], 404–405 de l'edició de 1956.

³⁷La referència és de BOYER [1968], 304–305 de l'edició espanyola de 1986.

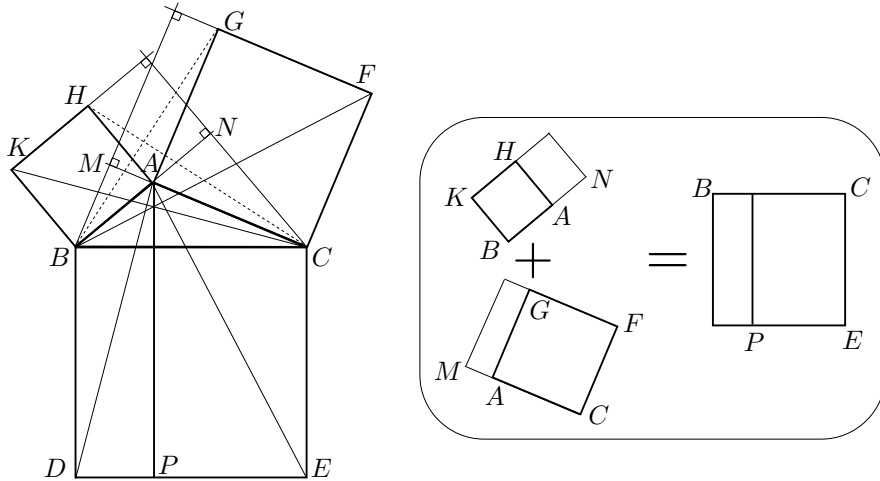
els mètodes de comparació i transformació d'àrees del llibre I, utilitzats a partir de I.33.

Presentem el cas del triangle obtusangle, en què considera, de sortida, els quadrats KA , FA i BE , sobre els costats del triangle BAC donat, obtús en A .

Comença partint el quadrat BE en dos rectangles BP i CP , mitjançant la perpendicular a BC per A . La seva estratègia consisteix en trobar dues superfícies equivalents a aquests dos rectangles, en què es trobin implicats els quadrats sobre els altres dos costats AB i AC .

Actua igual que a I.47, observant que els triangles ABD i KBC són congruents, de la mateixa manera que ACE i FCB . Conseqüentment, si es consideren els punts N i M d'intersecció, respectivament, de AB i AC amb les altures del triangle ABC des de C i B , tenim les relacions següents entre àrees:

- $BP = 2 ABD = 2 KBC = KN$.
- $CP = 2 ACE = 2 FCB = FM$.



Així, ha aconseguit relacionar els quadrats de la manera següent:

$$BC^2 = BP + CP = KN + FM = AB^2 + HN + AC^2 + GM.$$

Ara, caldrà observar els rectangles HN i GM . Aquí, se n'adona que hi ha dos triangles clau per relacionar-los amb els costats del triangle BAC de sortida. Efectivament, els triangles HAC i BAG són congruents, —pel criteri C–A–C—, i llavors,

$$GM = 2 BAG = 2 HAC = HN = HA \cdot AN = AB \cdot AN.$$

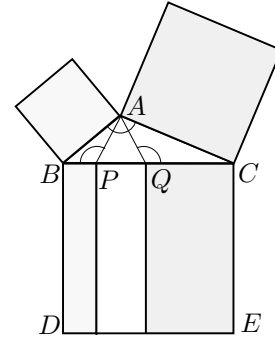
És a dir, que podem aconseguir el resultat d'Euclides,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 HN = AB^2 + AC^2 + 2 AB \cdot AN.$$

2.5.2 El teorema de Thabit Ibn Qurra

En aquest autor trobem una presentació diferent de la generalització del teorema de Pitàgores per a triangles no rectangles, la qual relacionarem amb els resultats d'Euclides. El seu enunciat és general i no el demostra. La seva presentació consisteix en afirmar que si P i Q són dos punts de BC tals que $\widehat{APB} = \widehat{AQC} = \widehat{BAC}$, llavors

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BP + CQ).$$



Si ho expressem en funció dels quadrats sobre els costats de ABC , tenim els dos casos:

Cas obtusangle :

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BC - PQ) = BC^2 - BC \cdot PQ.$$

Cas acutangle :

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BC + PQ) = BC^2 + BC \cdot PQ.$$

Per establir el resultat general, una anàlisi basada en l'acceptació de l'existència d'una teoria de la proporció és bastant accessible.³⁸ Per abreujar les notacions escriurem $BC = a$, $AB = c$ i $AC = b$. Es tracta d'establir una relació entre els quadrats a^2 , b^2 i c^2 . Cerquem, com a I.47, dos rectangles iguals als quadrats sobre AB i AC . És a dir, dos punts P i Q sobre BC tals que

$$c^2 = a \cdot m, \quad \text{en què } m = BP,$$

$$b^2 = a \cdot n, \quad \text{en què } n = CQ.$$

Això equival a determinar la posició dels segments m i n tals que

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \quad \text{i} \quad \frac{b}{a} = \frac{n}{b}.$$

En ser $\widehat{ABP} = \widehat{CBA}$ i $\widehat{ACQ} = \widehat{BCA}$, les igualtats anteriors impliquen la semblança dels triangles BAC , BPA i AQC .

³⁸Això ens permetrà utilitzar el concepte de semblança i l'equivalència

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c,$$

entesos $a \cdot d$ i $b \cdot c$ com les àrees d'uns rectangles de costats a i d , b i c .

Consegüentment, es compleix $\widehat{APB} = \widehat{CAB} = \widehat{CQA}$. D'aquesta manera, les posicions de m , n i, per tant, de P i Q han quedat determinades de la manera enunciada per Ibn Qurra. Si es refà tot el procés en sentit contrari queda demostrat el teorema.

2.5.3 El teorema de Thabit Ibn Qurra i el teorema II.12

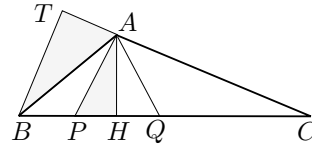
Establirem la relació entre aquests dos teoremes, fixant l'atenció en la versió del teorema de Ibn Qurra per a triangles obtusangles.³⁹ Així, el que tenim és,

– Teorema II.12

$$BA^2 + AC^2 + 2 AC \cdot AT = BC^2$$

– Teorema de Thabit Ibn Qurra

$$BA^2 + AC^2 = BC^2 - PQ \cdot BC.$$



Per tant pretenem establir la igualtat,

$$2 AC \cdot AT = BC \cdot PQ.$$

Intentarem aconseguir-ho mitjançant la recerca de triangles semblants. La implicació del segment AT suggereix l'observació del triangle rectangle BTA . D'altra banda el segment PQ pertany al triangle isòsceles APQ . Aquest últim no és rectangle, però si que ho és el AHP , en què H és el punt mitjà de PQ . Llavors observem els triangles AHP i BTA , i veiem que són semblants. Efectivament,

$$- \widehat{BTA} = \widehat{AHP} = \pi/2.$$

$$- \widehat{APH} = \pi - \widehat{APB} = \pi - \widehat{CAB} = \widehat{BAT}.$$

$$\text{Llavors, } \frac{AT}{PH} = \frac{BA}{AP}.$$

$$\text{A més, } \frac{BA}{AP} = \frac{BC}{CA}, \text{ perquè } ABP \text{ i } CBA \text{ són semblants.}$$

Per tant, de les dues igualtats obtenim,

$$\frac{AT}{PH} = \frac{BA}{AP} = \frac{BC}{CA} \implies 2 AC \cdot AT = 2 PH \cdot BC = PQ \cdot BC.$$

Activitats 2.5

B 1. Demostreu el teorema II.13 amb l'ajut del teorema de Pitàgores i del teo-

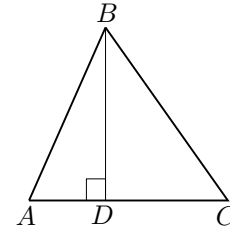
S

³⁹La relació amb II.13 s'obtidria de la versió per a triangles acutangles.

rema II.7 del quadrat d'una diferència.

• **Teorema II.13**

En els triangles acutangles el quadrat sobre el costat BC que subtendeix l'angle agut \widehat{BAC} és menor que els quadrats sobre els costats AB i AC que contenen l'angle obtús, en dues vegades el rectangle contingut per un dels costats AC de l'angle agut, sobre el que cau la perpendicular BD , i la recta interior AD tallada per la perpendicular fins l'angle agut.



2. Representeu gràficament amb el CABRI, el teorema de Thabit Ibn Qurra, i utilitzeu l'eina Àrea del quadre d'eines Mesura per comprovar-lo. S

3. Demostreu que II.12 i II.13 s'expressen, en el camp de la trigonometria, mitjançant el teorema del cosinus. S

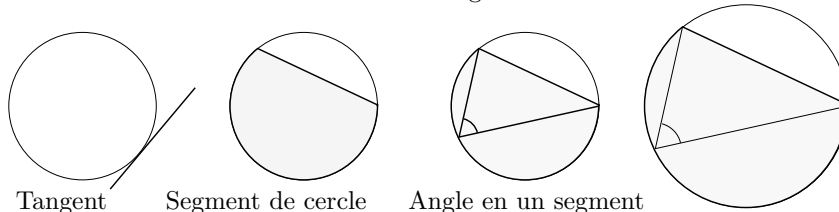
□

2.6 El llibre III

Els 37 teoremes d'aquest llibre tracten, en la seva totalitat, sobre la geometria del cercle. De les 11 definicions que trobem a la introducció, presentem aquelles que trobem més interessants de cara a la presentació que farem, i a una possible lectura posterior.

- D2. Es diu que toca [és tangent] a un cercle, la recta que troba el cercle i que quan és prolonga no talla el cercle.
- D7. Un segment d'un cercle és la figura compresa per una recta i una circumferència del cercle
- D8. Angle en un segment és l'angle que quan s'agafa un punt sobre la circumferència del segment i es tracen rectes des d'ell fins els extrems de la recta que és la base del segment, està contingut per les rectes traçades.
- D11. Segments semblants de cercles són aquells que admeten angles iguals, o aquells en què els angles són iguals entre sí.

Segments semblants de cercles



Tangent Segment de cercle Angle en un segment

- La definició D2 anomena tangent a la recta que té un únic punt en comú amb el cercle, però no en demostra l'existència fins el teorema III.16.
- La definició D7 es refereix a la figura que nosaltres coneixem com a “segment circular”. Quan utilitza el terme “una circumferència del cercle” vol dir un arc de circumferència.
- En la definició D8 es refereix als “angles inscrits” en un cercle que subtendeixen una corda donada per un mateix costat d'aquesta. Euclides anomena aquesta corda “base del segment”.
- L'existència dels segments semblants de la definició D11 no queda assegurada fins que en el teorema III.21 demostra que:

En un cercle, els angles en un mateix segment —[els angles inscrits que subtendeixen una mateixa corda pel mateix costat]— són iguals entre si.

Com ja hem dit farem una breu descripció dels teoremes i un tractament una mica més profund d'alguns d'ells de cara a una comprensió més clara dels estudis de posteriors seccions i capítols:

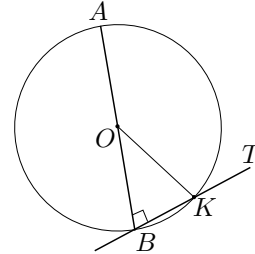
- Les proposicions 1, 3, 4 i 9 tracten sobre algunes propietats del centre del cercle, i la seva construcció.
- La proposició 2 tracta la concavitat del cercle.
- Les proposicions 7 i 8 comparen els segments traçats des d'un punt exterior o interior del cercle, que tenen l'altre extrem sobre la circumferència del cercle.
- Les interseccions i tangències entre cercles són tractades en els teoremes 5, 6, 10, 11, 12 i 13.
- Els teoremes 14 i 15 comparen les cordes en relació a les seves distàncies al centre del cercle.
- El grup 16–19 tracta l'existència i propietats de les rectes tangents. Concretament del teorema III.16 s'obté la propietat següent:

Una recta BT perpendicular a un diàmetre AB , per un extrem B d'aquest, és tangent a la circumferència.

La demostració té les seves peculiaritats. Per exemple tracta amb “angles de banya”, que tenen un costat recte i l'altre un arc de circumferència.⁴⁰

⁴⁰Una característica interessant d'aquestes magnituds és que permeten definir una estructura additiva com la dels segments i la dels angles rectilinis amb la única diferència de no ser arquimèdiana. És a dir que donats dos angles de banya a i b , es pot donar el cas que sumant-ne un d'ells, tantes vegades com vulguem a si mateix, mai arribem a superar en magnitud l'altre, —en llenguatge simbòlic $na < b$ per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$ —. Vegeu un exercici relacionat amb aquesta qüestió, proposat a EVES [1963], 380–381 de l'edició espanyola de 1976.

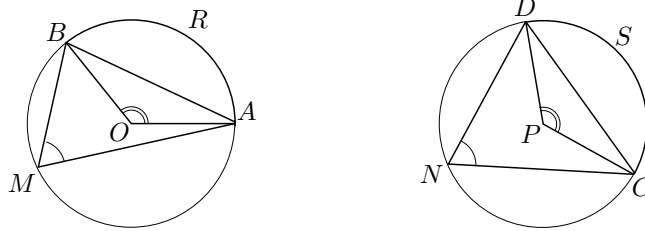
En la seva part principal fa una reducció a l'absurd en què suposa que BT talla, en un altre punt $K \neq B$, la circumferència. Llavors, si O és el centre de la circumferència, en ser $OB = OK$ tindriem —per I.5— $\widehat{OBK} = \widehat{OKB} = \pi/2$ en el triangle OBK , la qual cosa no pot ser.



Citem, també, que III.18 estableix el recíproc del resultat anterior. Mitjançant una reducció a l'absurd i amb l'ajut de I.17 i I.19, demostra la perpendicularitat entre la recta tangent i el radi pel punt de contacte.

- Els teoremes 20 i 21 estableixen respectivament que l'angle en el centre⁴¹ que subtendeix un arc de cercle és el doble que l'angle inscrit que subtendeix el mateix arc, i que els angles en un mateix segment [circular] són iguals.
- El teorema 22 estableix que els angles oposats d'un quadrilàter inscrit en un cercle sumen 180° . Euclides no dona el teorema recíproc, el qual és molt útil de cara a la resolució de problemes. Aquest pot ser demostrat per reducció a l'absurd, considerant el cercle que passa per tres punts del quadrilàter amb les condicions donades.⁴² Així, aquests dos teoremes proporcionen una condició necessària i suficient per a que un quadrilàter sigui inscritible en un cercle. Els quatre vèrtexs d'aquests quadrilàters s'anomenen “punts concíclics”.
- En el grup 23–29 aconseguix establir que:

En cercles iguals, arcs iguals subtendeixen i són subtendits per angles centrals iguals, angles inscrits iguals i cordes iguals.



És a dir, si els cercles tenen el mateix radi,

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} = \widehat{CPD} &\iff \widehat{ARB} = \widehat{CSD} \\ \widehat{AMB} = \widehat{CND} &\iff \widehat{ARB} = \widehat{CSD} \\ AB = CD &\iff \widehat{ARB} = \widehat{CSD}\end{aligned}$$

⁴¹Es refereix a angles que tenen el vèrtex en el centre del cercle. Nosaltres els anomenem “angles centrals”.

⁴²Vegeu l'activitat 2.6.3.

- En el teorema 30 biseca un arc, i en el 31 estableix que els angles inscrits són aguts, rectes o obtusos, segons que els arcs subtendits siguin més petits, iguals o més grans que mitja circumferència.
- El teorema 32 és força important. Allí generalitza la relació — III.20— entre angles inscrits i els angles centrals que subtendeixen els mateixos arcs, al cas en què un dels costats de l'angle inscrit ha esdevingut tangent a la circumferència.
- En el teorema 33 construeix l'arc capaç d'un angle sobre un segment, i en el 34, la corda d'un cercle tal que l'arc que determina sobre el cercle sigui l'arc capaç d'un angle donat.⁴³
- Un altre grup important de teoremes és el 35–37. Allí s'estableixen les relacions entre els segments determinats pels punts d'intersecció entre una circumferència i les rectes traçades per un punt interior o exterior. Aquestes seran una eina valuosa per a les anàlisis d'un gran nombre de problemes. També permetran, en el segle XIX, establir el concepte de potència d'un punt.
- La circumferència per tres punts no alineats no és construïda fins arribar al teorema IV.5. El seu procediment només requereix informació del llibre I, i consisteix a determinar el centre de la circumferència mitjançant les mediatrises que aquests punts determinen. Així, s'hagués pogut incloure entre els teoremes del llibre III, i en alguna activitat en farem ús.

2.6.1 Relacions entre angles inscrits i centrals. Els teoremes III.20 i III.21

En el teorema III.20, Euclides estableix la relació entre un angle inscrit i un angle central que subtendeixen el mateix arc de circumferència.

- **Teorema III.20**

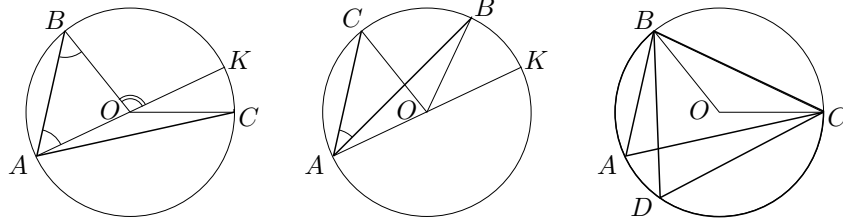
En un cercle, l'angle \widehat{BOC} en el centre O és el doble de l'angle \widehat{BAC} en la circumferència, quan els angles tenen la mateixa circumferència \widehat{BC} com a base.

- **Teorema III.21**

En un cercle els angles en el mateix segment BC són iguals entre si.

La demostració de III.20 és dividida en dos casos, i el pas principal consisteix a reduir el problema al cas en què un dels dos costats de l'angle inscrit passa pel centre:

⁴³Recordem que l'arc capaç d'un angle α sobre un segment AB , és el lloc geomètric dels punts P tals que $\widehat{APB} = \alpha$. Aquest lloc està constituït per dos arcs simètrics respecte de AB , i Euclides només en construeix un.



Cas 1: El centre O de la circumferència és interior a l'angle inscrit \widehat{BAC} .

Euclides traça el diàmetre AK per A . Llavors:

$$\begin{aligned}
 -OA = OB &\implies \widehat{OBA} = \widehat{OAB}, \quad \text{—per I.5—} \\
 -2 \cdot \widehat{KAB} &= \widehat{OBA} + \widehat{OAB} = \pi - \widehat{AOB} = \widehat{KOB}, \quad \text{—per I.32—}
 \end{aligned}$$

Si apliquem el mateix raonament al triangle AOC , haurem obtingut les dues igualtats:

$$2 \cdot \widehat{KAB} = \widehat{KOB} \quad \text{i} \quad 2 \cdot \widehat{KAC} = \widehat{KOC}.$$

Finalment, si reunim els dos resultats tenim

$$\widehat{BOC} = \widehat{KOB} + \widehat{KOC} = 2(\widehat{KAB} + \widehat{KAC}) = 2 \cdot \widehat{BAC}.$$

Cas 2: El centre O de la circumferència és exterior a l'angle inscrit \widehat{BAC} .

Diu que s'hauria d'actuar de la mateixa manera i llavors obté

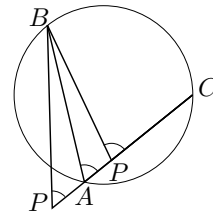
$$\widehat{BOC} = \widehat{KOC} - \widehat{KOB} = 2(\widehat{KAC} - \widehat{KAB}) = 2 \cdot \widehat{BAC}.$$

Quant al teorema III.21, n'és una conseqüència immediata, perquè

$$2 \cdot \widehat{BAC} = \widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BDC} \implies \widehat{BAC} = \widehat{BDC}.$$

Finalment fem dues observacions:

- Una conseqüència de III.20 que Euclides no inclou més que quan arriba a III.31, dins d'un enunciat més general, és que els angles en un diàmetre són rectes. Això és immediat en ser l'angle central corresponent igual a dos angles rectes.
- És de comprovació immediata veure —pel teorema I.12 de l'angle exterior— que qualsevol angle \widehat{BPC} , tal que P és interior al cercle, és major que l'angle inscrit \widehat{BAC} . En el cas que P és exterior, llavors $\widehat{BPC} < \widehat{BAC}$.



Activitats 2.6

1. Anomenem “angle interior d’un cercle”, qualsevol angle que té el seu vèrtex a l’interior del cercle. Anomenem “angle exterior d’un cercle”, qualsevol angle que té el vèrtex a l’exterior del cercle. \overline{E}_2

i) Demostreu que un angle interior és la semisuma dels angles centrals corresponents als arcs de cercle subtendits per l’angle interior.

ii) Demostreu que un angle exterior és la semidiferència dels angles centrals corresponents als arcs de cercle subtendits per l’angle exterior.

\boxed{S} iii) Visualitzeu i comproveu amb el CABRI els resultats anteriors, amb l’eina *Angle* del quadre d’eines *Mesurar*.

2. Tot i que el teorema III.17 proporciona un mètode per a la construcció de les rectes tangents a un cercle des d’un punt exterior, farem una proposta diferent.

i) Construiu les rectes tangents a un cercle des d’un punt exterior, utilitzant que:

- La tangent i el radi pel punt de contacte són perpendiculars.
- El teorema III.20 en el cas particular en què l’angle inscrit que subtendeix un diàmetre és recte.

\boxed{S} ii) Construiu una macro amb el CABRI que proporioni, a partir d’una circumferència i un punt exterior, les dues tangents pel punt, i els punts de contacte.

3. Es pretén estudiar el teorema III.22, el seu recíproc, i aplicar aquest últim a la resolució d’un problema.

i) Demostreu el teorema III.22 i el seu recíproc.

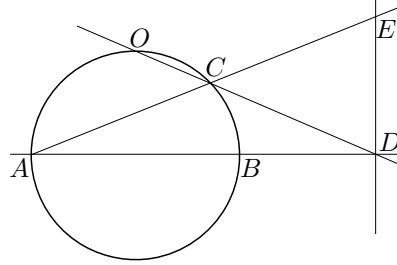
• **Teorema III.22**

Els angles oposats dels quadrilàters [inscrits] en els cercles són iguals a dos angles rectes.

ii) [Problema 4 de la primera sessió de la fase catalana de l’Olimpíada Matemàtica 1995–96].⁴⁴ Sigui AB el diàmetre d’una circumferència, O el punt mitjà d’un dels arcs que van de A a B , i C un punt qualsevol de l’arc OB . Dibuixem les rectes AC , OC , i sigui D la intersecció de OC amb AB . Sigui DE perpendicular a AD , i E la seva intersecció amb AC . Demostreu que els segments BD i DE tenen la mateixa longitud.

\boxed{S}

⁴⁴Vegeu OC.SES [2000], 139. La idea d’utilitzar punts concíclics en l’anàlisi d’aquest problema li dec al professor i amic Paco Alejandro.



□

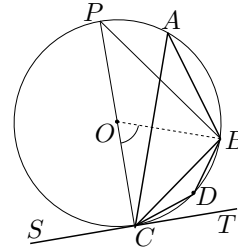
2.6.2 Generalització de III.21 per a angles en la circumferència amb un costat tangent. Teorema III.32

Aquí s'estableix que un angle \widehat{TCB} amb el vèrtex C a la circumferència, el costat CB secant en B i el costat CT tangent, és la meitat de l'angle central COB .

- **Teorema III.32**

Si una recta ST toca [és tangent a] un cercle, i des del punt C de contacte es traça una recta BC que talli el cercle, els angles \widehat{TCB} i \widehat{SCB} que forma amb la recta tangent seran iguals als angles \widehat{CAB} i \widehat{CDB} en els segments alterns del cercle.

Quan diu segments alterns, es refereix als dos segments CAB i CDB determinats per BC sobre el cercle. S'ha de veure que $\widehat{CAB} = \widehat{TCB}$ i que $\widehat{CDB} = \widehat{SCB}$. Sigui CP el diàmetre pel centre O del cercle. Pel teorema III.18, $\widehat{TCP} = \pi/2$. Llavors,

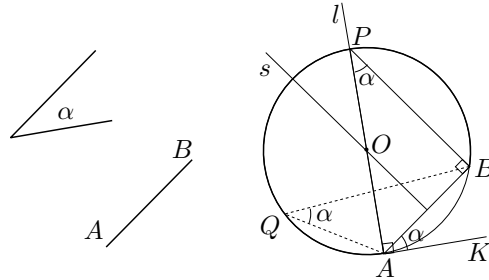


$$\begin{aligned}\widehat{TCB} &= \widehat{TCP} - \widehat{BCP} = \pi/2 - \widehat{BOP}/2 = \widehat{BOC}/2 = \widehat{CAB}, \\ \widehat{SCB} &= \widehat{TCP} + \widehat{BCP} = \pi/2 + \widehat{BOP}/2 = (2\pi - \widehat{BOC})/2 = \widehat{CDB}\end{aligned}$$

2.6.3 Anàlisi de la construcció de l'arc capaç. Teorema III.33

- **Teorema III.33**

Sobre una línia recta AB traçar un segment APB d'un cercle que admeti un angle igual a un angle rectilini α donat.



Farem una anàlisi per al cas en que l'angle α sigui agut. Implicarem un diàmetre del cercle, perquè així podrem obtenir el seu centre i l'arc cercat. Pel cas obtús, només caldria construir l'arc capaç de l'angle suplementari, el qual és agut, i l'arc capaç cercat seria el que li falta, a l'arc trobat, per completar la circumferència.

Suposem l'arc \widehat{AQB} construït de manera que per a tots els seus punts Q , es compleix $\widehat{AQB} = \alpha$. Per a que quedi implicat un diàmetre, tracem, per B el segment BP perpendicular al segment AB , en què P està sobre l'arc solució. Llavors, en ser $\widehat{ABP} = \pi/2$, AP és un diàmetre. Així, la seva intersecció amb la mediatriu s de AB determina el centre O del cercle. Llavors, si tracem una perpendicular AK , per A , al diàmetre AP obtenim,

$$\widehat{KAB} = \pi/2 - \widehat{PAB} = \widehat{APB} = \alpha.$$

En aquest punt l'anàlisi s'ha acabat, en ser AB i $\widehat{KAB} = \alpha$ coneguts. Podem refer el camí enrere per elaborar la construcció. Efectivament,

- Construïm $\widehat{KAB} = \alpha$, sobre AB .
- Tracem, per A , la perpendicular l a AK .
- Tracem la mediatriu s de AB .
- Amb centre el punt O d'intersecció de l i s tracem la circumferència (O, OA) .

L'arc solució és \widehat{APB} , en què P és la intersecció de la recta l amb la circumferència traçada. Efectivament, per a qualsevol punt Q de \widehat{APB} es compleix

$$\widehat{AQB} = \widehat{APB} = \widehat{KAB} = \alpha.$$

Activitats 2.7

- B** 1. Un vaixell V veu, des d'una posició V_1 , dos punts A i B coneguts sota un angle α conegut. Es desplaça segons un segment s donat en magnitud, direcció i sentit. Des de la nova posició V_2 veu els dos punts sota un altre angle β conegut.

S

i) Construïu les posicions V_1 i V_2 , les quals sabem que es troben en un mateix semiplà dels dos que determina la recta AB .

ii) Feu una presentació del problema i la seva solució amb el CABRI.

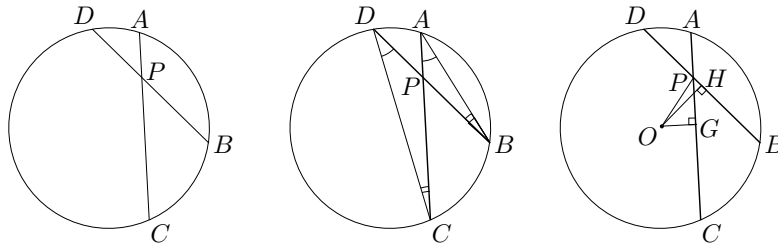
□

2.6.4 Els teoremes III.35–III.37. La potència d'un punt

Acabarem els estudis del llibre III, amb el grup III.35–III.37. Tractarem el primer d'aquests teoremes des de dos punts de vista. Primerament, suposarem establerta una teoria de la proporció que permeti considerar el concepte de semblança. Després, ho farem a la manera d'Euclides que no utilitza aquesta teoria i es recolza, entre d'altres, en els resultats d'àlgebra geomètrica del llibre II. Ho fem així per fer palesa la simplicitat que comporta l'ús de la teoria de la proporció en front del segon tractament. Aquesta, un cop establerta i justificada en els llibres V i VI constituirà, conjugant-la amb les relacions mètriques establertes en els quatre primers llibres, una eina valuosa per a la resolució de problemes i la demostració de teoremes.

• Teorema III.35

Si en un cercle es tallen dues rectes AC i BD entre si, el rectangle contingut pels segments PA i PC d'una és igual al rectangle contingut pels segments PB i PD de l'altra.



– **Tractament 1:** Suposem establerta una teoria de la proporció, i que són coneguts els criteris de semblança de triangles.

Els triangles PAB i PDC són semblants en pertànyer A i D a l'arc capaç de \widehat{CDB} sobre BC , i B i C a l'arc capaç de \widehat{DCA} sobre AD . Per tant,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC} \quad \text{o també,} \quad PA \cdot PC = PB \cdot PD.$$

– **Tractament 2:** A la manera d'Euclides.

S'utilitza el teorema de Pitàgores, i la bisecció d'una corda per una recta perpendicular pel centre de la circumferència —III.3—. També perseguim

utilitzar la conseqüència immediata de II.5, que en forma algebraica s'escriu $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Per aconseguir-ho expressarem $PB \cdot PD$ i $PA \cdot PC$, com el producte d'una suma per una diferència.

Siguin G i H els punts mitjans de les cordes AC i BD . Observem que:

$$PB = BH + HP, PD = DH - HP = BH - HP,$$

$$PA = AG - GP, PC = CG + GP = AG + GP.$$

Per tant, per II.5 i I.47,

$$\begin{aligned} PB \cdot PD &= (BH + HP)(BH - HP) = BH^2 - HP^2 = \\ &= BH^2 - (OP^2 - OH^2) = OB^2 - OP^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PA \cdot PC &= (AG - GP)(AG + GP) = AG^2 - GP^2 = \\ &= AG^2 - (OP^2 - OG^2) = OA^2 - OP^2. \end{aligned}$$

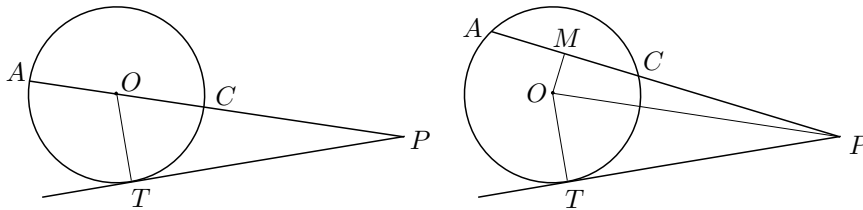
Llavors, en ser OA i OB iguals al radi, tenim $PA \cdot PC = PB \cdot PD$. \square

Quant al teorema III.36, seguim la presentació d'Euclides i deixem el tractament amb semblances per a l'activitat 2.8.1.

• **Teorema III.36**

Si s'agafa un punt P fora d'un cercle i des d'ell cauen dues rectes sobre el cercle, i una d'elles talla el cercle i l'altra el toca, el rectangle contingut per la recta sencera PA que talla el cercle i la recta PC interceptada fora d'aquest, entre el punt P i la circumferència convexa, serà igual al quadrat sobre la tangent PT .

La demostració d'Euclides distingeix dos casos: primer, quan PC passa pel centre O i, segon, quan no hi passa.



– **Primer cas:** Per III.18 l'angle \widehat{PTO} és recte. Llavors, per II.5 i I.47,
 $PA \cdot PC = (PO + OA)(PO - OA) = PO^2 - OA^2 = PT^2 + OT^2 - OA^2 = PT^2$.

– **Segon cas:** Sigui M el punt mitjà de AC . Llavors, per II.5 i I.47,

$$\begin{aligned} PA \cdot PC &= (PM + MA)(PM - MA) = PM^2 - MA^2 = \\ &= PM^2 - OA^2 + OM^2 = PO^2 - OA^2 = \\ &= PO^2 - OT^2 = PT^2. \end{aligned}$$

\square

D'aquest dos teoremes es desprèn la invariància del producte $PA \cdot PC$, quan es tracen secants, en A i C , a una circumferència per un punt P interior o exterior. El valor constant d'aquest producte s'anomena, des del segle XIX, "potència del punt P respecte de la circumferència". Hem vist que, en els dos casos, la potència és igual a la diferència dels quadrats construïts sobre el radi i sobre el segment que separa el punt P del centre de la circumferència. Finalment, presentem el teorema III.37, el qual és el recíproc de III.36.

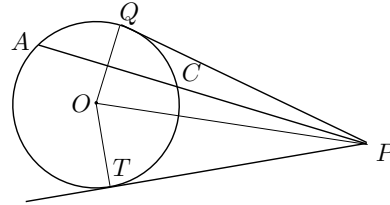
• **Teorema III.37**

Si agafem un punt P fora d'un cercle i des d'ell cauen dues rectes sobre el cercle, i una d'elles talla el cercle i l'altra cau sobre ell i, a més, el rectangle contingut per la recta sencera PA que talla el cercle i la recta PC interceptada fora d'aquest, entre el punt i la circumferència convexa, és igual al quadrat de la recta PT que cau sobre aquest, la recta que cau tocarà el cercle.

La seva demostració parteix de la construcció de dues línies:

- La tangent PQ des de P , per tal de comparar els triangles POQ i POT .
- Una secant PA a la circumferència, que la talla en A i C .

Lavors, POQ i POT són congruents pel criteri C–C–C, en ser $OQ = \text{radi} = OT$, PO comú, i $PT^2 = PA \cdot PC = PQ^2$ —la primera igualtat per hipòtesi i la segona per III.36—. Per tant l'angle \widehat{PTO} és recte i, consegüentment —per III.16—, PT serà tangent.

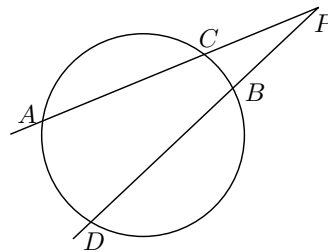


Activitats 2.8

1. Utilitzeu la semblança de triangles per demostrar que:

Donat un punt P exterior a un cercle i dues secants PA i PD , les quals tornen a tallar el cercle en C i B , es compleix

$$PC \cdot PA = PB \cdot PD.$$

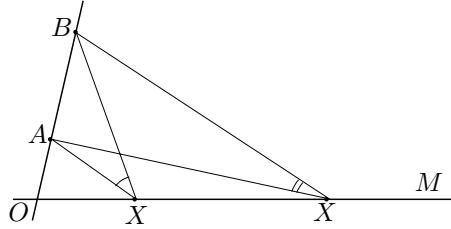


\overline{B}

\boxed{S}

2. El problema que proposem en aquesta activitat, el podríem anomenar el problema del cinema, del futbolista, de l'estatua, i d'altres maneres. Això és degut a que es presenta en els llibres de text revestit d'elements relacionats amb aquests noms. El seu enunciat és:

Donats els punts O , A i B sobre una recta —de manera que A estigui entre O i B —, i una altra recta OM , es tracta de construir un punt X sobre OM tal que l'angle \widehat{AXB} sigui màxim.



Aquest problema s'acostuma a plantejar en els capítols dedicats al càlcul diferencial i es resol amb les seves tècniques. També s'acostuma a imposar la restricció $\widehat{MOB} = 90^\circ$. Aquí es pretén la seva resolució amb les eines euclidianes, per a qualsevol valor de \widehat{MOB} .

i) Proposeu una anàlisi geomètrica que us permeti construir la solució.

S

ii) Feu una visualització amb el CABRI de la construcció de la solució, de manera que aquesta es pugui comprovar amb les eines del quadre d'eines *Mesura*.

□

2.7 Construcció de polígons regulars. El llibre IV

El llibre IV consta de 16 teoremes, la major part dels quals té a veure amb la construcció de polígons regulars. El problema de la construcció, amb el regle i el compàs, d'aquests polígons es pot enunciar de maneres diverses, totes elles equivalents.

- Construir un polígon regular de n costats, a partir d'un costat conegut.
- Construir un polígon regular de n costats, inscrit en una circumferència donada.
- Construir l'angle $2\pi/n$.

Qualsevol d'aquestes construccions proporciona les altres. Hem vist que en el llibre I, es resolen dos casos de l'enunciat primer: el del triangle equilàter, en el teorema I.1, i el del quadrat en el teorema I.46. El llibre IV resol alguns casos de l'enunciat segon. Concretament resol les inscripcions del quadrat a IV.6, del pentàgon a IV.10, de l'hexàgon a IV.15 i del pentadecàgon a IV.16. La inscripció del triangle no la fa, encara que es dedueix de manera immediata de I.1 i IV.2, i la utilitza per construir el pentadecàgon. Està clar que a partir dels polígons de nombre de costats $n = 3, 4, 5, 6, 15$, es poden construir, mitjançant biseccions,

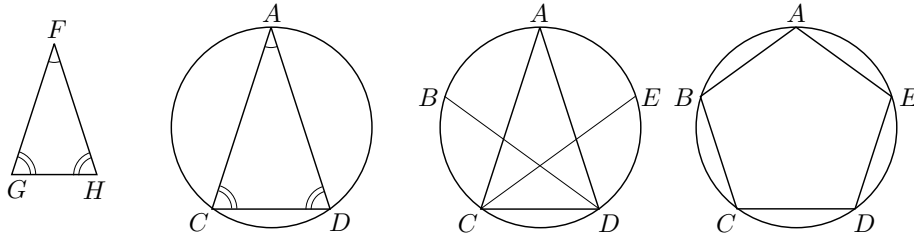
polígons de costats $n = 2^k \cdot 3$, $2^k \cdot 4$, $2^k \cdot 5$, $2^k \cdot 15$. Ara bé, polígons com els de 7, 9, o 11 costats no mereixen cap atenció per part d'Euclides. Podem dir que no els sabia construir. Però hi havia un motiu, com es va poder demostrar més de vint segles més tard. Aquests tres polígons, i una infinitat més d'altres, no són construïbles amb regla i compàs. De fet, a la llista dels polígons que sabien construir els grecs, no se'n va afegir cap fins l'any 1796. En aquell any el jove Gauss va aconseguir la construcció de l'heptadecàgon, amb uns mètodes força allunyats dels utilitzats per Euclides. L'any 1801 en les seves *Disquisitiones Arithmeticae* donà una condició necessària i suficient de constructibilitat de polígons regulars.⁴⁵

2.7.1 El pentàgon regular. Teoremes IV.10 i IV.11

Presentarem una anàlisi de la construcció del pentàgon per part d'Euclides. Una de les finalitats serà observar la diversitat de qüestions referents al cercle que genera i que han sigut tractades en el llibre III. També, podrem apreciar la seva complexitat, provocada per no tenir a mà una teoria de la proporció, i per la restricció a l'ús del regla i el compàs.

• Teorema IV.11

Inscriure un pentàgon equilàter i equiangle en un cercle donat.



Per a la resolució Euclides construeix:

- Un triangle isòsceles FGH tal que $\widehat{FGH} = \widehat{GHF} = 2 \cdot \widehat{GFH}$. [Aquesta és precisament la construcció que fa a IV.10.]
- Un triangle isòsceles ACD inscrit en el cercle donat d'angles iguals als del triangle FGH . [Això es pot fer a partir de IV.2.]
- Les bisectrius CE i DB de \widehat{ACD} i \widehat{ADC} , en què B i E són les seves interseccions amb la circumferència donada.
- El pentàgon cercat $ABCDE$.

La demostració d'Euclides és, com sempre, sintètica. Pretenem fer-ne una anàlisi que ens hi condueixi.

⁴⁵Vegeu GAUSS [1801], 643–644 de l'edició catalana de 1996.

Anàlisi de la construcció del pentàgon

Suposem, doncs, que hem construït el pentàgon inscrit $ABCDE$.

– **Primera fase:** Les diagonals EC i BD del pentàgon són bisectrius dels angles \widehat{ACD} i \widehat{ADC} .

És cert perquè, en ser els costats del pentàgon iguals, es compleixen, —per III.28—, les igualtats següents entre els arcs subtendits pels angles bisecats:

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{AE} = \widehat{ED}.$$

Llavors, el teorema III.27 assegura que els angles sobre la circumferència que subtendeixen arcs iguals són iguals.

– **Segona fase:** Reducció del problema a la construcció del triangle ACD .

Es pot fer aquesta reducció perquè un cop construït ACD , per determinar els vèrtexs B i E , només caldrà traçar les bisectrius esmentades i tallar-les amb la circumferència.

– **Tercera fase:** Estudi dels angles del triangle ACD .

Per comparar-los, podem utilitzar els arcs de circumferència subtendits per cada angle del triangle.

– \widehat{ADC} subtendeix l'arc $\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC}$.

– \widehat{ACD} subtendeix l'arc $\widehat{AD} = \widehat{AE} + \widehat{ED}$.

– \widehat{CAD} subtendeix l'arc \widehat{CD} .

En ser $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{AE} = \widehat{ED}$, llavors —per III.27— són iguals els angles que subtendeixen aquests arcs i, concretament

$$\widehat{AC} = \widehat{AD} = 2 \cdot \widehat{CD} \implies \widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 2 \cdot \widehat{CAD}.$$

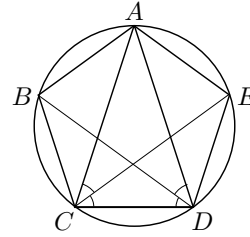
– **Quarta fase:** Reducció de la construcció del triangle ACD .

Podem reduir el problema de la construcció del triangle ACD , al de construir un triangle qualsevol FGH que tingui els mateixos angles que el ACD , amb l'ajut del teorema IV.2.

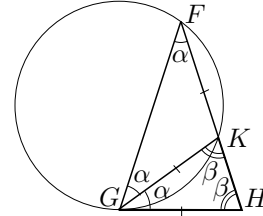
– **Cinquena fase:** Construcció del triangle FGH .

Es tracta de construir FGH tal que $\widehat{HGF} = \widehat{GHF} = 2 \cdot \widehat{GFH}$. Això és el que fa Euclides a IV.10 i en farem l'anàlisi per aconseguir-ho.

Suposem el triangle FGH construït. Si tracem la bisectriu GK , —en què K pertany al segment FH —, de l'angle \widehat{HGF} tenim, amb la notació de la figura:



- Els angles α iguals.
- $2\alpha = \beta$.
- Els angles β iguals.
- $GH = GK = FK$.



Llavors, si considerem la circumferència que passa per G , K i F , resulta que

$$\widehat{HGK} = \alpha = \widehat{GFK} \implies HG \text{ és tangent a la circumferència.}^{46}$$

Ara, si apliquem el teorema III.36, tenim

$$HK \cdot HF = GH^2 = GK^2 = FK^2.$$

En resum, a partir d'un segment FH conegut, hem determinat un punt K que el parteix en extrema i mitjana raó. O sigui que el punt K és conegut. Per tant, l'anàlisi de la construcció del triangle FGH i, consegüentment la del pentàgon, s'ha acabat. Podem determinar-ne el punt G construïnt:

- La circumferència (F, FH) .
- La circumferència (H, FK) .
- El punt G d'intersecció de (F, FH) i (H, FK) .

Per completar la construcció del pentàgon, caldrà inscriure en la circumferència un triangle isòsceles amb els mateixos angles que el FGH , i determinar els dos vèrtexs que falten a partir de les bisectrius de \widehat{FGH} i \widehat{FHG} .

2.7.2 Construcció del pentàgon regular a l'*Almagest*

Claudi Ptolemeu [II] va escriure la *Sintaxi Matemàtica*, obra en tretze llibres que sintetitzava el conjunt de coneixements grecs sobre astronomia i trigonometria. La seva influència es va estendre a tot el món àrab i a l'Europa medieval. Aquest tractat és conegut sota el nom d'*Almagest*, «el més gran», que li va proporcionar la cultura àrab, per diferenciar-lo dels altres tractats “menors” d'astronomia. Aquí ens interessa presentar la construcció que fa del pentàgon regular,⁴⁷ des

⁴⁶Aquesta és la proposició inversa de III.32, la qual es pot demostrar a partir del porisma de III.16 que diu:

La recta traçada per l'extrem del diàmetre d'un cercle formant angles rectes amb ell, toca el [és tangent al] cercle.

Notem, també, que la construcció de la circumferència per G , K i F és feta per Euclides a IV.5, pel mètode de les mediatris dels segments determinats pels tres punts.

⁴⁷La construcció de Ptolemeu ve motivada pel càlcul de la corda d'una circumferència corresponent a l'angle de 72° . Vegeu PTOLEMEU [II].

del punt de vista dels resultats demostrats en els teoremes XIII.9 i XIII.10 dels *Elements*.

• **Teorema XIII.9**

Si posem junts el costat de l'hexàgon i del decàgon inscrits en el mateix cercle, la recta resultant queda dividida en extrema i mitjana raó, i el segment més gran és el costat de l'hexàgon.

• **Teorema XIII.10**

Si un pentàgon equilàter és inscrit en un cercle, el quadrat sobre el costat del pentàgon és igual als quadrats sobre els costats de l'hexàgon i del decàgon inscrits en el mateix cercle.

És immediat demostrar que el costat de l'hexàgon inscrit en un cercle és igual al radi del cercle.⁴⁸ Llavors, si d , r i p són els costats, respectivament, del decàgon, de l'hexàgon i del pentàgon, essent r el radi del cercle, es compleix:

$$\text{XIII.9} \iff r^2 = (r + d) \cdot d \quad (2.15)$$

$$\text{XIII.10} \iff p^2 = r^2 + d^2.$$

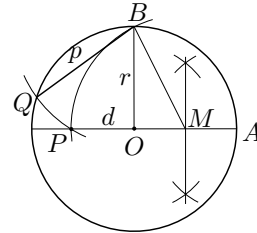
A partir d'aquí es pot produir la construcció de Ptolemeu. Efectivament, el costat p del pentàgon es pot considerar, per I.48 i XIII.10, com la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets el radi r de la circumferència i el costat d del decàgon. En ser r conegut només cal determinar d . Això és el que fa XIII.9, del qual es desprèn que d és el segment més petit que resulta de tallar $r + d$ en extrema i mitjana raó. Llavors, a partir de la construcció de II.11, és fàcil construir $r + d$ perquè d coincideix amb el segment més gran que resulta de tallar r en extrema i mitjana raó.⁴⁹ Ara, ja podem veure que els passos per obtenir el costat del pentàgon inscrit en un cercle (O, OA) , consistiran a construir:

⁴⁸Euclides deixa establerta aquesta propietat en el teorema IV.15.

⁴⁹Vegeu el tercer apartat de l'activitat 3.3.2. També es pot comprovar en la igualtat 2.15:

$$r^2 = (r + d) \cdot d = rd + d^2 \implies d^2 = r(r - d).$$

- Un radi OB perpendicular al radi OA .
- El punt mitjà M de OA .
- El punt P d'intersecció del cercle (M, MB) amb la prolongació de OA pel costat de O . Llavors, $OP = d$ perquè $d^2 = r(r - d)$, i $BP = p$, en ser BP la hipotenusa del triangle rectangle de catets $BO = r$ i $OP = d$.
- El punt Q d'intersecció del cercle (B, BP) amb el cercle donat.



Així, el segment BQ és un costat, en magnitud i posició, d'un pentàgon inscrit en el cercle.

2.7.3 Un intent de construcció del pentàgon regular amb un compàs d'obertura fixa

Albrecht Dürer dedica unes pàgines dels seus *Underweysung* a la construcció de polígons regulars.⁵⁰ Proporciona una construcció del pentàgon, amb regla i compàs euclidians, igual que la de Ptolemeu. També s'interessa, com molts d'altres matemàtics, en les construccions amb compàs d'obertura fixa.⁵¹ Presentarem el seu intent de construcció del pentàgon amb aquest compàs, i proposarem l'avaluació de l'error que comet a l'activitat 2.9.4.

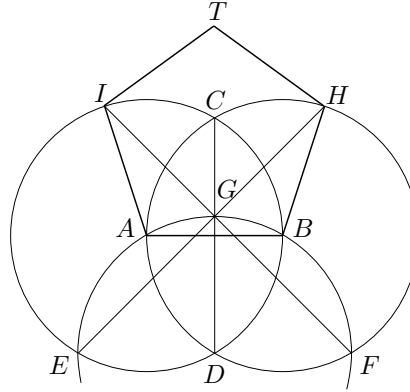
Construcció de Dürer:

Vols construir un pentàgon amb un compàs d'obertura constant, llavors procedeix com segueix. Descriu dos cercles secants tals que un passa pel centre de l'altre. Uneix els dos centres A i B per una línia recta. Aquesta serà la longitud del costat del pentàgon. Els punts d'intersecció dels dos cercles, designa'ls el de dalt per C i el de sota per D , i traça una línia recta CD . Agafa llavors el compàs d'obertura constant, posa una de les seves puntes sobre el punt D i descriu des de l'altre un [tercer] cercle que passi pels dos cercles i els seus centres A i B . Designa els seus punts d'intersecció amb els dos [primers] cercles, per E i F . Anomena G la seva intersecció amb la vertical CD . Traça tot seguit una línia recta EG i prolonga-la fins que talli el cercle en un punt que s'anomenarà H . Traça una recta FG , la qual, prolongada fins el cercle, el tallarà en un punt designat per I . Unim I i A , H i B per rectes, i hauràs obtingut tres costats del pentàgon. Fes que es tallin dos costats d'igual longitud que surtin de I i de H , i tindràs un pentàgon, com el que he representat

⁵⁰Vegeu DÜRER [1525], 204–210 de la traducció francesa de PEIFFER de 1995.

⁵¹Recordeu Abu'l Wefa, el qual vam citar a la secció 1.6.2.

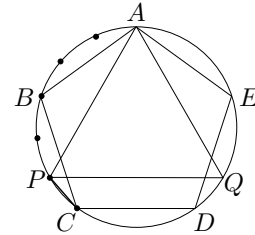
aquí sota.



2.7.4 El pentadecàgon regular

En el teorema IV.16, últim del llibre IV, Euclides construeix el pentadecàgon regular inscrit en un cercle donat. La construcció que fa, pot aparèixer fent una anàlisi com la següent:

Considerem el problema resolt, la qual cosa implica que tenim la circumferència dividida en 15 arcs iguals. El fet que 15 sigui divisible per 3 i per 5, fa pensar en agrupar aquesta arcs en 3 grups de 5 i en 5 grups de 3. Així podem implicar les figures conegudes del triangle equilàter i el pentàgon regulars inscrits.



Efectivament, en agrupar en 3 grups de 5 arcs queda determinat el costat AP del triangle, i en agrupar en 5 grups de 3 arcs queda determinat el costat AB del pentàgon. O sigui que queda determinat l'arc diferència

$$\widehat{AP} - \widehat{AB} = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{5} = 2 \cdot \frac{2\pi}{15}.$$

El problema ha quedat reduït al de bisecar l'arc $\widehat{BP} = \widehat{AP} - \widehat{AB}$, el qual sabem resoldre traçant la mediatriu del segment BP .

L'anàlisi s'ha acabat, i aquest és el camí que utilitza Euclides per a la construcció. Notem que podríem prescindir de l'últim pas, si consideréssim directament l'arc

$$\widehat{PC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} - \widehat{AP}.$$

Llavors, la corda PC és el costat del pentadecàgon cercat. La construcció resultant consistiria en traçar:

- El costat AP del triangle equilàter APQ inscrit en el cercle. (Una manera de fer-ho és a partir de l'hexàgon regular, el qual té el costat coincident amb el radi del cercle.)
- El costats AB i BC del pentàgon regular $ABCDE$ inscrit en el cercle, amb el vèrtex A coincident amb el un vèrtex del triangle.
- El segment PC , el qual serà el costat del pentadecàgon.

Finalment, notem que en el llenguatge de l'àlgebra s'ha intentat resoldre l'equació

$$\frac{2\pi}{15} = x \cdot \frac{2\pi}{3} + y \frac{2\pi}{5}, \quad \text{és a dir} \quad 5x + 3y = 1$$

i s'ha trobat la solució $a = -1$, $b = 2$.

Això suggereix una manera de trobar polígons construïbles, amb regla i compàs, a partir d'altres polígons construïbles. Efectivament, si tenim construïts dos polígons, un de p costats i l'altre de q costats, la construcció del polígon de $p \cdot q$ costats es podrà obtenir de la recerca de solucions enteres de l'equació

$$px + qy = 1.$$

Sabem, i estudiarem més endavant, que aquesta equació té solucions enteres si i només si p i q són primers entre si. En resum

Si els polígons regulars de p i q costats són construïbles, i el M.C.D.(p, q) = 1, llavors el polígon regular de $p \cdot q$ costats també és construïble.

Aquest resultat lliga amb les construccions conegudes dels grecs. Sabien construir tots els polígons de 2^n costats, —amb $n \geq 2$ —, i $2^n \cdot 3$, $2^n \cdot 5$ i $2^n \cdot 15$ costats per a $n \geq 0$.

Activitats 2.9

1. Feu una anàlisi que permeti resoldre la construcció del teorema IV.2. B
- **Teorema IV.2** S
 Inscriure en un cercle donat un triangle d'angles iguals als d'un triangle donat.
2. La inscripció d'un cercle en un triangle donat és resolta per Euclides en el teorema IV.4. Feu una anàlisi que us permeti dur a terme la construcció. S
3. Feu una visualització pas a pas, amb el CABRI, de la construcció de Ptolemeu. S
4. Considereu la construcció de Dürer, del pentàgon, amb el compàs d'obertura fixa.

i) Cerqueu, utilitzant la trigonometria, si aquest pentàgon és regular. □

ii) Feu una visualització pas a pas d'aquesta construcció amb el CABRI.

E₂ **5.** Donat un quadrat, construïu amb regla i compàs l'octàgon regular que es pot obtenir retallant quatre triangles rectangles isòsceles iguals, dels cantons del quadrat.

S

□

Capítol 3

L'anàlisi geomètrica grega

L'observació dels mecanismes que condueixen a la comprensió de les idees matemàtiques, ens involucra en l'estudi dels problemes que les originen i en el terreny de l'*heurística*, la qual és definida per Pólya¹ com la disciplina que estudia les operacions mentals típicament útils en els processos de resolució de problemes. Estem d'acord amb l'èmfasi que fa aquest autor de la relació de l'anàlisi geomètrica grega amb aquesta disciplina.² Aquesta relació és la que ens ha empès a dedicar un capítol d'aquest treball al seu estudi. D'aquesta manera podrem percebre el paper que pot jugar com a eina de resolució de problemes, i ser-nos d'utilitat de cara a comprendre la gènesi de les idees tractades en els diferents capítols d'aquest treball. De cara a una valoració de la potencialitat d'aquesta disciplina, farem ús i referència de resultats de la geometria, els quals o bé ja han sigut tractats, o bé ho seran en capítols posteriors. Això, que pot semblar un inconvenient per la introducció d'un cert grau de complexitat en el desenvolupament del capítol, té la gran avantatge d'apropar-nos d'una manera estimulante a l'estil grec en el terreny de la resolució de problemes geomètrics.

3.1 Els precursors. El mètode de reducció i el raonament per hipòtesi

Quasi bé totes les obres dels geomètres grecs que s'han conservat fan una presentació sintètica dels seus teoremes i construccions. Parteixen d'axiomes i procedeixen, fent deduccions lògiques a partir dels axiomes i d'altres resultats obtinguts, a la construcció dels resultats que basteixen l'edifici de la geometria. La qüestió de com es descobreixen aquests resultats queda amagada i, únicament, en el llibre

¹Vegeu PÓLYA [1945] edició de 1994, 102.

²El paper principal de l'anàlisi en la resolució de problemes en el període grec és tractat a fons en l'estudi de KNORR [1986].

VII de la *Collecció Matemàtica* de Pappos [IV]³ trobem informació del *mètode de l'anàlisi* que, segons aquest autor, era utilitzat en la recerca de teoremes i en la resolució de construccions geomètriques.

Introduïrem l'estudi donant una ullada a alguns tractaments, els quals es consideren precursors del mètode, i seguirem amb la presentació de la concepció de Pappos en el llibre VII de la seva *Collecció*.

Una de les estratègies que s'adopten en la resolució de problemes és la de reduir la qüestió plantejada a una altra de la qual o bé coneixem la resolució, o bé podem sotmetre a un tractament amb el qual estem més familiaritzats. Segons Procle [v], comentador del primer llibre dels *Elements* d'Euclides,⁴ Hipòcrates [v aC] fou el primer geometa que va aplicar el mètode de reducció (*apagōgē*) a la investigació “d'enigmàtics diagrames”, és a dir, en paraules de Knorr,⁵ a complexos problemes de construcció. Efectivament, si seguim el relat que fa Eutoci [vi] en els comentaris a l'obra d'Arquimedes,⁶ trobem la carta que Eratòstenes [III aC] dirigí a Ptolemeu. En ella explica que Hipòcrates de Quios va “reduir” el problema de la duplicació del cub al d'inserir dues mitjanes proporcionals entre dos segments donats.

Una anàlisi d'aquesta qüestió permet conjecturar com podrien haver anat les coses. Tenint en compte que els cubs són figures semblants, se sabia que la relació entre els seus volums és igual al cub de la relació entre els seus costats. El cub de volum doble no sembla fàcil d'aconseguir, però el de volum òctuple sí. Només cal duplicar la longitud de l'aresta inicial. Llavors, si designem l'aresta inicial amb la lletra a , tenim dos cubs d'arestes i volums respectius,⁷

$$a, 2a \quad \text{i} \quad a^3, 8a^3.$$

Per aconseguir el cub de volum $2a^3$, interpolem geomètricament dos cubs de manera que s'obtenen cubs de volums i costats respectius,

$$a^3, 2a^3, 4a^3, 8a^3 \quad \text{i} \quad a, x, y, 2a,$$

en què x i y són desconeguts.

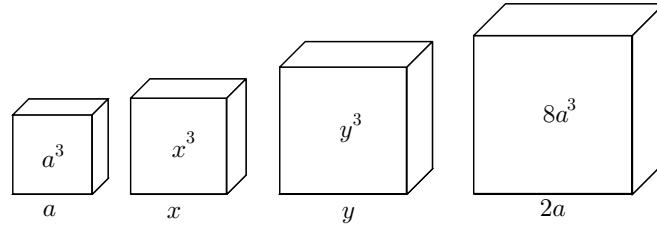
³Vegeu EECKE [1933], edició de 1982.

⁴Vegeu MORROW [1970], 167.

⁵Vegeu KNORR [1986], edició 1993, 23.

⁶Vegeu EECKE [1960], 609–615.

⁷Amb la finalitat d'abreujar l'exposició, utilitzem les notacions $a \cdot b$ i a^2 per indicar àrees, $a \cdot b \cdot c$ i a^3 per indicar volums, i $a + b$, $a - b$ per indicar que afegim o sostraiem, un segment, una àrea o un volum a un altre segment, àrea o volum respectivament.



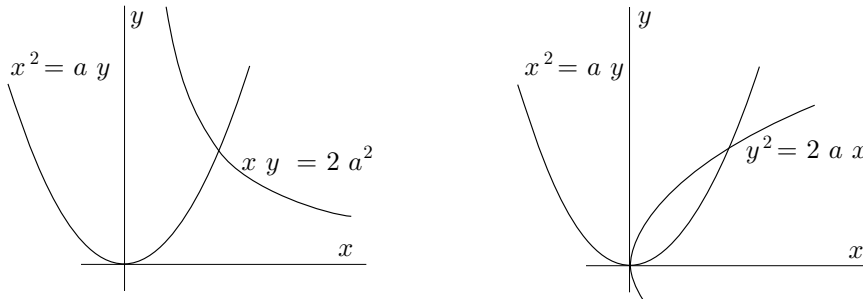
Per la relació entre els costats $a, x, y, 2a$ d'aquests cubs i els seus volums corresponents, obtenim

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \left(\frac{y}{2a}\right)^3 \implies \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Tot i que, a continuació, Eratòstenes sembla restar mèrit a Hipòcrates en aquesta troballa en afirmar que l'únic que aconseguix és convertir un trencaclosques en un altre, el cert és que aquest últim obra la porta a l'ús de la tècnica de l'aplicació d'àrees ben coneguda pels grecs del seu temps. Efectivament, el problema ha quedat reduït al de la recerca de dos segments x, y tals que el quadrat sobre x sigui igual al rectangle $a \cdot y$, i el quadrat sobre y sigui igual al rectangle $x \cdot 2a$; o bé, alternativament a una de les dues condicions anteriors, que el rectangle $x \cdot y$ sigui igual al rectangle $2a \cdot a$. En llenguatge algebraic actual es tracta de la resolució de:

$$\begin{cases} x^2 = a \cdot y \\ y^2 = 2a \cdot x \end{cases} \quad \text{o bé} \quad \begin{cases} x^2 = a \cdot y \\ x \cdot y = 2a^2. \end{cases}$$

Tornarem més endavant sobre aquest problema, perquè ara el que ens interessava era enfocar l'atenció sobre el significat de "reduir" una qüestió a una altra. El tractament que farem en el capítol 6 anirà dirigit a comprendre el camí seguit per arribar a la conclusió que el problema es pot reduir a la construcció de les interseccions de dues paràboles o d'una paràbola i una hipèrbola.



Alguns historiadors suggereixen que el mateix Hipòcrates hagués pogut introduir els mètodes indirectes de demostració, concretament una derivació particular

del mètode de reducció, la *reducció a l'absurd*.⁸ Citen un teorema que, segons l'historiador Eudem [IV aC], hauria fet servir per quadrar llunes i per a un intent de quadrar el cercle, el qual diu:

Segments semblants de cercles guarden la mateixa relació que els quadrats construïts sobre les seves bases.

La conjectura que es fa sobre la manera d'establir aquest resultat, és que, si Eudem té raó en afirmar que Hipòcrates en tenia una demostració, aquesta hagués pogut ser del tipus “aquesta relació és la mateixa que la dels dos quadrats o no ho és; si no ho és arribo a una contradicció i per tant ho ha de ser”. El motiu de la creença a favor d'aquesta afirmació, és que si realment hagués tingut una demostració, aquesta no s'hagués pogut basar en arguments que impliquessin la presència d'un infinit en acte (en aquest cas la inscripció d'un polígon amb un nombre infinit de costats), perquè els grecs, i més concretament els pitagòrics, no l'admetien.⁹ Llavors, l'argumentació hagués tingut que anar per la via indirecta; tanmateix no és gens clar que s'hagués arribat a nivells tan rigorosos en els mètodes de demostració.

Activitats 3.1

1. Considerem el problema de la duplicació del quadrat: Donat un quadrat \overline{E}_1 construir-ne un altra de superfície doble.

i) Reduïu-lo a un problema de construcció de mitjanes proporcionals. Inspireu-vos en la reducció feta en el problema de la duplicació del cub.

ii) Consulteu el diàleg Menó de Plató, 82B–85B, i esbrineu com resol aquest problema. Utilitzeu la construcció que proporciona per fabricar una visualització i una macro amb el CABRI, la qual donat un quadrat $ABCD$ i una semirecta Mr , proporioni un altre quadrat de superfície doble, amb un vèrtex situat en el punt M i un costat sobre la semirecta Mr .

S **iii)** Estudieu la construcció que proporciona Euclides en la proposició II.14

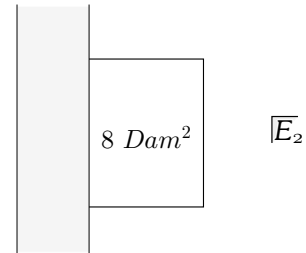
⁸Vegeu BOYER [1968], pàg. 99 de la edició espanyola de 1986.

⁹Per a una primera aproximació al problema consulteu la proposició XII.2 d'EUCLIDES [300 aC], per exemple a HEATH [1908] reedició del 1956, en què demostra que «els cercles són entre ells com els quadrats dels seus diàmetres». Veureu les dificultats que comporta en la demostració el prescindir del pas al límit. Primerament, per tractar les raons entre magnituds i resoldre el problema de la incommensurabilitat, Euclides ha tingut que crear en el llibre V una teoria de la proporció basada en un principi d'existència de raons i una definició de igualtat entre elles. Aquestes són utilitzades, més endavant en el llibre VI, per tractar la semblança de figures, i per demostrar la proposició XII.1 com a lema previ. En segon lloc, ha d'utilitzar un mètode de demostració, anomenat d'*exhaustió*, que li permet, mitjançant una doble reducció a l'absurd, establir l'equivalència entre figures i entre raons d'aquestes. Vegeu l'exposició de REY PASTOR-BABINI [1984], vol. 1, 64–66.

dels seus Elements, i utilitzeu-la per crear una visualització i una macro amb el CABRI per duplicar el quadrat que tingui els mateixos objectes inicials i finals que la de l'apartat anterior.

2. Feu successives reduccions del problema de construir un octàgon regular a partir d'un costat, que us permetin idear una construcció d'aquest polígon amb regla i compàs. Creeu una macro del CABRI que, donat un segment, construeixi un octàgon regular que el tingui per costat. S

3. Es vol tancar, amb tanca metàl·lica, un terreny rectangular de 8 Dam^2 de superfície, i de costats no determinats. Un dels costats limita amb un riu, de manera que el terreny es tancarà per tots els costats amb excepció d'aquest. Quina longitud tindrà la tanca si es pretén que sigui mínima?



i) Reduïu-lo primerament a un problema algebraic, i després a un problema geomètric de tangències entre una recta i una hipèrbola, (no utilitzeu el càlcul diferencial):

ii) Reduïu el problema de tangències a un d'algebraic i resoleu-lo.

iii) Generalitzeu l'estudi anterior a la resolució del problema següent:

Siguin a , b , K nombres positius. De tots els nombres x , y positius tals que el seu producte és K , trobeu aquells tals que l'expressió $ax + by$ té un valor mínim. Definiu una funció amb el DERIVE tal que introduint valors a les variables a , b , K proporcioni els valors de la solució x , y , i les funcions afí i de proporcionalitat inversa que els originen. Utilitzeu el resultat per fer una visualització gràfica del punt solució, la recta i la hipèrbola que l'originen. Feu una representació gràfica del problema amb el CABRI. B
S

4. Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ i $K > 0$. Repetiu un estudi semblant al de l'activitat anterior per cercar dos nombres $x, y > 0$ tals que la suma dels seus quadrats sigui K , i $ax + by$ sigui màxima. S

5. Reduïu a un problema sobre geometria del cercle la qüestió següent: S

El moviment d'un mòbil ve determinat per les equacions $v(t) = \sqrt{pt - t^2}$ i $s(0) = 0$, en què $v(t)$ i $s(t)$ són respectivament la seva velocitat i la seva posició en l'instant t . Calculeu $s(p)$.

□

També trobem entre els escrits dels antics grecs una altra manera d'examinar les qüestions. L'anomenem "raonament per hipòtesi", i el que fa és cercar una

hipòtesi que sigui útil per a l'establiment o el rebuig d'un enunciat. Això és el que trobem en el diàleg platònic del *Menó* 86E–87C:

Et demano, al menys, que la teva omnímoda autoritat em concedeixi d'examinar per hipòtesi si la virtut es pot ensenyar o no. I prenc aquestes paraules “per hipòtesi” en el sentit dels geòmetres quan se'ls pregunta, per exemple, sobre una àrea, si aquesta pot ser inscrita com un triangle en un cercle donat. La resposta del geòmetra podria ser: Encara no sé si aquesta és una superfície d'aquesta classe, però penso que puc suggerir una hipòtesi la qual serà d'utilitat per al nostre propòsit; em refereixo al que segueix. *Si l'àrea donada és tal que quan s'aplica a la línia donada sobre el cercle, és deficient per la d'una figura tal com la de la figura que és aplicada, llavors se seguirà un resultat, mentre que el resultat serà un altre si això és impossible. Així doncs per hipòtesi, puc dir-te el que passarà respecte la inscripció de la figura en el cercle, si el problema és possible o no.*

Desenredar el discurs de Plató no ha sigut simple per als historiadors, però sembla existir acord en què les parts del passatge més fosc, —el que hem escrit en cursiva—, es poden interpretar així:¹⁰

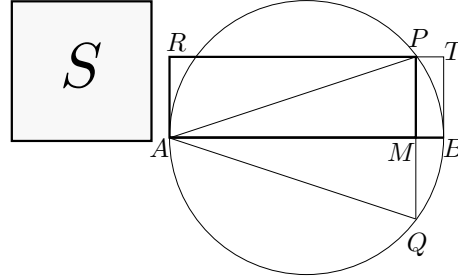
- Quan diu que l'àrea donada s'aplica a la línia, s'entén que s'aplica o construeix un rectangle sobre la línia.
- La línia donada sobre el cercle es refereix al seu diàmetre.
- Que l'àrea aplicada és deficient significa que el costat del rectangle que s'aplica no cobreix tot el diàmetre.
- Entenem per una figura “tal com” la que és aplicada, una figura “semblant a” l'aplicada. Es podria pensar que aquest “tal com” signifiqués igualtat, però això implicaria una restricció molt forta i només proporcionaria una condició suficient per a la construcció i de cap manera necessària.

Ara podem fer una anàlisi per tal d'esbrinar la veritat de la condició. No es perd generalitat si considerem isòsceles el triangle d'àrea S donada que volem inscriure.¹¹

¹⁰Consulteu HEATH [1921], edició de 1981, vol. I, 298–303, KNORR [1986], edició de 1993, 71–74.

¹¹Vegeu l'activitat 3.2.2

El triangle isòsceles APQ que es vol construir té la mateixa àrea que el rectangle $AMPR$ i, a més, en ser $PM^2 = AM \cdot MB$ —per estar P sobre la circumferència—, tenim que els rectangles $AMPR$ i $PMBT$ són semblants. Re-
 fent el camí enrere es comprova que la condició del *Menó* és necessària i suficient. Resumint:



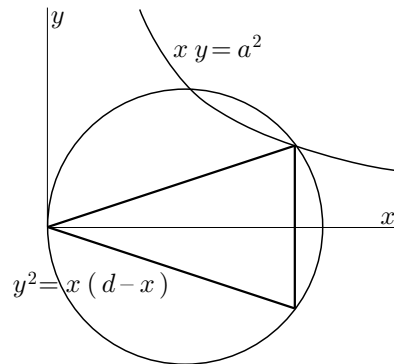
Si es pot aplicar un rectangle $AMPR$, d'àrea S , sobre el diàmetre AB de manera que la seva deficiència [el rectangle $PMBT$] sigui un rectangle semblant a $AMPR$, llavors P està sobre el cercle i considerant el seu simètric Q respecte al diàmetre AB , podrem construir el triangle isòsceles APQ d'àrea S .

De fet, el raonament per hipòtesi consisteix a reduir el problema a un altre i afirmar que el problema té solució si la hipòtesi proporcionada per la reducció és certa. En aquest problema concret del *Menó* es podria fer una recerca d'una hipòtesi més elemental en el sentit de no utilitzar el concepte d'aplicació d'àrees. Es pot comprovar que la inscripció és possible quan l'àrea és menor o igual que la del triangle equilàter inscrit en la circumferència.¹² El defecte d'aquesta condició és que no proporciona un camí per a la construcció efectiva del triangle; en canvi, la hipòtesi del *Menó* obra una via de construcció, a més, també, de proporcionar la condició esmentada del triangle equilàter.

Efectivament, utilitzem el llenguatge actual de l'àlgebra per simplificar les expressions. Sigui a^2 l'àrea que volem inscriure, i d el diàmetre de la circumferència. Hem de construir un rectangle $x \cdot y$ tal que

$$\begin{aligned} y^2 &= x \cdot (d - x) \\ xy &= a^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Aquest problema, actualment, està totalment comprès, i es pot interpretar que la solució ve donada per la intersecció d'una hipèrbola equilàtera i una circumferència.



En el temps de Plató la qüestió de trobar els segments x, y amb les condicions (3.1) era un repte total. Es creu que va ser Menecm (ca. 370 aC), pocs anys després de la redacció del *Menó*, un dels primers a idear el mètode de representar les condicions del tipus $xy = a^2$ pel mètode de construcció punt a punt, i

¹²Vegeu l'activitat 3.2

que així va introduir les corbes còniques. Aquestes haurien sigut relacionades amb les seccions del con posteriorment per ell mateix o algun altre geòmetra.¹³ D'aquesta manera, s'hagués pogut construir la solució reduint el problema al de la intersecció d'una circumferència i una corba traçada punt a punt. Aquesta construcció hagués sigut possible gràcies a la concatenació de dues reduccions, la de Plató i la de Menecm. Fem notar que aquesta construcció no es podia fer amb el traçat d'un nombre finit de línies usant exclusivament el regle i el compàs.

Per a nosaltres la reducció del problema podria anar més enllà gràcies als nostres coneixements algebraics. Caldria resoldre el sistema (3.1), la qual cosa ens permet afirmar que, —sense especificar-ne les eines—, la construcció és possible si

$$\frac{a^4}{x^2} = dx - x^2, \quad \text{és a dir} \quad x^4 - dx^3 + a^4 = 0,$$

té solució.¹⁴

Activitats 3.2

E₂ 1. Demostreu que el triangle d'àrea màxima que es pot inscriure en un cercle és el triangle equilàter, utilitzant resultats de geometria elemental del cercle i del triangle.

S 2. Justifiqueu, utilitzant intuïtivament el concepte de continuïtat, que si un triangle de superfície S es pot inscriure en un cercle, existeix un triangle isòscel d'igual superfície que també s'hi pot inscriure.

B 3. Examineu gràficament amb el DERIVE el polinomi $x^4 - dx^3 + a^4$ per a $d = 2$ i $d = 3$, i diferents valors de a per a cadascun d'aquests dos valors de la d . Examineu, també, els gràfics de $y^2 = x \cdot (d - x)$ i $xy = a^2$ conjuntament.

i) Conjectureu a partir d'aquest examen quina és l'altura x i l'àrea a^2 del triangle isòscel d'àrea màxima que es pot inscriure en la circumferència de diàmetre d i centre $(0, d/2)$. Comproveu si es correspon amb la del triangle equilàter inscrit en la circumferència. Finalment, comproveu si la vostra conjectura és bona utilitzant el càlcul diferencial.

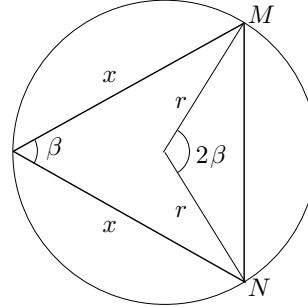
S **ii)** Feu una representació gràfica amb el DERIVE en què es visualitzi la solució del cas $d = 4$, $a = 2$, mitjançant el traçat de la circumferència, la hipèrbola i el triangle solució.

¹³Vegeu KNORR [1986] edició de 1993, 61–66, i la secció 6.4.

¹⁴Vegeu l'activitat 3.2.3.

4. Considereu que el triangle isòsceles d'àrea S que es vol inscriure en el cercle de radi r , té els costats iguals de longitud x i l'angle desigual d'amplitud β . Comproveu, utilitzant la trigonometria, i sense recórrer a l'equació de la circumferència, que la solució del problema es pot obtenir de l'equació:

$$x^8 - 4r^2x^6 + 16S^2r^4 = 0.$$



Examineu el polinomi de l'esquerra de l'equació anterior i deduiu-ne, mitjançant el càlcul diferencial, que el triangle inscriptible d'àrea màxima és l'equilàter i que el problema té solució sempre que

S

$$S \leq \frac{\sqrt{27}r^2}{4}.$$

5. Feu una representació dinàmica, amb el CABRI, de tots els triangles inscrits en una circumferència que tenen la mateixa àrea que un triangle isòsceles donat, inscrit en la circumferència.

S

6. Utilitzeu el CABRI per fer una representació dinàmica del problema de la inscripció del triangle isòsceles, d'àrea donada a^2 , en una circumferència, a partir de la intersecció d'aquesta amb la representació del lloc geomètric dels punts (x, y) tals que $xy = a^2$.

S

□

3.2 La concepció de l'anàlisi en Pappos

Pappos, l'exponent matemàtic més gran de l'última època de l'Escola d'Alexandria,¹⁵ visqué a finals del segle III i principis del IV. La *Col·lecció Matemàtica* és composta de vuit llibres, dels quals s'han perdut el primer i part del segon. La seva importància, a part de la presentació de l'anàlisi, rau en la informació

¹⁵Es fixa la desaparició de l'Escola amb la mort de la matemàtica Hipàtia l'any 415, filla del també matemàtic Teó d'Alexandria. A KATZ [1993], 157, trobem la següent descripció d'aquest tràgic final extreta de Gibbon, *The Decline and Fall of the Roman Empire*, 1952, cap. 47:

Alexandria, març, 415 dC: "Entre els cristians va córrer la veu que Hipàtia, la filla de Teó, era l'únic obstacle per a la reconciliació del prefecte [Orestes] i l'arquebisbe [Ciril]. Un dia fatídic, en l'estació sagrada de la Quaresma, Hypatia va ser arrabassada del seu carruatge, despullada, arrossegada a l'església, i salvatgement assassinada a mans de Pere el lector i una multitud de fanàtics salvatges i despietats. . . L'assassinat d'Hipatia va imprimir una taca inesborrable en el caràcter i la religió de Ciril d'Alexandria."

única que proporciona de moltes parts de la Història de la Matemàtica grega, i en què ofereix noves demostracions, extensions i aplicacions a nous problemes dels teoremes llegats pels antics matemàtics grecs, així com un gran nombre de noves proposicions.

En el llibre VII de la *Col·lecció*, anomenat també el “Tresor de l'Anàlisi”, presenta la seva concepció del mètode de l'anàlisi, i constitueix l'única font de documentació sobre algunes obres perdudes dels antics grecs que pertanyen al seu camp d'aplicació. Aquestes obres són segons Pappos: les *Mitjanes*, obra perduda d'Eratostenes; les *Dades* d'Euclides; la *Secció de la Raó* obra perduda d'Apol·loni de la qual existeix una traducció d'una versió àrab incompleta; les obres d'Apol·loni també perdudes, la *Secció d'Àrea*, la *Secció Determinada*, les *Inclinacions*, les *Tangències* i els *Llocs Plans*; les *Còniques* d'Apol·loni, de les quals ens falta el llibre vuitè; els *Porismes* i els *Llocs Superficials*, obres perdudes d'Euclides; i finalment, els *Llocs Sòlids*, obra perduda d'Aristeu el Vell.

En la introducció, Pappos explica al seu fill Hermodore la seva concepció de l'anàlisi i la síntesi grega.¹⁶ La interpretació estàndard de la descripció de Pappos és que l'anàlisi consisteix a suposar assolit el que es vol demostrar o construir, i treure'n conseqüències fins arribar a un principi acceptat o a un resultat establert anteriorment; o bé fins arribar a un resultat fals, la qual cosa implicaria que la proposició a demostrar és falsa o la construcció impossible. Llavors la síntesi consistiria a refer, a partir d'aquest punt, el camí recorregut per l'anàlisi, en ordre invers, fins a establir el teorema o construcció proposada.¹⁷ Aquesta interpretació tan lineal no és compartida per tots els estudiosos. Aquesta situació es veu afavorida pels pocs exemples d'aplicació del mètode que ens han arribat, els quals, a més, de vegades presenten algunes llacunes que ens fan dubtar que il·lustrin d'una manera precisa la definició de Pappos. Una mostra del que diem es pot trobar a la proposició 107 del llibre VII de la *Col·lecció*¹⁸ quan, en començar l'anàlisi, es considera una recta tangent BZ al cercle donat, sense que de la suposició de tenir el problema resolt s'en “dedueixi com a conseqüència” la consideració del punt Z.¹⁹ Per tot això, el camp d'interpretació del mètode roman obert als investigadors.²⁰ No és estrany, doncs, l'interès que va despertar a Europa, a partir del segle XV, l'estudi del seu significat i la reconstrucció de les obres perdudes dels grecs. Trobem, per exemple, François Viète [1540–1603] que intenta identificar l'anàlisi grega amb l'àlgebra, i més tard René Descartes

¹⁶Vegeu la secció 8.8.

¹⁷Notem que anàlisi ve del grec *análysis* —ανάλυσις—, paraula composta de *aná*, amunt, enrere, de nou, contra, —ens dóna una idea de desfer un camí fet en les seves parts—, i *lýsis*, dissolució. O sigui que seria la dissolució d'un conjunt en les seves parts.

¹⁸Vegeu la secció 8.8.3.

¹⁹A la secció 3.5 aprofundirem l'estudi d'aquesta situació concreta.

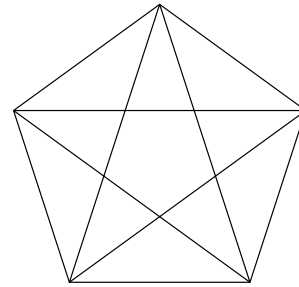
²⁰Podeu trobar diverses interpretacions i una aportació al tema, a BEHBOUD [1994].

[1596–1650] explica molt bé aquest interès a la *Regla IV* de DESCARTES [1628].²¹

L'exposició de Pappos —de la seva concepció de l'anàlisi— acaba remetent-nos a l'existència de dos tipus d'anàlisi, la *teorètica* i la *problemàtica*. La finalitat de la primera seria la d'establir la veritat d'una proposició, i la de la segona seria la de produir una construcció que se'ns demana.

3.3 Un exemple d'anàlisi “problemàtica”. La construcció del pentàgon regular

Tot i que en el VII llibre de la *Col·lecció Matemàtica* trobem alguns exemples d'anàlisi problemàtica, en farem una il·lustració amb una construcció més familiar i en la qual els primers pitagòrics tenien molt d'interès, la del pentàgon regular. Sembla ser que l'estrella de cinc puntes, formada per les seves diagonals, era l'emblema que els identificava,²² i és del tot segur que es van interessar en la seva construcció. Es poden fer anàlisis diverses d'aquesta construcció. Una que s'atribueix als primers pitagòrics, és la que porta a descobrir la relació entre els segments determinats per la intersecció de dues diagonals i la diagonal. A partir d'ella es pot aconseguir una construcció amb regla i compàs.²³ L'anàlisi que farem aquí està inspirat en el treball d'Hipòcrates de Quios, del qual ja hem parlat com a introductor del mètode de reducció. No sabem si va pertànyer a l'escola pitagòrica però va adoptar els seus conceptes i va escriure uns *Elements* de Geometria que no s'han conservat.²⁴ En tenim un fragment que Simplicí [VI]²⁵ va copiar d'una *Història de la Matemàtica* d'Eudem també perduda. Aquest fragment tracta de la quadratura de les llunes. Per primera vegada apareix una construcció feta mitjançant la tècnica de la *neusis*²⁶ en una de les quadratures, de la qual es pot obtenir un pentàgon regular.²⁷ Si consultem Pappos entendrem aquesta tècnica i la utilitzarem per elaborar una anàlisi de la construcció del pentàgon regular sota la guia del treball d'Hipòcrates. En la introducció del llibre VII de la *Col·lecció*, quan presenta els dos llibres de les *Inclinacions* d'Apol·loni, parla de la neusis en els següents termes:



²¹Vegeu la secció 8.3.1.

²²Vegeu GUZMÁN [1986], 16.

²³Vegeu l'activitat 3.3.2.

²⁴Vegeu BOYER [1968], edició espanyola 1986, 98.

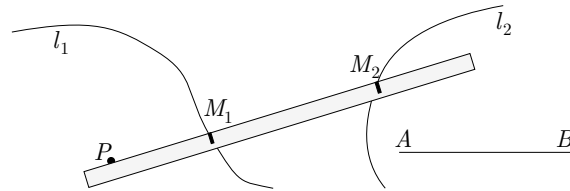
²⁵Vegeu HEATH [1921], vol. 1, 191–200.

²⁶En grec *νεῦσις*: inclinació, tendència.

²⁷KNORR [1986], 48, cita l'existència de defensors de la creació d'aquest mètode pels primers pitagòrics.

Es diu que una recta “s’inclina cap a”²⁸ un punt, quan prolongada arriba sobre aquest punt. Així doncs, com el problema general s’enuncia: donades dues línies en posició, posar en el seu interval una recta d’extensió donada que s’inclini cap a un punt donat, i com pel que fa a aquesta recta, ...

Si observem l’expressió remarcada podem entendre el significat de la pràctica de la neusis. Es tracta de situar un segment donat amb els seus extrems sobre dues línies donades, de manera que la recta que li fa de suport passi per un punt donat.



La seva aplicació material comporta —donades dues línies l_1 , l_2 , un segment AB i un punt P — practicar dues marques M_1 , M_2 en un regle, tals que $M_1M_2 = AB$, i fer coincidir respectivament cadascuna d’elles sobre l_1 i l_2 , fent lliscar el regle pel punt P .

Una primera aproximació al problema de la construcció d’un pentàgon regular $ABCDE$ ens permet veure que es pot reduir al de la construcció d’un triangle ABC tal que $AB = BC$ i $\widehat{ABC} = 3 \cdot \widehat{BAC}$.²⁹

Fixarem el nostre objectiu en l’anàlisi i la síntesi de la construcció del triangle ABC . Per assolir-ho utilitzarem les proposicions següents dels *Elements* d’Euclides:

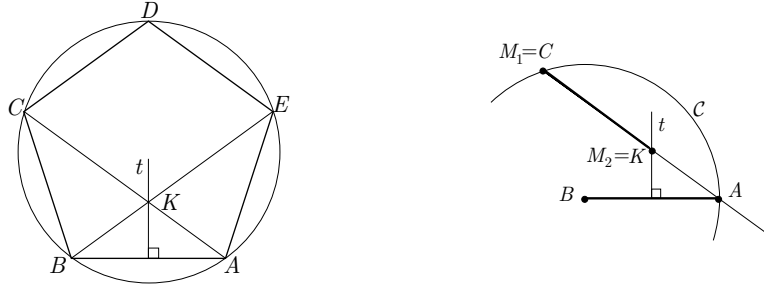
I.5: En un triangle, s’oposen angles iguals a costats iguals.

I.6: En un triangle s’oposen costats iguals a angles iguals.

I.32: L’angle exterior a un triangle és igual a la suma dels dos angles interns oposats.

²⁸En grec *νεύειν*: inclinar-se cap a.

²⁹Vegeu l’activitat 3.3.1

**Anàlisi:**

- (1) Suposem ABC construït en les condicions donades.
- (2) Tracem la mediatriu t del segment AB i considerem el punt $K = t \cap AC$. Obtenim $\widehat{KBA} = \widehat{BAC}$ per I.5.³⁰
- (3) Llavors per (1), (2) i I.32 tenim:

$$\begin{aligned}\widehat{CBK} &= \widehat{ABC} - \widehat{KBA} = \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 3 \cdot \widehat{BAC} - \widehat{BAC} = \\ &= 2 \cdot \widehat{BAC} \\ \widehat{CKB} &= \widehat{KBA} + \widehat{BAC} = 2 \cdot \widehat{BAC}.\end{aligned}$$

- (4) O sigui que, $\widehat{CBK} = \widehat{CKB}$.
- (5) Finalment per I.6, $AB = BC = CK$.

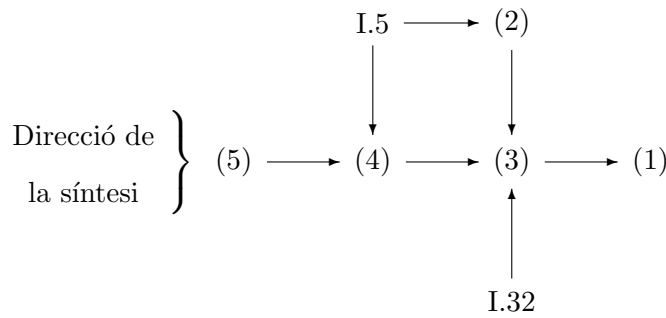
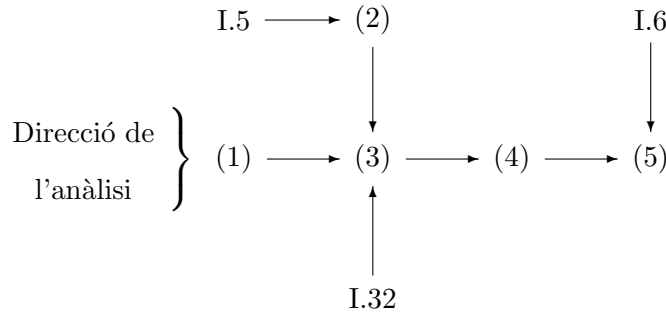
Síntesi: Construïm la circumferència \mathcal{C} de centre B i radi BA , la mediatriu t de AB , i practiquem la neusis amb el segment M_1M_2 de longitud AB que s'inclina cap a A entre t i \mathcal{C} . En resulten el punt K sobre la mediatriu i el punt C sobre la circumferència. El punt C és el tercer vèrtex del triangle que es vol construir.

Efectivament, per la construcció feta tenim $CK = BC = AB$, la qual cosa, per I.5, implica $\widehat{CBK} = \widehat{CKB}$. Com que, per I.5, $\widehat{KBA} = \widehat{BAC}$, llavors per I.32, $\widehat{CKB} = 2 \cdot \widehat{BAC}$, i per tant $\widehat{CBK} = 2 \cdot \widehat{BAC}$. Finalment,

$$\widehat{CBA} = \widehat{CBK} + \widehat{KBA} = 2 \cdot \widehat{BAC} + \widehat{BAC} = 3 \cdot \widehat{BAC}.$$

La marxa de l'anàlisi i de la síntesi queda esquematitzada en els diagrames següents:

³⁰Si considerem l'anàlisi des de la perspectiva del pentàgon regular, potser hagués sigut més natural traçar l'angle \widehat{ABE} construït sobre BA amb el vèrtex a B , el costat del qual coincideix amb la diagonal BE .



Activitats 3.3

\overline{B} 1. Construcció del pentàgon regular a partir del costat, via neusis.

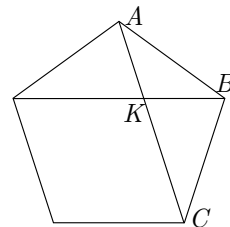
\overline{S} i) Demostreu que es pot reduir al de construir un triangle ABC tal que $AB = BC$ i $\widehat{ABC} = 3 \cdot \widehat{BAC}$.

ii) Construïu amb el CABRI el pentàgon, amb la neusis indicada.

\overline{E}_2 2. Considereu un pentàgon regular com el de la figura adjunta:

i) Demostreu, utilitzant semblances, que si K és el punt d'intersecció de la diagonal AC amb una altra diagonal, llavors

$$\frac{AK}{KC} = \frac{KC}{AC}. \tag{3.2}$$



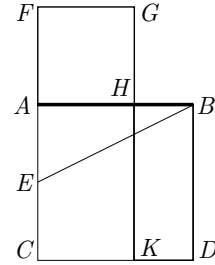
ii) En la proposició II.11 dels Elements d'Euclides, trobem demostrada en forma sintètica,³¹ la divisió d'un segment AC per un punt K tal que es compleix

³¹Vegeu la secció 8.4.3.

la relació de proporcionalitat (3.2).³² Feu una construcció del pentàgon regular, conegut un costat, utilitzant el regle sense marques i el compàs, i fent servir la construcció d'aquesta proposició.

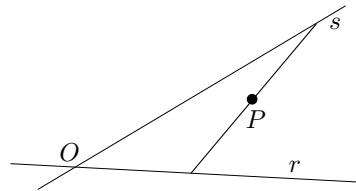
Indicació: Es pot començar fent la construcció d'un pentàgon regular qualsevol, i després construir el pentàgon demanat, utilitzant la semblança.

iii) Observeu el gràfic que il·lustra la proposició II.11, i deduiu del resultat de la proposició que $FC \cdot FA = AC^2$. Utilitzeu aquest fet per simplificar la construcció de l'apartat anterior, i elaborar una macro amb el CABRI que a partir d'un segment com a objecte inicial retorni un pentàgon regular que el tingui per costat.



S

3. Siguin dues semirectes r , s de mateix origen O i un punt P interior a l'angle que determinen. Construïu un segment que tingui P de punt mitjà, i amb un extrem a cadascuna de les semirectes. Partireu de dues anàlisis diferents i fabricareu una macro de cada construcció amb el CABRI:



i) La primera considerarà, un cop suposada feta la construcció, la recta paral·lela a r que passa pel punt P .

S

ii) La segona considerarà la circumferència de centre P i radi PO .

□

3.4 Un exemple d'anàlisi “teorètica”. La propietat dels punts de la recta polar d'un punt respecte d'una circumferència.

Farem l'anàlisi d'una proposició important per les seves implicacions en el desenvolupament de la geometria projectiva que s'inicia amb el *Brouillon project* de DESARGUES [1639]. Es tracta de la proposició VII.154 de la *Col·lecció Matemàtica* la qual estableix la propietat dels punts de la recta polar d'un punt respecte d'una circumferència.³³ Podem enunciar la proposició així:

³²Euclides anomenà, en la proposició VI.30 del *Elements*, «divisió en extrema i mitjana raó», aquesta divisió. Més tard, Luca Paccioli, li va de dedicar el tractat *Divina Proportione* (vegeu PACIOLI [1509]), i la va anomenar «divina proporció». Posteriorment se li donà el nom de «secció àuria» del segment. En el capítol 1, en què tractàvem l'àlgebra geomètrica dels *Elements*, proposàvem una anàlisi d'aquesta proposició que mirava d'aclarir el punt més fosc de la demostració d'Euclides, la consideració, —com a punt de partida de la construcció—, del punt mitjà del costat del quadrat construït sobre el segment sencer.

³³La proposició III.37 de les *Còniques* d'Apol·loni estableix la versió per a seccions còniques.

Siguin una circumferència \mathcal{C} , un punt exterior P , els punts de tangència S i T de la circumferència i les seves rectes tangents des de P , i una recta r per P que és secant a la circumferència. Demostrarem que si $M = r \cap ST$, llavors

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{PA}{PA'}. \quad (3.3)$$

Assolirem l'objectiu utilitzant les proposicions dels *Elements* d'Euclides següents:³⁴

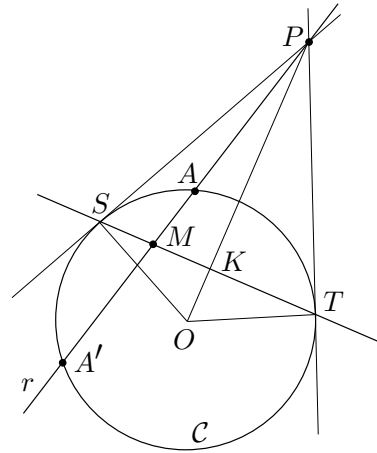
I.47: Teorema de Pitàgores.

II.1*: Distributivitat del producte respecte de la suma.

II.5*: Diferència de quadrats com a producte d'una suma per una diferència.

III.35: $MS \cdot MT = MA \cdot MA'$, en la figura adjunta.

III.36: $PA \cdot PA' = PS^2$, en la figura adjunta.



Anàlisi: Suposem que la igualtat (3.3), equivalent a $MA \cdot PA' = MA' \cdot PA$, és certa. Llavors per II.1*:

$$\begin{aligned} MA \cdot PA' &= MA' \cdot PA \implies MA \cdot (PM + MA') = \\ &= MA' \cdot (PM - MA) \implies \\ \implies MA' \cdot PM - MA' \cdot MA - MA \cdot PM &= MA \cdot MA'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En ser $PA = PM - MA$ i $PA' = PM + MA'$, l'expressió de l'esquerra de la igualtat (3.4) suggereix la recerca d'alguna relació amb $PA \cdot PA'$, és a dir, segons III.36, amb PS^2 . Observem, per II.1* que:

$$\begin{aligned} PS^2 &= PA \cdot PA' = (PM - MA) \cdot (PM + MA') = \\ &= PM^2 + PM \cdot MA' - MA \cdot PM - MA \cdot MA' \end{aligned} \quad (3.5)$$

Llavors, si seguim amb l'anàlisi, de les igualtats (3.4) i (3.5) obtenim

$$PS^2 - PM^2 = MA \cdot MA'. \quad (3.6)$$

I aplicant III.35, arribem a la igualtat

$$PS^2 - PM^2 = MS \cdot MT. \quad (3.7)$$

³⁴Hem indicat amb un (*) les proposicions de les quals utilitzem una conseqüència immediata.

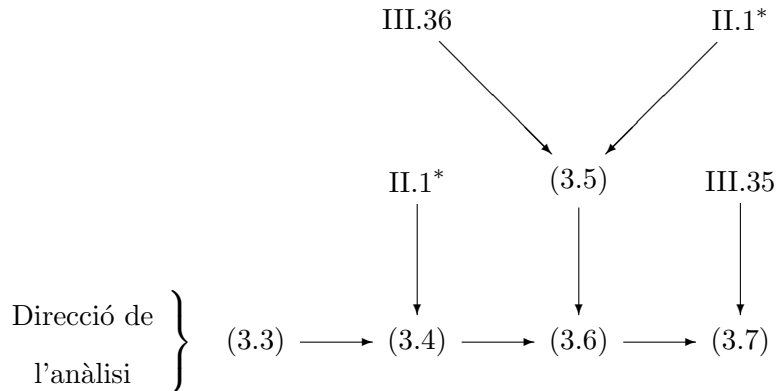
Aquesta és certa, i l'anàlisi és acabada, com es veu si expressem els segments MS i MT en funció de ST i MK , amb la finalitat de poder aplicar II.5* i, tot seguit, el teorema de Pitàgores als triangles PKM i PKS . Efectivament,

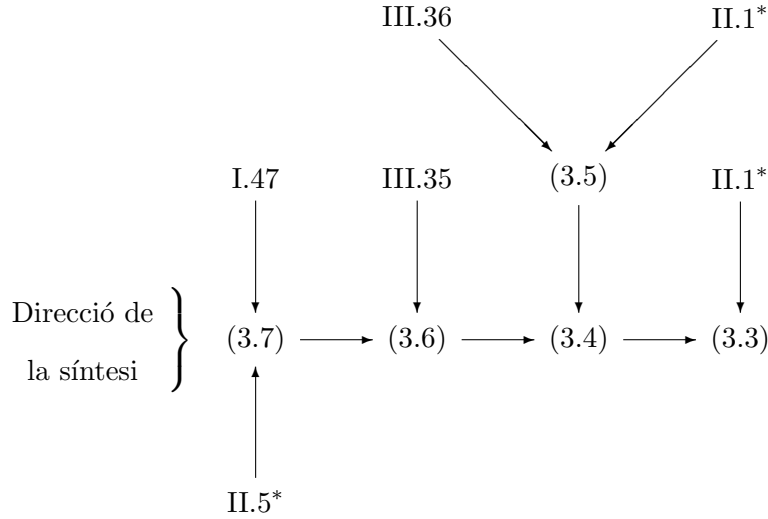
$$\begin{aligned} MS \cdot MT &= \left(\frac{1}{2}ST - MK\right)\left(\frac{1}{2}ST + MK\right) = \left(\frac{1}{2}ST\right)^2 - MK^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}ST\right)^2 - (PM^2 - PK^2) = \\ &= PS^2 - PK^2 - PM^2 + PK^2 = PS^2 - PM^2 \end{aligned}$$

Síntesi: És fàcil construir-la refent el camí.

$$\begin{aligned} PS^2 - PM^2 = MS \cdot MT &\implies PS^2 - PM^2 = MA \cdot MA' \implies \\ &\implies PM \cdot MA' - MA \cdot PM - MA \cdot MA' = MA \cdot MA' \implies \\ &\implies MA' \cdot PM - MA' \cdot MA = MA \cdot PM + MA \cdot MA' \implies \\ &\implies MA' \cdot (PM - MA) = MA \cdot (PM + MA') \implies \\ &\implies MA' \cdot PA = MA \cdot PA'. \end{aligned}$$

En els diagrames següents hem resumit la marxa de l'anàlisi i de la síntesi:

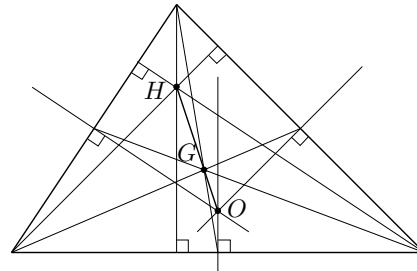




Activitats 3.4

1. El matemàtic suís Leonhard Euler [1707–1783] va fer un descobriment que demostrà amb l'ajut de la geometria de coordenades,³⁵ i que de manera sorprenent no es troba entre els geomètres grecs. La proposició diu:

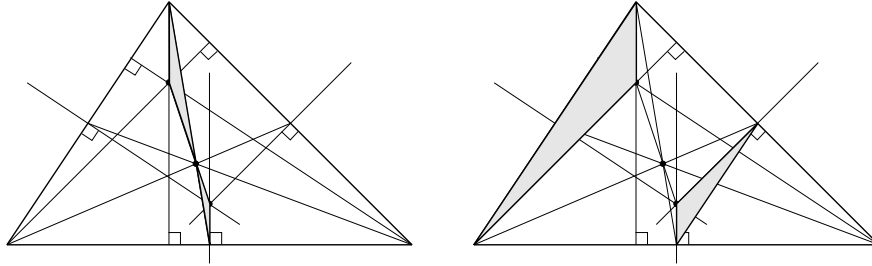
El ortocentre H , el baricentre G , i el circumcentre O , d'un triangle qualsevol es troben sempre en línia recta, de manera que G pertany al segment HO , i $GH = 2 \cdot GO$.



En honor del seu descobridor aquesta recta rep el nom de recta d'Euler.

- i) Feu una anàlisi utilitzant la semblança de triangles. És interessant considerar les parelles de triangles remarcades en les figures adjuntes.

³⁵Vegeu EULER [1911–] I.26, 139–157, i també DUNHAM [1999], 133–141.



ii) *Fabriqueu una macro del CABRI que tingui com a objecte inicial un triangle i com a objectes finals la recta d'Euler i els tres punts H , G i O que la determinen.*

S

□

3.5 L'anàlisi geomètrica com a eina generadora de noves hipòtesis i problemes

El mètode de l'anàlisi a més de proporcionar mitjans per aconseguir una prova o construcció d'una hipòtesi donada, es presenta com un mètode molt potent per generar noves hipòtesis i nous problemes.³⁶ Ali Behboud defensa aquesta interpretació a partir d'un problema tret de l'obra desapareguda d'Apol·loni sobre les *Tangències*:

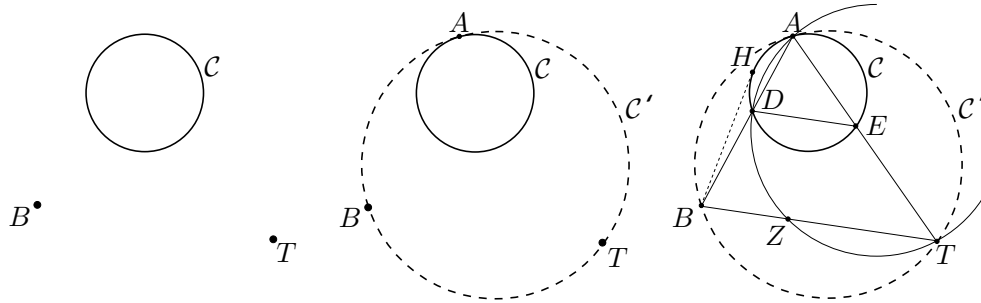
Donats un cercle \mathcal{C} i dos punts B i T en posició, construir un cercle \mathcal{C}' que passi per B i T , i sigui tangent a \mathcal{C} .

A partir de les proposicions 106 i 107 del llibre VII de la *Collecció Matemàtica*,³⁷ que Pappos proporciona com a lemes auxiliars per a la solució d'Apol·loni, es pot conjeturar com hagués pogut ser l'anàlisi feta per aquest últim, —se suposen els punts exteriors al cercle—.

Suposem que el cercle \mathcal{C}' ha sigut construït, i que A és el punt de tangència. Considerem el segment DE determinat per les interseccions de BA i TA amb \mathcal{C} . Podríem contemplar la possibilitat que DE i BT fossin paral·lels; això obriria una via envers la construcció de \mathcal{C}' mitjançant l'anàlisi de la posició de D i la seva construcció, seguida de la d' A com a intersecció de la prolongació de BD amb \mathcal{C} .

³⁶Ho podem veure a BEHBOUD [1994], KNORR [1986] i MAHONEY [1968].

³⁷Vegeu les seccions 8.8.2 i 8.8.3.



Efectivament, d'una manera esquemàtica que es completarà a l'activitat 3.5 observem que D ve determinat per la intersecció del cercle ADT i el cercle C . Aquest cercle talla BT en un punt Z ,³⁸ el qual compleix $\widehat{TZD} + \widehat{DAT} = 180^\circ$. A més, $\widehat{TZD} + \widehat{BZD} = 180^\circ$ i, pel paral·lelisme de DE i BT que hem suposat, $\widehat{BZD} = \widehat{ZDE}$. Consegüentment $\widehat{ZDE} = \widehat{DAT}$ i, per tant, ZD és tangent al cercle C ³⁹ —la qual cosa permetrà la construcció de D si aconseguim construir Z . Fem l'anàlisi de la situació del punt Z i observem que $BZ \cdot BT = BD \cdot BA = BH^2$, en què BH és tangent a C i $H \in C$. Això permet la construcció consecutiva de Z , D , A i, finalment, C' .

Com es pot observar s'han generat una hipòtesi i un problema nous:

- Hipòtesi: El paral·lelisme de DE i BT , la qual és establerta per la Proposició 106 de la *Col·lecció*.
- Problema: La construcció del punt D , la qual s'assoleix en la Proposició 107 en què Pappos procedeix per la via de l'anàlisi geomètrica.

Activitats 3.5

B 1. Considereu el problema d'Àpol·loni enunciat en aquesta secció, i l'anàlisi que n'hem fet.

i) Demostreu la nova hipòtesi que ha generat.

ii) Justifiqueu les tres afirmacions següents fetes en la secció 3.5

- $\widehat{TZD} + \widehat{DAT} = 180^\circ$.
- ZD és tangent al cercle C .
- $BZ \cdot BT = BD \cdot BA = BH^2$.

iii) Feu la síntesi de la construcció del cercle C' .

S iv) Construïu C' amb regla i compàs, mitjançant els punts Z , D i A . Feu, també,

³⁸Només analitzem el cas en què Z és interior a BT .

³⁹Quan Z es troba a la dreta de T , el raonament és una mica diferent però ZD també és tangent al cercle

la construcció amb el CABRI i una macro que a partir dels dos punts inicials i la circumferència, proporcioni la circumferència pels dos punts i tangent a la inicial, com a objecte final.

2. Repetiu l'estudi per al cas en què els punts són interiors al cercle.

S

□

3.6 Els “diorismós” o determinacions

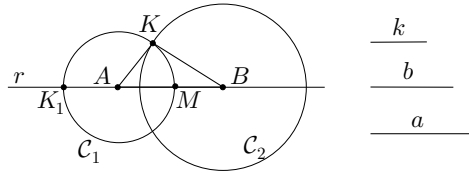
Hem dit que l'anàlisi es dirigia a trobar una proposició coneguda com a verdadera o bé una de falsa, a partir de la suposició que la qüestió estava resolta. Per a que el mapa de la direcció de l'anàlisi sigui complet falta considerar el cas en què aquesta pot conduir-nos a una proposició de la qual cal establir condicions de validesa; o bé, si ens condueix a una proposició verdadera, en quins casos és reversible el procés. Això connecta directament amb el tipus de raonament per hipòtesi que hem exposat a la secció 3.1 amb el segon exemple del *Menó* de Plató, el qual cercava una hipòtesi útil per a l'establiment o rebuig d'una proposició. Els grecs anomenaven “diorismós”⁴⁰ el criteri que determinava les condicions en què era possible fer una demostració o construcció. Pappos utilitza aquest terme en la introducció del llibre VII de la *Col·lecció* després d'haver exposat la seva concepció de l'anàlisi i d'haver presentat els llibres que, segons ell, pertanyien al seu domini:

S'obtenen així trenta-tres llibres, la matèria dels quals presento al teu examen; resums fins les Còniques d'Apol·loni; llocs, *determinacions*, i casos per cada llibre; i, a més, els lemes han estat buscats de manera que crec no haver deixat de costat cap informació en el decurs del seu tractament.

Podem trobar bastants exemples de “diorismós” en les obres clàssiques. Un dels primers amb el qual ens topem, el trobem quan comencem a llegir els *Elements* d'Euclides, a la proposició I.22. Allí es proposa la construcció d'un triangle coneguda l'extensió dels seus costats. A continuació Euclides explicita la condició de validesa de la construcció dient, «consegüentment és necessari que dues de les línies agafades juntes de qualsevol manera, siguin més grans que l'altra que queda». Aquesta condició l'ha obtingut en la proposició I.20. Fem una anàlisi per desvetllar com apareix la necessitat d'establir una condició com aquesta.

Anàlisi: Suposem el triangle ABK construït, amb costats d'extensions $a = AB$, $b = BK$ i $k = KA$ donades. Llavors podem traçar les circumferències \mathcal{C}_1 i \mathcal{C}_2 de centres A i B , i radis AK i BK respectivament, les quals són conegudes.

⁴⁰En grec *διορισμός*. Traduït per “determinacions” a EECKE [1932], II, 479.



Síntesi (1a. part): Construïm el segment AB d'extensió a i les circumferències \mathcal{C}_1 i \mathcal{C}_2 de centres A i B , i radis d'extensió b i k .

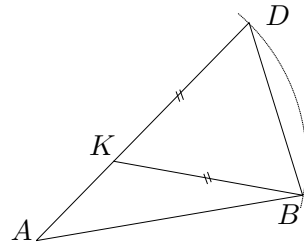
Hem arribat al punt clau en què per aconseguir la reversibilitat del procés cal establir el “diorismós” que ens permeti assegurar l'existència de $K = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ exterior al segment AB .

Diorismós: Una condició per a l'existència de $K = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ seria la de l'existència d'una parella de punts de \mathcal{C}_1 , un exterior a \mathcal{C}_2 i l'altre interior.⁴¹

Euclides no proposa aquesta condició sinó una altra la qual, en contra d'allò que es podria esperar, no utilitza explícitament en l'elaboració de la demostració de I.22, on deixa l'existència de K sense justificar. Una anàlisi basada en l'acceptació de l'existència de K ,⁴² permetrà arribar al “diorismós” d'Euclides. Efectivament:

Si K existeix, podem portar l'extensió $AK + KB$ sobre la recta suport de AK , a partir de A , per tal de comparar-la amb l'extensió de AB . Obtenim el segment

$$AD = AK + KD = AK + KB.$$



Considerem els triangles ADB i KDB , aquest últim isòsceles, llavors —per I.5— $\widehat{ADB} = \widehat{DBK} < \widehat{DBA}$.

Segons la proposició I.19, en qualsevol triangle l'angle major és subtendit pel costat major i, per tant,

$$AB < AD = AK + KB.$$

⁴¹Treballem sota la perspectiva de la presència d'algun axioma de continuïtat no explicitat per Euclides, però implícit en les seves demostracions com ara bé la I.1 dels *Elements*. Aquest podria ser del tipus:

– Si tenim un pla separat en dues regions per una circumferència, i una altra circumferència té punts de les dues regions, llavors les dues circumferències tenen algun punt en comú, exterior a la recta dels centres.

O algun de tipus més general del qual es pogués deduir l'anterior com un teorema:

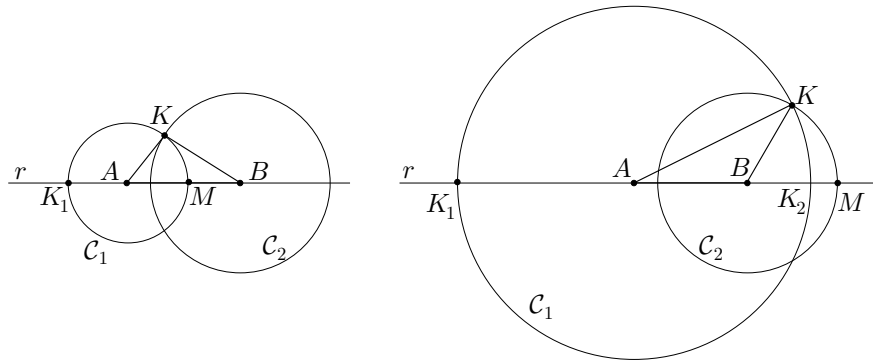
– Si tenim un pla separat en dues regions per una línia recta o una circumferència, i una altra línia recta o circumferència té punts de les dues regions, llavors les dues línies tenen algun punt en comú.

⁴²Aquesta anàlisi coincidirà amb l'argumentació de la proposició I.20

De la mateixa manera es pot veure que $BK < BA + AK$ i $AK < AB + BK$. Aquestes tres condicions constitueixen el “diorismós” d’Euclides.

Síntesi (segona part): Amb la condició trobada farem el que Euclides deixa sense explicitar a la seva demostració, establir l’existència del punt $K = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ mitjançant la prova de l’existència de dos punts de \mathcal{C}_1 , un exterior i un altre interior a \mathcal{C}_2 , per la qual cosa seguirem l’argumentació de Heath.⁴³

Sigui r la recta suport del segment AB , les interseccions K_1, M de r amb \mathcal{C}_1 , tal com es veu a la figura:



– El punt $K_1 \in \mathcal{C}_1$ és exterior a \mathcal{C}_2 perquè:

$$BK_1 = BA + AK_1 = BA + AK > BK \implies K_1 \text{ és exterior a } \mathcal{C}_2.$$

– El punt $M \in \mathcal{C}_1$ és interior a \mathcal{C}_2 perquè poden passar dues coses:

a) M està entre A i B :

$$\begin{aligned} BM + MA = BA < BK + KA = BK + MA &\implies BM < MK \implies \\ \implies M \text{ és interior a } \mathcal{C}_2. \end{aligned}$$

b) M està en la semirecta d’origen B que no conté A :

$$MB + BA = KA < KB + BA \implies MB < KB \implies M \text{ és interior a } \mathcal{C}_2.$$

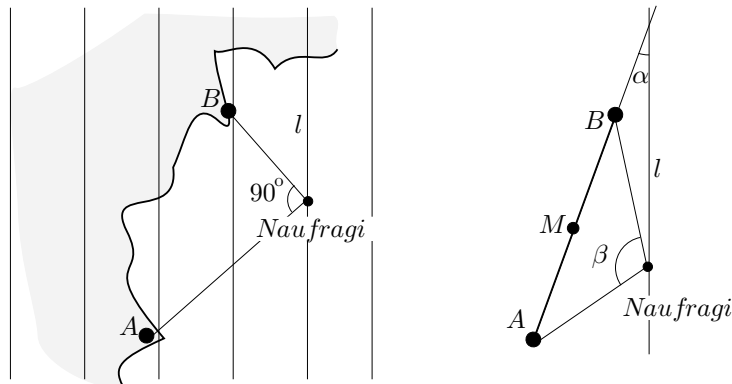
Consegüentment, de l’existència d’aquest dos punts i per la continuïtat acceptada implícitament obtenim l’existència de K .

El pas final de la síntesi, el qual consisteix a demostrar que el triangle ABK , —construït amb el segment AB d’extensió a , i les circumferències \mathcal{C}_1 i \mathcal{C}_2 de radi d’extensió b i k —, és el que ens demanaven, és immediata, i és el que fa Euclides a I.22.

⁴³Vegeu HEATH [1908], reedició de 1956, vol. I, 294

Activitats 3.6

- E₁** 1. Us trobeu navegant a la recerca d'un vaixell enfonsat a prop de la costa. Disposeu del diari que va escriure un supervivent, en el qual explica en quin meridià l es trobava en el moment del naufragi, i que dos punts A i B destacats de la costa es veien sota un angle de 90° . Teniu la carta nàutica amb indicació de la posició dels punts A i B i el meridià l , un regle i un compàs. Seguiu els passos següents per localitzar el punt del naufragi:⁴⁴



i) Inicieu l'anàlisi del problema buscant un punt qualsevol des del qual es vegi la costa AB sota un angle de 90° . A partir d'aquí trobeu el lloc geomètric de tots els altres punts amb aquesta propietat.⁴⁵

S ii) Feu la construcció de la solució i doneu el "diorismós" que estableix la condició de la seva validesa a partir de la posició relativa del lloc geomètric trobat i el meridià conegut.

iii) Repetiu l'estudi anterior si l'angle sota el que es veu AB és de 60° .

E₂ 2. Doneu una condició d'existència de solució del cas de 60° —amb ajut de la trigonometria— a partir de la distància d del punt mitjà M de AB a la recta l , l'angle α que formen el meridià l i la recta suport de AB , i la longitud $a = AB$.

S 3. Repetiu l'estudi per a qualsevol angle β sota el que es veu AB . Feu-ne una representació amb el CABRI en què els angles β i α , i el segment AB siguin variables. Feu un programa amb el DERIVE, el qual proporcioni funcions tals que a partir dels valors de a , $d = d(M, l)$, α i β , informin de l'existència de solució, permetin visualitzar el segment AB , juntament amb el lloc geomètric format pels

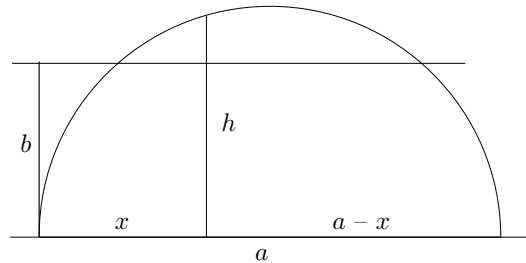
⁴⁴ Adoptem la hipòtesi que, en ser petita l'àrea de la zona implicada en la recerca, la superfície és plana.

⁴⁵ Recordeu les propietats associades a l'arc capaç d'un angle sobre un segment. Es fa una anàlisi detallada d'aquest tema a la secció 2.6 dedicada al llibre III dels *Elements* d'Euclides.

dos arcs de cercle i la recta “meridià”, i permetin localitzar les coordenades dels punts solució si situem el segment AB sobre l'eix OY i centrat a l'origen.

4. Un rectangle té un perímetre d'extensió $2a$ i una àrea igual a b^2 . \overline{E}_2

i) Construïu-lo fent una anàlisi inspirada en la figura adjunta, i utilitzant com una dada el teorema II.14 dels Elements d'Euclides.⁴⁶



ii) Doneu el “diorismós” que proporciona la condició per a la construcció de la solució.

iii) Escriviu la forma general de l'equació algebraica que us permet solucionar la construcció anterior.

iv) Elaboreu la construcció amb el CABRI de la solució anterior, basada en la figura, de manera que: \boxed{S}

- Els segments d'extensió a i b , siguin paràmetres variables.
- Quan el problema tingui solució aparegui, a més del segment solució, el seu valor numèric.
- Quan el problema no tingui solució aparegui un missatge que ho anunciï.

□

3.7 Valor heurístic de l'anàlisi geomètrica

D'uns anys ençà s'han aixecat moltes veus sobre el paper preponderant de la resolució de problemes en el procés d'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques i, consegüentment, de totes les tècniques associades a la recerca, la invenció i el descobriment.⁴⁷ Tanmateix, quan busquem entre la infinitat de pàgines dedicades a la geometria en els textos d'ensenyament secundari, difícilment hi trobem alguna línia dedicada a l'anàlisi geomètrica. Hem iniciat el capítol citant Pólya, i tornem a citar-lo per cloure'l. Ell és l'autor del paràgraf següent en què fa un toc d'atenció entorn el binomi anàlisi-síntesi:⁴⁸

⁴⁶Vegeu la secció 8.4.4.

⁴⁷Un exemple d'estudi extens i profund, enfocat a detectar les dificultats de l'aprenentatge i a elaborar una proposta d'intervenció didàctica centrada en un ambient de resolució de problemes, el trobem a VILA [1997].

⁴⁸Vegeu PÓLYA [1945], edició de 1994, 137–138.

Molts textos de geometria elemental contenen algunes observacions sobre l'anàlisi i la síntesi, i sobre el fet de considerar el problema com a resolt. No hi ha dubte que aquesta tradició, sòlidament implementada es remunta a Pappos, malgrat que cap dels textos en qüestió es refereixi a aquest filòsof. El tema és bastant important com per ser esmentat fins i tot en textos elementals, però amb el risc de ser mal interpretat. El sol fet que estigui limitat als textos de geometria demostra una evident falta de comprensió.

De la lectura d'aquest text extraïem que, tot i l'interès actual en la innovació dels mètodes i tècniques del procés d'ensenyament/aprenentatge a les aules, la situació sembla no haver millorat, fins i tot gosaríem dir que ha empitjorat si creiem important la utilització dels textos com a eina de treball, —si més no, des que Pólya escrivia «molts textos de geometria elemental contenen algunes observacions sobre l'anàlisi i la síntesi». De totes maneres, podria ser pitjor si, segons diu, això no representés cap avantatge davant la falta de comprensió sobre la seva importància heurística en un terreny més general que, en el nostre cas, abraçaria com a mínim tot el camp de les matemàtiques.

Creiem doncs important d'insistir en el valor heurístic general d'aquesta matèria, a partir dels aspectes que hem intentat delinear de manera breu en el terreny de la geometria grega. Considerem que una primera aproximació d'aquests valors es pot resumir en els punts següents:

- Com a eina de descobriment/invenció en la recerca de solucions dels problemes de la geometria.
- Com a eina per a l'establiment de la veritat d'aquelles proposicions geomètriques, les quals conjecturem a partir d'intuïcions obtingudes de l'activació dels recursos proporcionats, en paraules de Miguel de Guzmán,⁴⁹ per l'enteniment, la imaginació, els sentits i la memòria.
- Com a eina capaç de generar unes hipòtesis i problemes que amplien el camp de l'estudi de la geometria.
- I, finalment, fent successives abstraccions del camp de la geometria i de la matemàtica, com a eina útil en qualsevol camp tractable des del punt de vista racional.

⁴⁹Vegeu GUZMÁN [1991], 53.

Capítol 4

Aritmètica

Quan vam donar els primers passos en la nostra formació acadèmica, i també en el dia d'avui en molts contextos, la paraula *Aritmètica* s'associava a les tècniques de numeració i de càlcul amb nombres, i a les seves aplicacions. Així, s'hi consultem algun manual de la primera meitat del segle XX, dels que es troben en els llibreters de vell, i examinem els seus continguts, observem que les seves seccions es dediquen a les qüestions esmentades. Citem un parell d'exemples:

- En el “*Manual de aritmética y geometría*. Primer Grado. Instituto de España. Santander, 1939”, trobem seccions dedicades a l'operació de comptar, a la numeració, a les regles de l'addició, subtracció, multiplicació i divisió, a les proves d'aquestes regles, etc., i exercicis i problemes d'aplicació.
- A “E. BARDLEY: *Problemas de aritmética y álgebra*. Labor. Barcelona, 1936”, trobem, a més, les regles del càlcul de potències i d'extracció d'arrels quadrades i cúbiques.

Tanmateix la paraula aritmètica també s'associa a l'estudi de les propietats dels nombres, principalment dels enters. Un text modern, en llengua catalana, escrit sota aquesta orientació és TRAVESA [1998], el qual està dirigit als alumnes de qualsevol dels cursos de la llicenciatura de Matemàtiques i només requereix, per al seu seguiment, els coneixements obtinguts a l'ensenyament secundari.

Tenim, doncs, plantejada una dualitat en el tractament dels nombres:

- El que es dirigeix al domini de les tècniques de la numeració i del càlcul de cara a les seves aplicacions.
- El que pretén estudiar i descobrir les propietats dels nombres, és a dir la nostra teoria de nombres.

Aquestes dues maneres d'entendre la ciència dels nombres sembla néixer conjuntament amb la filosofia grega, especialment entre els primers pitagòrics. En èpoques anteriors, a les antigues civilitzacions de Babilònia, Egipte, Índia, Xina, Àfrica Central i Amèrica, l'interès residia en el domini de tècniques de numeració i de càlcul.¹ Els grecs anomenaven *logística* (λογιστική), l'art de calcular, mentre que la nostra teoria de nombres rebia el nom d'*aritmètica* (ἀριθμητική). Observem de quina manera presenta Plató la ciència dels nombres des d'aquest doble vessant. Quan, a la *República*, Sòcrates i Glaucó consideren en quina Ciència han de ser formats els homes que han de dirigir la ciutat, observem aquests fragments a partir de 522b:

SÒCRATES: El que importa és que l'ànima passi de la regió de les tenebres a la de la veritat; llavors es produirà l'ascensió cap al ser, a la que anomenarem filosofia verdadera.

.....

SÒCRATES: s'ha de recórrer a una ciència que s'apliqui a totes.

GLAUCÓ: A quina?

SÒCRATES: A la que resulta tan comuna per l'ús que en fan les arts, els discursos i les ciències. D'aquesta n'haurem de disposar entre les primeres.

GLAUCÓ: Et segueixo fent la mateixa pregunta.

SÒCRATES: La que ensenya el que és u, dos i tres, cosa ben corrent per cert. La que tracta del nombre i del càlcul. Perquè, no és veritat que tot art i tota ciència es veuen obligades a participar d'ella?

GLAUCÓ: Estic d'acord.

A partir d'aquest punt Sòcrates justifica les seves afirmacions. Exposa que els objectes que inviten la intel·ligència a reflexionar sobre ells, són els que produeixen al mateix temps sensacions oposades i entre aquests inclou els nombres. Llavors defineix quines són les ciències, —presentat la doble vessant de la ciència dels nombres—, que s'ocupen del nombre i la conveniència del seu ensenyament:

SÒCRATES: Sens dubte que la ciència del càlcul [logística] i l'aritmètica s'ocupen en la seva totalitat del nombre.

GLAUCÓ: Això és ben cert.

SÒCRATES: Ambdues, doncs, sembla que condueixen a la veritat.

GLAUCÓ: Són perfectament aptes per fer-ho.

.....

¹Vegeu GHEVERGHESE [1991] i IFRAH [1994].

SÒCRATES: Caldrà doncs Glaucó imposar aquest ensenyament mitjançant una llei i convèncer els qui han d'ocupar llocs de govern que desenvolupin el seu gust per la ciència del càlcul, no superficialment, sinó fins assolir la contemplació de la naturalesa dels nombres servint-se de la intel·ligència. Perquè aquella no és d'ús exclusiu dels comerciants i brocanters, ni es limita a les compres i vendes, sinó que es pot aplicar a la guerra i facilitar el retorn de l'ànima al món de la veritat i de l'essència.²

A les seccions que segueixen donarem unes pinzellades sobre qüestions aritmètiques que tindran a veure amb les dues vessants. Es veurà que les dues estan estretament lligades. Així, per exemple, quan es tracta de cercar algorismes efectius de cara a resoldre problemes concrets de càlcul motivats per les seves aplicacions, sorgeixen de manera natural qüestions que no tenen res a veure amb aquestes aplicacions. Apareixen preguntes sobre les propietats intrínseques dels nombres o de les operacions implicades en la recerca. També és natural que d'un estudi centrat en aquestes propietats sigui fàcil trobar-ne aplicacions pràctiques. Els temes amb els quals intentarem donar una visió d'aquest terreny aniran des de l'aparició dels sistemes de numeració i la realització d'operacions elementals, fins a la resolució d'algunes equacions amb nombres enters, passant pel problema de la recerca d'algorismes per al càlcul d'arrels d'ordre qualsevol i la seva relació amb el triangle aritmètic.

4.1 Sistemes de numeració. Orígens

En els fonaments de l'edifici de l'Aritmètica trobem el nombre. Aquest amaga tota una història, la qual comença amb el discerniment, entre els nostres avantpassats, dels conceptes d'unitat i multiplicitat. Posteriorment, s'evoluciona cap el desenvolupament de tècniques de recompte i enregistrament, mitjançant elements dels cos humà, com els dits, o l'emmagatzemament de pedres, perles i closques en recipients, collarets o solcs en el terra, marques practicades sobre ossos i bastons, nusos sobre cordes unides a d'altres cordes com les branques d'un arbre, etc. Totes aquestes tècniques es descriuen en llenguatge actual mitjançant el concepte d'aplicació bijectiva, o aparellament biunívoc entre els objectes a recomptar i els objectes auxiliars que s'emmagatzemen, o les marques que es practiquen sobre un suport material.

Un dels primers problemes que es presentà als nostres avantpassats, fou el de recompte de nombres grans. Per exemple, en fer el recompte dels membres

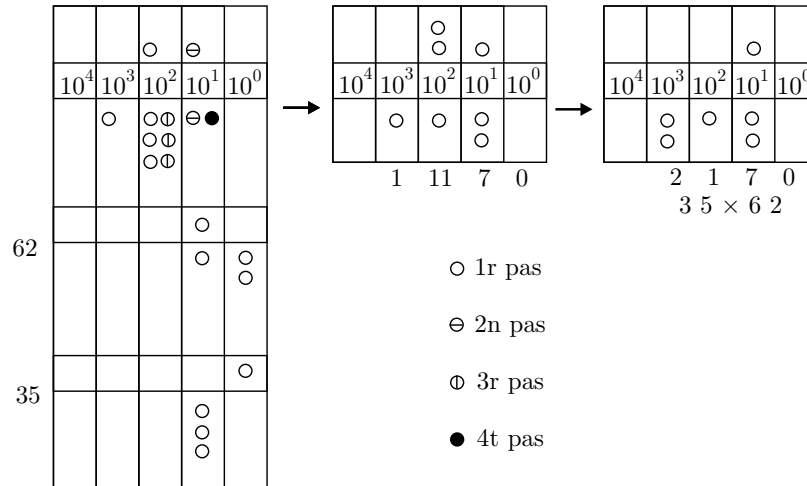
²ALBERT DOU [2000], 40–41, utilitza part aquest fragment de la *República* per reflexionar sobre l'ensenyament de les matemàtiques. Remarca entre d'altres coses el paper de l'aritmètica (no com a logística) com a eina eficaç de desenvolupament de la ment i element important per a l'educació dels joves.

d'un ramat molt gran de bestiar, utilitzant còdols o marques, podien presentar-se problemes d'insuficiència de còdols disponibles, de capacitat del contenidor o de superfície disponible per a les marques, així com dificultats en les lectures posteriors. La solució d'aquest problema consistí a privilegiar certs grups de les unitats utilitzades i representar cada grup com a una unitat d'un tipus diferent, una unitat que representava a tot un grup d'unitats més simples. Ifrah cita l'exemple d'uns indígenes de Madagascar,³ de fa poques generacions, que cavaven diversos solcs paral·lels en el terra, i dipositaven un còdol en el primer solc per cada unitat recomptada. Quan arribaven a les deu unitats, enretiraven els deu còdols, en dipositaven un al solc del seu costat, i seguien el recompte posant còdols en el primer solc fins acumular-ne deu més, als quals es sotmetia a la mateixa operació. Quan s'acumulaven deu còdols en el segon solc, s'enretiraven i se'n dipositava un en el tercer, i així successivament. D'aquesta manera, en el recompte de 1718 unitats de bestiar, només intervenien 17 còdols i quatre solcs. D'aquesta i d'altres tècniques va néixer el principi de la *base*, nom utilitzat per designar el nombre d'unitats que conformen el grup escollit per crear una unitat d'ordre superior. En el nostre exemple s'utilitzava la base 10, però des de sempre s'ha treballat i es treballa amb molts tipus de bases, encara que aquesta ha estat privilegiada.

Les tècniques de recompte sobre suports materials culminaren amb la fabricació de dispositius anomenats *àbacs*.⁴ Un exemple el tenim en l'àbac romà, consistent en un tauler en què s'havien practicat unes ranures paral·leles per on es feien moure unes fitxes. Cada ranura representava una potència de 10, diferent de les altres, en ordre creixent. Els nombres es representaven col·locant en cada columna, tantes fitxes com les unitats que es volien representar de l'ordre corresponent. Cada 5 xifres era substituïda per una sola xifra en la part superior de la columna. Cada fitxa rebia el nom de *calculus*, —literalment “còdol”—. La finalitat dels àbacs era, inicialment, de recompte, per evolucionar cap a l'ús en les tasques de càlcul, mitjançant regles que regien el moviment dels seus elements, que segons les cultures podien ser pedres, botons, varetes, fitxes, etc.

³Vegeu IFRAH [1994], 310 de la traducció espanyola de 1997.

⁴Del llatí “abacus”, terme que, a part del seu significat en la disciplina matemàtica, s'utilitza per designar una superfície plana generalment rectangular. Aquesta seria utilitzada amb finalitats diverses, des d'una taula per dipositar ofrenes en els temples grecs fins al panell que coronava les columnes dels edificis per fer de suport dels elements arquitectònics superiors.



Han existit i existeixen altres tipus d'àbacs, com les tauletes de sorra que utilitzaven els antics calculistes indis i àrabs, els quals disposaven de símbols per a cada nombre i els representaven sobre la sorra, de manera que els anaven esborrant a mesura que se succeïen els passos de les operacions.⁵ Aquesta característica consistent a fer desaparèixer les operacions intermèdies del càlcul, comuna a tots els tipus d'àbacs, tenia un inconvenient, no es podien repassar els càlculs. Per revisar-los, s'havien de tornar a fer. Aquest fet, juntament amb la necessitat de deixar constància dels resultats obtinguts, originà l'aparició dels *sistemes de numeració escrita*.⁶ Això significava la creació de símbols gràfics, per representar nombres, que es fixaven sobre diversos tipus de suports materials amb tècniques variades. Aquests símbols evolucionarien fins aconseguir desbancar els àbacs com a eines de càlcul.

4.1.1 Numeració escrita no posicional. Sistemes additius

En els sistemes additius cada símbol utilitzat per representar els nombres té un valor propi, independent de la posició, i el valor del nombre a representar s'obté de la suma dels nombres representats per tots els símbols que el conformen. Aquests símbols representen, en molts casos, els valors dels nombres de base.

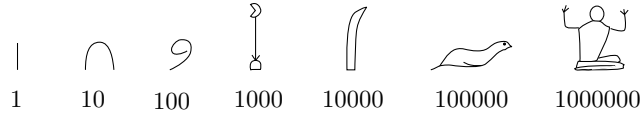
La numeració egípcia

Un exemple de sistema additiu, el tenim en la numeració jeroglífica egípcia. Aquesta disposava, en el tercer mil·lenni abans de Crist, de signes per a totes les

⁵Vegeu IFRAH [1994], 1289 i següents a l'edició espanyola de 1997, i BERGGREN [1987], 32.

⁶L'aparició de la numeració escrita no comportà la desaparició de l'àbac. Actualment hem vist utilitzar els àbacs de boles a comerciants de cultures diverses, amb una destresa increïble.

potències de 10, des de la primera fins la sisena.⁷



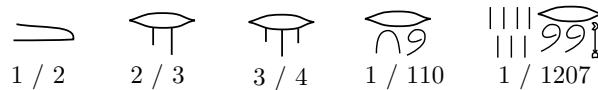
Així els símbols per a les diferents potències eren:

- Una petita línia vertical per a l'1.
- Una línia en forma de nansa per al 10.
- Una petita espiral per al 100.
- Una flor de lotus per al 1000.
- Un dit aixecat i una mica inclinat per al 10000.
- Una granota amb la cua avall per al 100000.
- Un home de genolls amb els braços aixecats per al 1000000.

Els nombres s'escriuen de dreta a esquerra, seguint l'ordre decreixent d'unitats. Moltes vegades els símbols per al mateix tipus d'unitats es superposaven sobre dues o tres línies.⁸ Per exemple el nombre 12326 es podia escriure:



Quants a les fraccions, només utilitzaven les que tenen numerador 1 i, en alguns casos 2/3 i 3/4. Les fraccions de numerador 1, —les quals anomenarem *unitàries*—, es representaven, amb l'excepció de 1/2, amb el símbol jeroglífic de la boca \ominus , situat damunt dels símbols que representaven el denominador. Les fraccions 1/2, 2/3 i 3/4 tenien símbols especials. Quan el denominador era massa gran, la part que no hi cabia s'escrivia a l'esquerra.



⁷Els símbols jeroglífics consistien en imatges gràfiques que podien representar:

– La pròpia figura dibuixada, o una acció lligada a la imatge. En aquest cas reben el nom d'*ideogrames*.

– El so del nom de la figura dibuixada. Llavors reben el nom de *fonogrames*.

Els objectes es representaven pel seu ideograma, acompanyats dels fonogrames que articulaven el so del seu nom. L'escriptura jeroglífica s'utilitzava en les activitats decoratives i solemnes. En ser d'execució lenta, els signes jeroglífics van ser simplificats pels escribes fins convertir-se en els signes *hieràtics*, molt més esquemàtics i simples de traçar. Podeu trobar més informació sobre l'escriptura jeroglífica a FRAH [1994], 400–408 de l'edició espanyola de 1997, i a COLLIER–MANLEY [1998].

⁸També es podien superposar símbols d'unitats diferents.

Es pot observar que una de les deficiències dels sistemes additius rau en la gran quantitat de símbols necessaris per escriure els nombres, tot i que l'existència de símbols especials per a les potències de la base simplifica la representació. Una altra deficiència la trobem a l'hora de calcular, sobretot quan volem establir algoritmes eficients per a les operacions diferents de la suma i la resta. En el cas dels egipcis no sabem com sumaven i restaven nombres enters, encara que no sembla massa difícil fer-ho mitjançant l'acumulació d'unitats del mateix tipus i les substitucions precises. El que sembla quasi segur és que usaven taules per a la suma i resta de fraccions. El problema més greu és el de multiplicar i dividir. Presentarem el cas més senzill que és de el del producte d'enters.⁹ Per enfrontar-lo tenien un mètode molt enginyós, el qual només requeria fer sumes i multiplicacions per 2.

Exemple de producte d'enters en el sistema egipci

Es tracta d'efectuar el producte 109×19 .

Sigui 19 el multiplicador. Construïm dues columnes de nombres. La primera té de primer coeficient el nombre 1, la segona el nombre 19.

- Multipliquem aquests coeficients per 2, i posem els resultats sota.
- Repetim l'operació amb els segons coeficients, i amb els següents, fins que a la primera columna obtenim la màxima potència de 2 que no supera el multiplicand 109. En aquest cas ens aturem a 64.
- Triem els nombres de l'esquerra que sumen 109. Ho fem començant pel 64 i triant, mentre pugem per la columna, els que afegits als ja triats, sumin un nombre que no superi el multiplicand 109.
- Finalment, sumem els nombres de la segona columna que es troben a la mateixa alçada que els triats en la primera columna. El producte desitjat ve donat pel valor d'aquesta suma.

109 × 19	
1	19
2	38
4	76
8	152
16	304
32	608
64	1216
109	2071

Aquest procediment es pot interpretar des de la perspectiva que la memorització de la taula de multiplicar per 2, i el domini de l'operació de sumar, permet efectuar qualsevol multiplicació. Només cal descompondre 109 en potències de 2, i multiplicar 19 per cadascuna d'elles per a, finalment, sumar els resultats.

⁹La divisió d'enters, i el producte i la divisió de fraccions es basaven en tècniques semblants, segurament auxiliades de taules. Vegeu GILLINGS [1972], 11–127 de l'edició de 1982, i GHEVERGHESE [1991], 103–117 de l'edició espanyola de 1996.

Això és el que feien els egipcis, i suposa un coneixement implícit de la distributivitat del producte respecte de la suma, i la possibilitat de descomposició de qualsevol nombre enter en potències de 2. En el nostre llenguatge tindriem:

$$\begin{aligned} 19 \cdot 109 &= 19 \cdot (2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0) = \\ &= 19 \cdot 2^6 + 19 \cdot 2^5 + 19 \cdot 2^3 + 19 \cdot 2^2 + 19 \cdot 2^0 = \\ &= 1216 + 608 + 152 + 76 + 19 = 2071. \end{aligned}$$

Les fraccions unitàries a Egipte

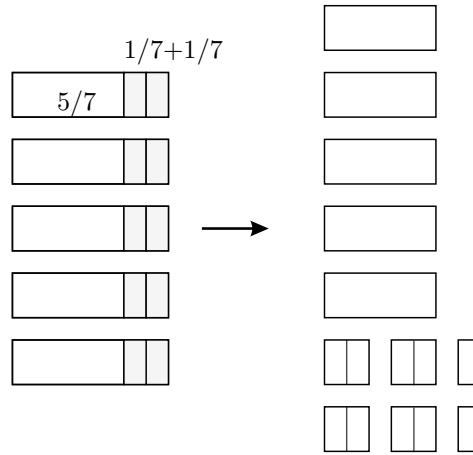
Hem fet esment que els egipcis només treballaven amb fraccions unitàries, amb l'excepció de $2/3$ i $3/4$. No és clar el motiu d'aquesta manera d'expressar les fraccions. L'observació de les aplicacions pràctiques del treball amb aquests tipus de fraccions, pot donar alguna indicació sobre aquest tema.¹⁰ Per exemple, els problemes 1–6 del papir de Rhind presenten el repartiment de 1, 2, 6, 7, 8 i 9 pans entre 10 persones.¹¹ Gheverghese afirma que l'ús d'aquestes fraccions en la resolució d'aquests problemes «té una base lògica pràctica». Argumenta que proporcionen repartiments més satisfactoris. Il·lustrarem la seva conjectura amb la discussió d'un problema similar als citats del papir de Rhind, en què utilitzarem per a la descomposició en fraccions unitàries els nostres recursos aritmètics.

Imaginem que volem repartir, en parts iguals, 5 pans entre 7 persones. És evident que ho podem fer de moltes maneres. Una d'elles consistiria a donar un tros de $5/7$ de pa a cinc persones. Llavors, en quedar 5 trossos de $2/7$ de pa per a les altres dues, partiríem un d'ells en dues parts iguals, i donaríem 2 trossos de $2/7$ i un tros d' $1/7$ a cadascuna de les dues persones que resten.

$$5 \cdot \frac{5}{7} + 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \right) = \frac{25}{7} + \frac{10}{7} = 5.$$

¹⁰Vegeu GHEVERGHESE [1991], 115–118 de l'edició espanyola de 1996, GILLINGS [1972], 123–127 de l'edició de 1982.

¹¹ROBINS–SHUTE [1987], 36, i làmines 8 i 9.



És lògic pensar que, donades les característiques de conservació del pa, surten beneficiades —en qualitat i no en quantitat—, les 5 persones que es queden amb els trossos sencers. El mateix podríem dir si el repartiment fos de parcel·les dedicades al conreu. És molt probable que tothom preferís la seva part en un tros sol.

Si mirem de fer el repartiment basant-nos en la descomposició de $5/7$ en fraccions unitàries,¹² la primera qüestió que es planteja és que hi ha moltes maneres de dur-la a terme.¹³ El procediment que desestimem clarament és el de descompondre $5/7$ en cinc fraccions unitàries iguals; aquest portaria al resultat gens satisfactori de repartir 5 trossos de $1/7$ de barra a cada persona. Seguirem el procediment consistent a:¹⁴

- Trobar la fracció unitària que aproxima millor per defecte a la fracció, amb el denominador més petit possible.
- Fer el mateix amb la diferència de les dues fraccions, i així successivament fins aconseguir que no quedi cap residu no unitari.

¹²Restringim l'estudi al treball amb fraccions unitàries; no considerem $2/3$ i $3/4$.

¹³Vegeu la discussió de BOYER [1968], 33–35 de l'edició espanyola de 1986.

¹⁴L'hem trobat proposat com exercici a OC.LFM [1995], 12, en què s'atribueix a James Joseph Sylvester [1814–1897].

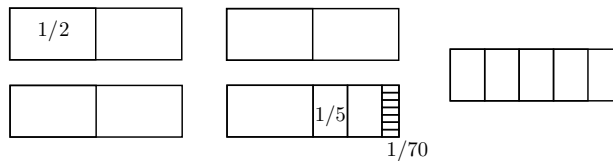
Comencem la recerca:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} n_1 \text{ mínim} \\ \frac{5}{7} \geq \frac{1}{n_1} \end{array} \right\} &\implies \left. \begin{array}{l} n_1 \text{ mínim} \\ n_1 \geq \frac{7}{5} \end{array} \right\} \implies n_1 = 2 \implies \\
 &\implies \frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{7} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{14}. \\
 \left. \begin{array}{l} n_2 \text{ mínim} \\ \frac{3}{14} \geq \frac{1}{n_2} \end{array} \right\} &\implies \left. \begin{array}{l} n_2 \text{ mínim} \\ n_2 \geq \frac{14}{3} \end{array} \right\} \implies n_2 = 5 \implies \\
 &\implies \frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{14} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70}.
 \end{aligned}$$

Llavors, la descomposició

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70},$$

proporciona el repartiment de 3 trossos de pa a cada persona. Aquest consisteix a donar a cada persona, un tros de mig pa, un altre d'1/5 de pa, i un altre d'1/70 de pa. En aquest repartiment els trossos grans i petits queden igualment repartits.



Numeració romana

Un exemple de sistema additiu amb una nova característica, el trobem en el sistema romà. Aquest afegeix un principi subtractiu, pel qual tot signe situat a l'esquerra d'un altre que representa un valor major, era restat d'aquest últim. Això, a part de complicar una mica les representacions perquè introduïa un principi nou, també les simplificava perquè reduïa el nombre de símbols. De totes maneres, sembla clar, que l'execució de càlculs es complicava.¹⁵ Els símbols que

¹⁵És una opinió generalitzada que els sistemes additius i, especialment el romà per la seva característica subtractiva, presenten greus deficiències com a eines de càlcul, especialment per efectuar productes i divisions. A l'article DETLEFSEN-ERLANDSON-HESTON-YOUNG [1975], es defensa que aquesta idea és errònia. S'hi argumenta que es recolza en l'opinió, segons els autors equivocada, que les tècniques de càlcul han de ser reflex unes de les altres.

utilitzaven eren:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{I} \longleftrightarrow 1 & \mathbf{V} \longleftrightarrow 5 & \mathbf{X} \longleftrightarrow 10 & \mathbf{L} \longleftrightarrow 50 \\ \mathbf{C} \longleftrightarrow 100 & \mathbf{D} \longleftrightarrow 500 & \mathbf{M} \longleftrightarrow 1000. & \end{array}$$

Tenien diverses convencions per representar nombres grans. Una d'elles consistia en traçar una línia horitzontal sobre una agrupació de símbols per multiplicar el nombre que representen per mil, i dues línies per multiplicar-lo per un milió. Per exemple,

$$\begin{array}{ll} \mathbf{XXXIV} \longleftrightarrow 34 & \overline{\mathbf{XXXIV}} \longleftrightarrow 30004 \\ \overline{\mathbf{XXXIV}} \longleftrightarrow 34000 & \overline{\overline{\mathbf{XXXIV}}} \longleftrightarrow 30000004. \end{array}$$

4.1.2 Numeració escrita no posicional. Sistemes multiplicatius

Aquests sistemes van afegir, al principi additiu, el principi multiplicatiu. Es tractava de representar el nombre implicat en cada ordre d'unitats mitjançant dos símbols: el símbol que indicava l'ordre, i el símbol que indicava el nombre d'unitats d'aquell ordre. Això simplificava la representació, perquè el nombre de símbols disminuïa en no tenir que acumular símbols del mateix ordre. Un exemple totalment desenvolupat el trobem en la numeració xinesa del segle XIV. Els seus símbols eren

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000

Així, per escriure el nombre 179, no tenien que acumular un total de 17 símbols, com haguessin fet els egipcis, sinó que en tenien prou amb 5:

$$179 = 1 \times 100 + 7 \times 10 + 9 \qquad \begin{array}{cccc} \text{一} & \text{百} & \text{七} & \text{十} & \text{九} \\ 1 & 100 & 7 & 10 & 9 \end{array}$$

Si s'observa aquest sistema, només calia un pas per saltar a l'adopció d'un sistema de posició. Calia fer desaparèixer els símbols que indicaven l'ordre de les unitats, conservar la posició dels altres, i adoptar el conveni que el primer símbol de la dreta representava unitats de primer ordre, el segon símbol de segon, i així successivament. Si els xinesos haguessin caigut en això, comprovant les avantatges d'aquest nou sistema, l'escriptura del nombre anterior hagués esdevingut

$$\text{一七九}$$

Haurien obtingut un nou avanç, però se'ls hagués creat un nou problema. El de no poder distingir entre aquest nombre i, per exemple, el 10079, en no disposar d'un símbol per al zero.

4.1.3 Sistemes de posició

L'aparició dels sistemes de numeració de posició i el descobriment del zero, representaria el pas definitiu per assolir un sistema escrit en què es poguessin desenvolupar procediments de càlcul de manera òptima. La seva característica consisteix a que els valors dels símbols no són absoluts, sinó relatius al lloc que ocupen entre els altres símbols.

El sistema sexagesimal de posició a Babilònia

La primera numeració escrita de posició aparegué, als voltants del segle XIX aC, entre els astrònoms i matemàtics babilonis, molt abans que en cap altra civilització.¹⁶

La civilització babilònica tingué en la ciutat de Babilònia,¹⁷ en diferents èpoques del període 2000-500 aC, el centre de la seva cultura.¹⁸ Es desenvolupà a la vall de Mesopotàmia¹⁹, regió compresa entre els rius Tigris i Eufrates, actualment territori de l'Irak, fronterer amb l'Iran. Aquesta regió es comunicava amb el Golf Pèrsic per una línia costanera que no coincidia amb l'actual sinó que es trobava més al nord, de manera que els dos rius s'abocaven a la mar per separat. Els primers documents escrits hi apareixen a finals del quart mil·lenni, i el tipus de grafisme utilitzat s'anomena *escriptura cuneïforme*, (del llatí *cuneus*), per ser els seus signes compostos d'elements en forma de cuny o tascó. Eren gravats amb unes canyes, anomenades *càlams*, de part inferior afilada, de les quals no es conserva cap exemplar, sobre unes tauletes d'argila humida posades posteriorment a assecar. D'aquestes se n'han trobat a la vora de mig milió, i es conserven repartides a diferents museus d'arreu del món. Existeixen col·leccions força importants al British Museum de Londres, al Louvre de París i a diferents Universitats nord-americanes com Colúmbia, Pennsilvània, Yale, etc. En el segle XIX es feren progressos en la seva lectura i, a partir del segon quart del segle XX, s'han fet exposicions força completes de les matemàtiques que allí s'hi troben.

Aquest sistema era sexagesimal, —base 60—, i tenia caràcter additiu i decimal dins de cada ordre d'unitats. Sobre l'origen de l'elecció de la base 60, s'han fet moltes conjectures. Des d'explicacions que es basen en la fusió de dos sistemes, —un de base 12 i un altre de base 5—, de procedència anatòmica, fins d'altres que la justifiquen per les seves avantatges en el càlcul. També hi ha ar-

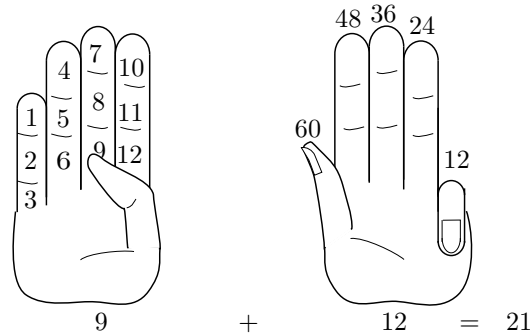
¹⁶Vegeu IFRAH [1994], 358 de l'edició de 1997.

¹⁷Babilònia, de nom bíblic Babel, té una etimologia força dual relacionada amb l'hebreu *Bālal*, confondre, i *Babili*, traducció babilònica del nom sumeri “Porta o Torre de Déu”.

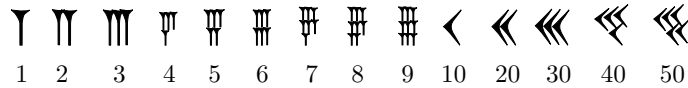
¹⁸Aquesta civilització té els seus orígens en les civilitzacions sumèria i acàdia de la Baixa Mesopotàmia a partir del quart mil·lenni aC.

¹⁹*meso*, “entre”, i *potamos*, “riu”

guments basats en consideracions geomètriques i astronòmiques, els quals Ifrah critica dient que «suposen que el que és abstracte precedeix allò que és concret, imaginant que la geometria i l'astronomia han sigut ciències elaborades abans de l'aparició de les ciències aplicades».²⁰ La hipòtesi defensada per Ifrah és la de la fusió de dos sistemes de bases 12 i 5. Es duria a terme comptant de l'1 fins el 12 amb la mà dreta, utilitzant el polze per assenyalar cadascuna de les 12 falanges dels altres dits. En arribar a la falange 12, es doblegaria el dit petit de la mà esquerra. Es repetiria l'operació amb la mà dreta per comptar de 13 a 24, i en arribar a aquest últim es doblegaria el dit anular. Repetiríem el procés fins doblegar tots els dits de la mà esquerra. El puny esquerre tancat representaria 60 unitats. Així, en la figura adjunta veiem com es representaria el nombre 21.



El fet de tenir caràcter additiu i decimal dins de cada ordre, implicava no tenir un símbol per a cada nombre del 1 al 59. Com en els sistemes additius, existia un símbol per a les potències de la base 10, dins de cada ordre de base 60. És a dir hi havia dos símbols, el *clau* Υ per representar l'1, i l'*espiga* \leftarrow per representar el 10. Tots els altres nombres, des de l'1 fins el 59 es representaven acumulant claus i espigues.



Per exemple, el nombre 11505 es representa:

$$\begin{array}{c}
 \Upsilon \leftarrow \Upsilon \leftarrow \Upsilon \\
 3 \cdot 60^2 + 11 \cdot 60 + 45 = 11505
 \end{array}$$

Aquest caràcter additiu i l'absència d'un signe pel zero planteja algunes dificultats. Per exemple, el nombre que acabem de representar, l'haguéssim pogut interpretar com

$$3 \cdot 60^3 + 11 \cdot 60^2 + 40 \cdot 60 + 5 = 690005.$$

²⁰Vegeu IFRAH [1994], 233–243, de l'edició de 1997.

Això passava perquè no sempre es deixava un espai entre unitats de diferent ordre. A més si en algun ordre no hi havia unitats, no tenien un símbol per representar-ho, és a dir, no tenien un símbol per al zero. D'aquesta manera el nombre que hem representat s'hagués pogut llegir:

$$3 \cdot 60^3 + 11 \cdot 60^2 + 45 = 687645.$$

Se sap que, en època tardana, pels voltants del segle IV aC, utilitzaven un doble clau inclinat \blacktriangleleft , o una doble espiga \blacktriangleleft oblíqua per assenyalar la falta d'unitats d'algun ordre. Entre els astrònoms també es trobà, aquesta representació per al zero, en posició inicial o final.

Una dificultat més venia donada perquè representaven les fraccions amb la mateixa notació de posició, però no tenien cap signe per separar la part entera de la fraccionària, com ara la nostra coma decimal. Així $\Upsilon \blacktriangleleft$ podia representar $1 + 10/60$. En aquests casos el context proporciona la lectura correcta.

De l'observació del sistema babilònic i de la representació actual dels nombres en base 10, acordarem una notació adequada per representar la numeració babilònica utilitzant els nostres dígitos. Així, sabem que en el nostre sistema

$$3871,42 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1 + \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2}$$

on 2 és el dígit de l'ordre de les centèsimes, 4 el de les dècimes, 1 el de les unitats, etc. Proposem representar els nombres del sistema babilònic d'una manera semblant, amb petites modificacions degudes al fet que el valor corresponent a cada ordre pot necessitar dos dígitos per ser expressat. Així s'esdevé amb el nombre $83 = 1 \cdot 60 + 23$, que necessita els dos dígitos 23 per expressar les unitats d'ordre 1. Seguirem la notació d'Otto Neugebauer [1899–1990], que va desxifrar una de les tauletes més sorprenents i que analitzarem més endavant.²¹ Proposa separar les parts entera i no entera pel signe “;”, els ordres enters entre si pel signe “,”, i d'igual manera els ordres no enters. Així tindrem

$$5 \cdot 60^2 + 24 \cdot 60 + 35 + \frac{4}{60} + \frac{23}{60^2} = 5,24,35;4,23.$$

Conversió d'un nombre de base decimal a base sexagesimal

Abans d'entrar a l'apartat dels càlculs babilonis, ens plantegem el problema de trobar l'expressió sexagesimal d'un nombre enter N en base decimal. Per calcular el nombre d'unitats a_0 de primer ordre, hem de trobar el nombre de vegades n_1 que N conté 60, i el residu resultant serà a_0 .

$$N = 60n_1 + a_0.$$

²¹Vegeu NEUGEBAUER [1957].

Per trobar les unitats de segon ordre a_1 hem de trobar el nombre de vegades n_2 que n_1 conté 60, i el residu resultant serà a_1 .

$$n_1 = 60n_2 + a_1 \implies N = (60n_2 + a_1)60 + a_0 = n_260^2 + a_160 + a_0.$$

I així successivament fins a obtenir un quocient $n_p < 60$ que coincidirà amb el nombre d'unitats a_p d'ordre màxim. És a dir que si $n_{p-1} = 60n_p + a_{p-1}$ i anomenem $n_p = a_p$, llavors

$$\begin{aligned} N &= (60n_p + a_{p-1})60^{p-1} + a_{p-2}60^2 + \cdots + a_160 + a_0 = \\ &= a_p60^p + a_{p-1}60^{p-1} + \cdots + a_160 + a_0 \end{aligned}$$

Per exemple, si volem expressar 7933 en base 60, només caldrà observar les successives divisions,

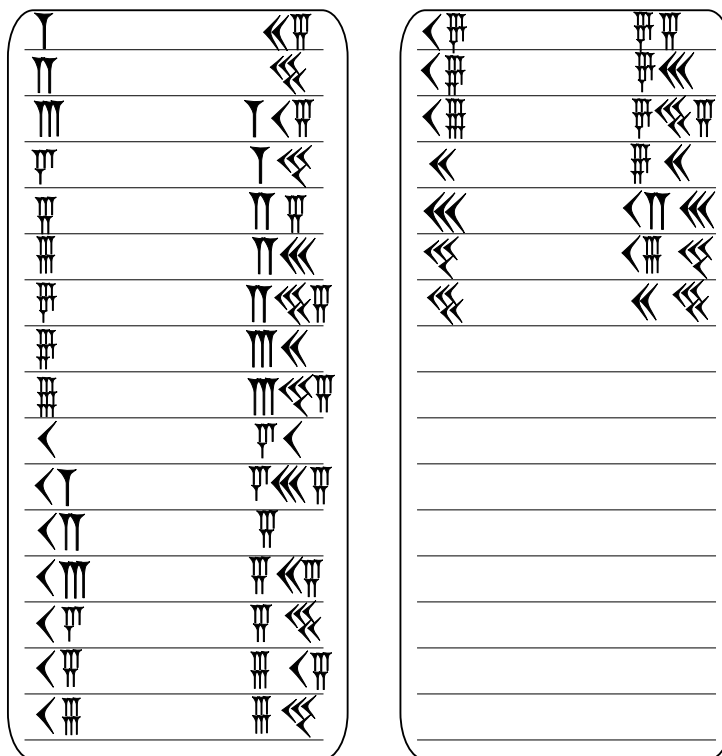
$$\begin{array}{r} 7933 \quad | \quad 60 \\ 193 \quad | \quad 60 \\ 133 \quad | \quad 60 \\ 13 \end{array}$$

Aquestes impliquen, $7933 = 2 \cdot 60^2 + 12 \cdot 60 + 13 = 2, 12, 13$.

Taules i càlculs

Existien taules per als càlculs més diversos, productes, inversos, quadrats, cubs, arrels quadrades i cúbiques, i d'altres més complexos. Amb el seu ajut, els càlculs no contemplats a les taules podien desenvolupar-se amb més facilitat. Per exemple, la multiplicació es podria realitzar d'una manera equivalent a l'actual si tenien les taules a mà o memoritzades.²² Així, la taula del producte per 25 tenia una aparença semblant a la següent en què es representa una tauleta d'argila per les dues cares:

²²Per a una conjectura de com es podien dur a terme les multiplicacions sobre una superfície d'argila fresca, en què els símbols es podien esborrar, vegeu IFRAH [1994], 379–383.



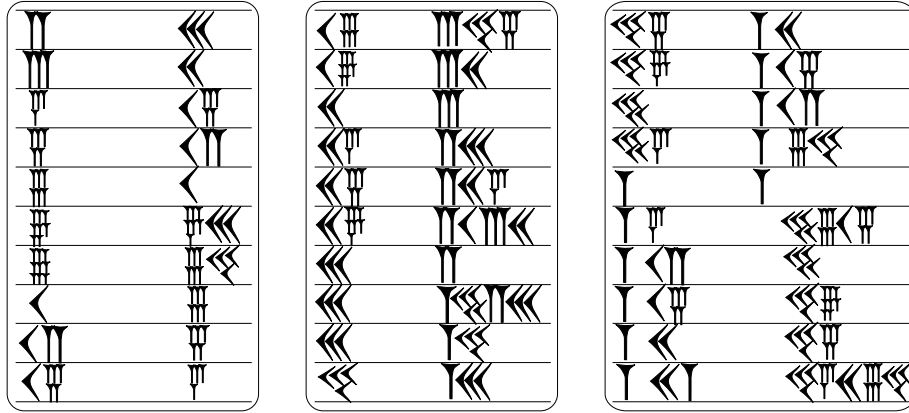
Per realitzar productes de nombres que no hi apareixen, per exemple 34×25 , només calia fer $30 \cdot 25 + 4 \cdot 25$. Així, si es volia calcular el producte més complex 2, 13; $32, 41 \times 2, 25$, amb l'ajut de la taula del 25, i suposant que tenien la taula

del 2 també a mà, o memoritzada, podien fer:

$$\begin{array}{r}
 2, 13 ; 32, 41 \\
 \times 2, 25 \\
 \hline
 16, 40 \longleftrightarrow \begin{array}{|l} 25 \times 40 \\ \hline 25 \times 1 \\ \hline 25 \times 30 \\ \hline 25 \times 2 \\ \hline 25 \times 13 \\ \hline 25 \times 2 \\ \hline 2 \times 40 \\ \hline 2 \times 1 \\ \hline 2 \times 30 \\ \hline 2 \times 2 \\ \hline 2 \times 13 \\ \hline 2 \times 2 \end{array} \\
 \quad 25 \overline{) 12 ; 30} \longleftrightarrow \\
 \quad 50 \overline{) 5, 25} \longleftrightarrow \\
 \quad 50 \overline{) 1 ; 20} \longleftrightarrow \\
 \quad 2 \overline{) 1, 0} \longleftrightarrow \\
 \quad 4 \overline{) 1, 0} \longleftrightarrow \\
 \quad 26 \overline{) 1, 0} \longleftrightarrow \\
 + 4 \overline{) 1, 0} \longleftrightarrow \\
 \hline
 4, 22, 42 ; 58, 5 \\
 + 1 \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 5, 22, 43 ; 59, 5
 \end{array}$$

Quan s'examinen les tauletes de productes, sembla raonable trobar les de nombres que estan compresos entre 1 i 59, encara que no s'hagi trobat cap exemplar d'alguna d'elles. Amb elles es podrien efectuar, com hem vist, d'altres productes més complexos, de la mateixa manera que es poden efectuar en el dia d'avui amb les taules de l'1 al 10. Resulta, però, sorprenent trobar taules de multiplicació per 1, 20, per 1, 30, o fins i tot, per 44, 26, 40. Una interpretació ingènua podria induir a creure en l'existència de tantes taules com nombres utilitzaven, la qual cosa provocaria problemes pràctics que no cal comentar, i més quan semblen del tot innecessàries. Neugebauer atribueix l'existència de les taules esmentades, a la necessitat de dur a terme la divisió entre nombres.²³ Efectivament, resulta que $0; 1, 20$, $0; 1, 30$ i $0 : 0, 44, 26, 40$ són els inversos de 45, 40 i 81. Llavors, la finalitat sembla evident. Es tracta de tenir aquestes taules a mà, per realitzar divisions p/q , utilitzant els productes $p \cdot \frac{1}{q}$. Així és natural trobar gran quantitat de tauletes d'inversos, semblants a la que adjuntem més avall, i les dels seus productes.

²³Vegeu NEUGEBAUER [1957], 31–34 de l'edició de 1969.



En aquesta taula d'inversos, observem que no hi apareixen els inversos d'alguns nombres com el 7 o l'11. La característica comuna dels nombres absents és que la seva part fraccionària sexagesimal no es pot representar amb un nombre finit d'unitats. Per tant, hi falten tots els nombres que tenen algun factor diferent del 2, del 3 o del 5, factors primers del 60.²⁴

Comprovarem, per a l'últim nombre de la taula, que el desenvolupament sexagesimal és finit. Assolirem l'objectiu si podem expressar

$$\frac{1}{81} = \frac{n}{60^p} \quad \text{en què } n, p \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}.$$

Observem que, $60^p = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^p = 2^{2p} \cdot 3^p \cdot 5^p$ i $81 = 3^4$, per tant

$$\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = \frac{2^8 \cdot 5^4}{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4} = \frac{160000}{60^4}.$$

Ara només caldrà expressar 160000 en base 60,

$$\begin{array}{r} 160000 \\ \underline{60} \\ 400 \quad 2666 \\ \underline{400} \quad 266 \quad 60 \\ 400 \quad 26 \\ \underline{400} \quad 26 \\ 40 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 160000 &= 44 \cdot 60^2 + 26 \cdot 60 + 40 \quad \text{implica que} \\ \frac{1}{81} &= \frac{160000}{60^4} = \frac{44}{60^2} + \frac{26}{60^3} + \frac{40}{60^4} = 0; 0, 44, 26, 40. \end{aligned}$$

²⁴Els nombres que tenen inversos amb desenvolupament fraccionari sexagesimal finit s'anomenen *regulars*. Vegeu l'activitat 4.1.13.

El sistema decimal posicional

La civilització índia fou la primera a utilitzar un sistema posicional en què no intervenia el principi additiu, la qual cosa s'aconseguí amb la introducció de símbols individualitzats per a cadascun dels nombres que representaven les unitats de cada ordre. En ser 10 la seva base de numeració, això implicava que treballaven amb 10 símbols, xifres o numerals, entre els que n'incloïen un per al *zero*. El document més antic en què es demostra l'ús del zero i de la numeració decimal de posició és el tractat de cosmologia *Lokavibhaga* [*Les parts de l'Univers*] de l'any 458 de la nostra era. Les xifres són indicades pels seus noms en llengua sànscrita:²⁵

<i>eka</i>	1		<i>dvi</i>	2		<i>tri</i>	3		<i>chatur</i>	4		<i>pancha</i>	5
<i>shat</i>	6		<i>sapta</i>	7		<i>ashta</i>	8		<i>nava</i>	9		<i>shunya</i>	0

Quant a les figures numerals per designar aquests nombres, podem trobar els seus orígens a l'escriptura *brahmi*, en el segle III aC. D'aquesta es conserven pocs símbols, i alguns d'ells es tracen encara amb més d'un traç, com el 2 que es presenta amb dos traços verticals, recordant l'estructura additiva. Aquesta representació evoluciona, fins que en el segle VII trobem 10 símbols totalment individualitzats, fets d'un sol traç. Així, per exemple, en un fragment del manuscrit *Bakhshali* de datació problemàtica [IX–XII], trobem els símbols:²⁶

~	~	3	4	5	6	7	8	9	.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Actualment usem el sistema ideat pels indis, el qual va ser ampliat pels àrabs en el terreny de la representació de fraccions de la unitat mitjançant fraccions decimals, amb una notació similar a l'actual.²⁷ Moltes vegades se sol anomenar el nostre sistema, de numeració àràbiga, però és de justícia anomenar-lo de numeració indoaràbiga.

²⁵Vegeu el “diccionari de símbols numèrics” a IFRAH [1994], i concretament la pàgina 1119 de l'edició espanyola de 1997. PLA [1998b], 116, fa notar la semblança d'alguns d'aquests noms amb els actuals.

²⁶Vegeu PLA [1998b], 117, i IFRAH [1994], 865.

²⁷Vegeu PLA [1998b] per a una visió àmplia i documentada del desenvolupament del sistema decimal posicional fins el segle XV, en què apareix la primera aritmètica —vegeu SANTCLIMENT [1482]— de la península ibèrica, la qual fou escrita en català.

Una mica d'etimologia

Amb l'adopció de la numeració índia per part dels àrabs, aquests van traduir la paraula sànscrita *shunya* que representava el zero, —la qual tenia significat literal de “buit”—, per *sifr* que té el mateix significat. Aquesta paraula va passar romanitzada a Europa, via Espanya i França, convertint-se en *sifra*, *cifra*, *cyfra*, *cyphra*, *zephirum*, etc. A partir del segle XV s'utilitzà per representar, a més del zero, qualsevol altre signe o figura numeral. En castellà ha quedat *cifra*, en francès *chiffre*, en català *xifra*, en alemany *ziffer*. En canvi els anglesos utilitzen el terme *numeral* del llatí *numerus* que el diferencia de nombre o número —*number*—. També en català s'utilitza el terme *numeral*. Quant al terme “zero” va resultar de la contracció de la traducció feta per Fibonacci de “sifr” per “zephirum”.

Activitats 4.1

1. Useu com a base el nombre de dits d'una mà.

\overline{E}_1

i) De quina manera indicariéu 23 amb dues mans?

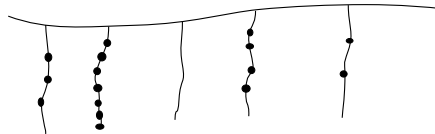
ii) Quantes mans utilitzaríeu per comptar 218 objectes, i com els representariéu?

\overline{S}

2. Useu com a base les 12 falanges dels quatre dits d'una mà, prescindint del polze. Quin és el nombre màxim d'objectes que poden comptar 5 persones, si cadascuna d'elles utilitza una mà, —l'altra mà s'utilitza per assenyalar la falange implicada en el recompte, i la persona que compta les unitats d'ordre més gran no utilitza la falange que representa el 12—.

\overline{S}

3. Hem trobat un cordill del que pengen 5 cordills. En el primer cordill s'han practicat 3 nusos, en el segon 7, en el tercer cap, en el quart 4 i en el cinquè 2. Cada cordill representa un ordre d'unitats, i aquest creix seguint l'ordre dels cordills d'esquerra a dreta.



i) Sabem que es treballa en base 10. Quin és el nombre representat en la configuració de nusos?

ii) Contesteu el mateix si la base és 8. I si la base és 6?

\overline{S}

iii) Utilitzeu nombres i lletres per representar la quantitat indicada si no coneixeu la base.

\overline{E}_2

- \overline{E}_1 4. Fabriqueu un àbac romà i multipliqueu 1015 per 41. Representeu aquests dos nombres i el resultat amb signes romans.
- \overline{S}
5. Multipliqueu, amb el sistema egipci, 271 per 13. Representeu el resultat en escriptura jeroglífica.
- \overline{S}
6. Sobre descomposició en fraccions unitàries.
- \overline{B} i) Useu el procediment de Sylvester per descompondre $41/42$ i $51/19$, adjuntant la part entera quan calgui.
- ii) Creeu una funció amb el *DERIVE* la qual, donada una fracció positiva, proporcionï la seva descomposició en part entera i en fraccions unitàries obtingudes pel procediment anterior, com a coordenades d'un vector.
- \overline{S}
- \overline{E}_1 7. El mètode presentat a la pàgina 167 per canviar de base l'expressió d'un nombre decimal es pot generalitzar. Només cal canviar la base 60 per la base b desitjada. Expresseu el nombre $81_{(10)}$ en base 2.²⁸
- \overline{S}
8. Traduiu la tauleta de la pàgina 169.
- \overline{S}
9. Calculeu $4132_{(5)} \times 23_{(5)}$. Actueu igual que hem fet a la pàgina 170.
- \overline{E}_2 10. Traduiu la taula de la pàgina 170.
- \overline{S}
11. Considereu la fracció $187/160$:
- i) Calculeu el seu valor, trobant prèviament l'invers de 160, tal com hem fet per a l'invers de 81.
- \overline{S} ii) Calculeu el seu valor mitjançant la taula d'inversos de la pàgina 170.
- iii) Representeu el resultat amb els signes babilonis.
12. Tot i que en són minoria, també s'han trobat tauletes amb inversos de nombres no regulars, és a dir de nombres que tenen algun factor diferent del 2, del 3 i del 5. Aproximeu l'invers del 7 fins l'ordre de la fracció 60^{-3} .
- \overline{S}
- \overline{B} 13. Tractarem sobre els nombres regulars en diferents bases de numeració.
- i) Demostreu que el fet que la fracció $1/n$, $n > 1$ tingui desenvolupament fraccionari sexagesimal finit, equival a que $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, en què $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$.
- ii) Quin seria el teorema equivalent en base 10?
- iii) Quin seria el teorema equivalent en qualsevol base?
- \overline{S} iv) L'invers del nombre 7 té desenvolupament finit en base 14?

²⁸L'expressió $N_{(b)}$, significa que el nombre N està expressat en base b .

v) Quina és la base mínima en què els inversos de 2, 3 i 4, tenen desenvolupament fraccionari finit? Contesteu la mateixa pregunta per al nombre 44.

14. Creeu amb el *DERIVE* unes funcions que transformin l'expressió de:

- Qualsevol nombre natural en base 10, en la seva expressió en base $b \in \mathbb{N}$. [Feu que les unitats dels diferents ordres apareguin com les coordenades d'un vector].
- Qualsevol nombre real positiu en base 10, en la seva expressió en base $b \in \mathbb{N}$. Introduïu-hi una variable que indiqui el nombre d'unitats d'ordres diferents que han d'aparèixer en la seva part fraccionària. [Les unitats dels diferents ordres enters i fraccionaris, presenteu-les com a coordenades de vectors diferents].
- Qualsevol nombre en base b , en la seva expressió en base 10. [Introduïu les diferents unitats del nombre en base b com les coordenades de dos vectors, un per a la part entera i l'altre per a la part fraccionària].
- Qualsevol nombre en base b_1 , en la seva expressió en base b_2 . Introduïu-hi una variable que indiqui el nombre d'unitats d'ordres diferents que han d'aparèixer en la part fraccionària de b_2 . [Introduïu les diferents unitats del nombre en base b_1 com abans].

S

□

4.2 Els terns pitagòrics. De la tauleta Plimpton 322 al teorema de Fermat

Passem a un altre dels problemes citats a la introducció: la resolució d'equacions en nombres enters. En aquesta secció tractarem les relacionades amb la recerca de triangles rectangles de costats enters. Recordem que, en el nostre llenguatge algebraic, anomenem *tern pitagòric* al conjunt de tres nombres enters $x, y, z > 0$ que satisfan l'equació,

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

La recerca d'aquests terns va interessar els matemàtics des d'èpoques molt antigues. Concretament, es conserva una tauleta que demostra un coneixement profund del tema a l'antiga Babilònia.

4.2.1 La tauleta Plimpton 322

La Plimpton 322 és una tauleta que es conserva a la George A. Plimpton Collection, Rare Book and Manuscript Library, de la Universitat de Columbia. Té una

datació entre el 1900 i el 1600 aC i va ser descrita, per primer cop, per Otto Neugebauer i Abraham Sachs.²⁹ La fractura de la seva part esquerra fa pensar que formava part d'una tauleta més gran. Algunes de les seves inscripcions es troben esborrades, la qual cosa no ha impedit fer-ne l'anàlisi i posterior interpretació.³⁰ A la figura adjunta, es troben reproduïdes les quatre columnes numèriques de la taula. Hi falta l'encapçalament, en el qual sobre les columnes segona i tercera —mirant de dreta a esquerra—, s'hi troben les paraules “amplada” i “diagonal”.³¹ Resumim les conclusions de la seva anàlisi, seguint principalment l'article de PLA [1995]:

- La segona i tercera columnes representen un catet i la diagonal d'un triangle rectangle. Això, a part de la indicació ja citada de les seves capçaleres, es conclou de l'observació que la semisuma i la semidiferència de les parelles de cada fila són quadrats perfectes en tots els casos, excepte les files 2, 9, 13 i 15, en les columnes 3, 2, 2 i 3, respectivament. Per exemple, considerem els nombres de la segona i tercera columna de la primera fila:

$$\left. \begin{array}{l} 1, 59 = 119_{(10)} \\ 2, 49 = 169_{(10)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{169 + 119}{2} = 144 = 12^2 \\ \frac{169 - 119}{2} = 25 = 5^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 119 = 12^2 - 5^2 \\ 169 = 12^2 + 5^2 \end{array}.$$

²⁹ Vegeu NEUGEBAUER–SACHS [1945].

³⁰ Per a una anàlisi, interpretació, correcció i reconstrucció del seu contingut, vegeu PLA [1995]. Vegeu també BUCK [1980].

³¹ Vegeu VAN DER WAERDEN [1961], 78.

Si completem la parella $12^2 - 5^2$, $12^2 + 5^2$, amb $2 \cdot 12 \cdot 5 = 120$, obtenim

$$(12^2 - 5^2)^2 + (2 \cdot 12 \cdot 5)^2 = (12^2 + 5^2)^2.$$

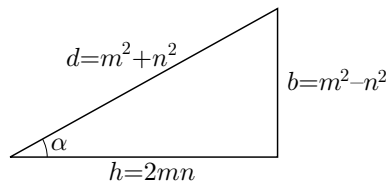
És a dir que tenim el tern pitagòric $(119, 120, 169)$. En general, si representem amb la lletra b els nombres de la columna 2, i amb la lletra d els de la columna 3, tenim

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d+b}{2} = m^2 \\ \frac{d-b}{2} = n^2 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} d = m^2 + n^2 \\ b = m^2 - n^2. \end{array}$$

Llavors, en ser

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

les columnes 2 i 3 proporcionen un catet b i la hipotenusa d de diversos triangles rectangles. Notem que hem topat amb el problema de la formació de terns pitagòrics, la qual cosa ens informa de l'antiguitat del “teorema” de Pitàgores i de l'interès en trobar triangles rectangles de costats enters.



- Si es cerca l'altre catet $h = 2mn$ del triangle s'observa que sempre és un nombre regular, excepte en els casos erronis que hem citat. Per exemple,

Fila	$d^2 - b^2 = h^2$	h
1a.	$169^2 - 119^2 = 120^2 \implies 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	
5a.	$97^2 - 65^2 = 72^2 \implies 72 = 2^3 \cdot 3^2$	
6a.	$981^2 - 319^2 = 360^2 \implies 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	

- La primera columna de la taula proporciona els quadrats dels quocients b/h , és a dir el quadrat de la tangent de l'angle α format pel catet h i la diagonal d .³² El fet de l'aparició d'aquests quocients dóna una explicació del perquè treballen amb h regular: s'obtenen quocients amb desenvolupament fraccionari sexagesimal finit.

³²També s'interpreta que en aquesta columna hi apareixen els quadrats de les secants d'aquest angle, $-\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$, havent desaparegut el 1 com a conseqüència de la fractura de la taula. Vegeu NEUGEBAUER [1957] 37–38 de l'edició de 1969.

- Del que hem dit, es pot reconstruir la part esborrada i corregir un cinquè error de la fila 8 en la columna 1. També es poden corregir els errors de les columnes 2 i 3.
- Finalment, els terns s’han triat seguint el criteri anterior de regularitat, de manera que els angles α implicats estiguessin entre 30° i 45° , en ordre decreixent.

En resum, més de 1000 anys abans de Pitàgores trobem que els matemàtics babilonis estaven força familiaritzats amb el teorema de Pitàgores i eren capaços de construir terns pitagòrics per a les seves necessitats de càlcul, demostrant un coneixement profund de les seves propietats. Adjuntem la taula completa en les seves parts esborrades i amb la correcció —ressaltada amb el signe ●— dels cinc errors esmentats.

0; 59, 0, 15	1, 59	2, 49	1
0; 56, 56, 58, 14, 50, 6, 15	56, 7	1, 20, 25 ●	2
0; 55, 7, 41, 15, 33, 45	1, 16, 41	1, 50, 49	3
0; 53, 10, 29, 32, 52, 16	3, 31, 49	5, 9, 1	4
0; 48, 54, 1, 40	1, 5	1, 37	5
0; 47, 6, 41, 40	5, 19	8, 1	6
0; 43, 11, 56, 28, 26, 40	38, 11	59, 1	7
0; 41, 33, 45, 14, 3, 45 ●	13, 19	20, 49	8
0; 38, 33, 36, 36	8, 1 ●	12, 49	9
0; 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	1, 22, 41	2, 16, 1	10
0; 33, 45	45	1, 15	11
0; 29, 21, 54, 2, 15	27, 59	48, 49	12
0; 27, 0, 3, 45	2, 41 ●	4, 49	13
0; 25, 48, 51, 35, 6, 40	29, 31	53, 49	14
0; 28, 13, 46, 40	56	1, 46 ●	15

4.2.2 Els terns pitagòrics en el món grec

Procle atribueix a Pitàgores i Plató dos procediments per trobar alguns tipus particulars de terns pitagòrics.³³ Allí diu que el primer construïa terns, agafant un nombre m senar, la meitat de la diferència entre el seu quadrat i 1, i la meitat de la suma entre el seu quadrat i 1. És a dir,

$$\frac{m^2 - 1}{2}, m, \frac{m^2 + 1}{2}.$$

S’ha conjecturat que això s’assolí mitjançant l’ús de gnòmons. Efectivament, si considerem un quadrat de costat n enter, i li afegim un gnòmon fins completar

³³Vegeu MORROW [1970], 340.

un quadrat de costat $n + 1$, tenim que,

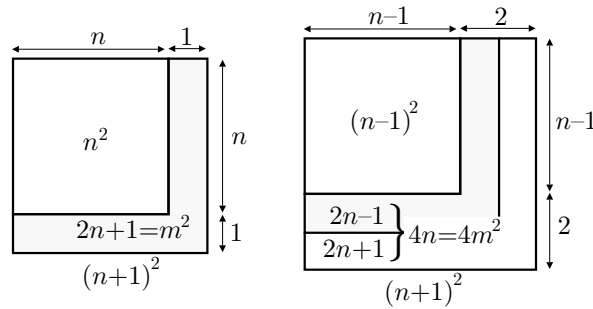
$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Per tant, només caldrà cercar n enter tal que $2n + 1$ sigui un quadrat m^2 . Llavors,

$$2n + 1 = m^2 \implies n = \frac{m^2 - 1}{2} \implies m \text{ és senar.}$$

Per tant, els nombres cercats són

$$\frac{m^2 - 1}{2}, \quad m, \quad \frac{m^2 - 1}{2} + 1 = \frac{m^2 + 1}{2} \quad \text{en què } m \text{ és senar.}$$



Quant a Plató, diu que va construir uns terns considerant un nombre parell $2m$, la diferència entre el quadrat de la seva meitat i 1, i la suma entre el quadrat de la seva meitat i 1. És a dir,

$$m^2 - 1, \quad 2m, \quad m^2 + 1.$$

En aquest cas es conjectura amb la conversió del quadrat de costat $n - 1$, mitjançant el gnòmon de superfície $4n$, en el quadrat de costat $n + 1$. En llenguatge algebraic,

$$(n - 1)^2 + 4n = (n + 1)^2.$$

Llavors, cal cercar n tal que $4n$ sigui un quadrat. És a dir $n = m^2$ i, per tant, tenim els terns

$$m^2 - 1, \quad \sqrt{4m^2} = 2m, \quad m^2 + 1 \quad \text{en què } m \text{ és natural.}$$

Anàlisi del procediment euclidià

Més endavant, Euclides en el lema 2 de la proposició 29 del llibre X dels *Elements*, proporciona un procediment per calcular tots els terns possibles. Una anàlisi de la proposició utilitzant la nostra notació algebraica podria ser el següent. Suposem

que tenim els enters x, y, z majors que 0, els quals satisfan $x^2 + y^2 = z^2$. Llavors,

$$z^2 - x^2 = y^2 \implies (z+x)(z-x) = y^2. \quad (4.1)$$

Per tant $z+x = u$ i $z-x = v$ són ambdós parells o ambdós senars, perquè si no fos així,

$$z = \frac{u+v}{2} \quad \text{i} \quad x = \frac{u-v}{2} \quad \text{no serien enters.}$$

A més, per la condició (4.1),

$$u = \lambda m^2 \quad \text{i} \quad v = \lambda n^2, \quad \lambda \in \mathbb{N},$$

perquè si això no fos cert, es podria escriure,

$$u = \alpha m^2 \quad \text{i} \quad v = \beta n^2, \quad \text{amb } \alpha \cdot \beta \neq k^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Això portaria a la contradicció,

$$y^2 = u \cdot v = \alpha m^2 \cdot \beta n^2 \neq k^2 m^2 n^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'aquesta manera arribem al resultat d'Euclides. Qualsevol tern pitagòric es pot expressar,

$$y = \lambda mn, \quad x = \frac{\lambda m^2 - \lambda n^2}{2}, \quad z = \frac{\lambda m^2 + \lambda n^2}{2},$$

amb la condició que λm^2 i λn^2 són ambdós parells o ambdós senars.

Amb aquest lema d'Euclides, la qüestió ha quedat totalment resolta. De totes maneres si donem valors a λ, m i n , observem que surten terns repetits. Per exemple,

λ	m	n	λm^2	λn^2	y	x	z
2	5	1	50	2	10	24	26
1	6	4	36	16	24	10	26

Llavors, la qüestió que es pot plantejar és la de cercar una expressió que proporcionï tots els terns pitagòrics de manera única. En primer lloc, a partir del resultat d'Euclides, és clar que les expressions

$$y = 2mn, \quad x = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2,$$

constitueixen una col·lecció de terns pitagòrics. I, també ho són encara que no posem condicions sobre m i n . Però, actuant d'aquesta manera en segueixen sortint de repetits. Una estratègia per enfrontar el nostre problema és la de trobar tots els terns anomenats *primitius*, —aquells tals que el màxim comú divisor de x, y i z és 1—, i després multiplicar el tern per un paràmetre per aconseguir-los tots. El teorema que determina tots els terns primitius, el qual no demostrem, diu:

Els enters x, y i z majors que 0 i primers entre si, satisfan l'equació $x^2 + y^2 = z^2$, si i només si, existeixen $m, n \in \mathbb{N}$ primers entre si i de diferent paritat, amb $m > n > 0$ tals que

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2.$$

A més la parella m, n és única per a cada tern x, y, z . Tots els altres terns, no primers entre si, es construeixen multiplicant els terns primitius per enters majors que 1.

La proposició II.8 de l'*Arithmetica* de Diofant

Després del segle III aC es produí un període de decadència en la matemàtica grega, del qual es recuperà una mica amb Ptolemeu [II] i posteriorment amb Diofant [II] i la seva *Arithmetica*. Aquesta obra està constituïda de tretze llibres dels quals només han sobreviscut els sis primers. Està dedicada quasi íntegrament a la resolució d'equacions i sistemes determinats o indeterminats, recordant l'àlgebra dels babilonis en no seguir el camí geomètric. Tanmateix les seves resolucions són exactes i no aproximades, i només s'hi troben implicats nombres enters o racionals. Els problemes que s'hi proposen són numèrics i concrets, la qual cosa no significa que els mètodes que utilitza no siguin generals. Avui en dia, anomenem també a les equacions indeterminades en nombres enters, equacions diofàntiques, i el seu estudi anàlisi indeterminada o diofàntica. Fem notar que, per primer cop, s'utilitzen notacions abreviades. Els nombres desconeguts reben el nom d'*arithmos* ($\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$) els quals es representen amb la lletra ς i juguen un paper equivalent a la nostra incògnita x . Per exemple, utilitza les abreviatures

$$\Delta^{\Upsilon} \Delta \longleftrightarrow x^4, \quad K^{\Upsilon} \longleftrightarrow x^3, \quad \Delta^{\Upsilon} \longleftrightarrow x^2, \quad \overset{\circ}{M} \longleftrightarrow x^0.$$

Tenint en compte que els nombres eren designats per les lletres de l'alfabet,³⁴ el polinomi $x^4 + 3x^3 + x^2 + 8x + 2$ s'escriu $\Delta^{\Upsilon} \Delta \alpha K^{\Upsilon} \gamma \Delta^{\Upsilon} \alpha \varsigma \eta \overset{\circ}{M} \beta$.

A la proposició 8 del llibre II trobem plantejat el problema de descompondre un quadrat en suma de dos quadrats, que volem tractar perquè dóna un mètode totalment diferent de trobar terns pitagòrics. En fem la presentació, i a l'activitat 4.2.2 en proposarem l'estudi:

Proposició II.8: Descompondre un quadrat donat en dos quadrats.

Si volem descompondre 16 en dos quadrats i suposem que el primer és un quadrat d'un arithmos, l'altre tindrà 16 unitats menys un quadrat d'arithmos i, per tant, 16 unitats menys un quadrat d'arithmos són un quadrat.

³⁴Podeu estudiar la numeració grega a PEYROUX [1993].

Formem un quadrat d'un conjunt qualsevol d'arithmos disminuït en tantes unitats com té l'arrel de 16, i sigui el quadrat de 2 arithmos menys 4 unitats. Aquest quadrat tindrà així 4 quadrats d'arithmos i 16 unitats menys 16 arithmos, que igualarem a 16 unitats menys 1 quadrat d'arithmos, i sumant a un i altre costat els termes negatius i restant els semblants, resulta que 5 quadrats d'arithmos equivalen a 16 arithmos, i per tant, 1 arithmos val $16/5$. Així un dels quadrats és $256/25$ i l'altre $144/25$, i la seva suma és $400/25$, és a dir 16.

4.2.3 El teorema de Fermat

En un exemplar d'una edició de l'*Arithmetica* de Diofant, traduïda al llatí per Claude Gaspard Bachet de Méziriac l'any 1621, es troba un comentari manuscrit de Pierre de Fermat.³⁵ En el marge de la pàgina on es troba la proposició II.8, la qual permet donar un mètode per trobar terns pitagòrics, Fermat va escriure:

Cubum in duos cubos aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos et generaliter nullam in infinitum, ultra quadratum, potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere. Cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi; hanc marginis exiguitas non caperet.³⁶

És a dir, afirma que si n és un enter qualsevol més gran que 2, és impossible trobar tres nombres enters x , y , i z no nuls tals que $x^n + y^n = z^n$.

Observem que Fermat s'inspira en el problema de Diofant i afirma, assegurant tenir-ne la demostració, que la generalització del càlcul de terns pitagòrics a exponents majors que 2 és impossible. D'alguna manera el teorema de Pitàgores ha sigut el responsable de l'aparició d'un dels enigmes matemàtics més grans per a la posteritat. En cap dels escrits de Fermat se n'ha pogut trobar una demostració i cap matemàtic en va assolir una de completa fins que l'any 1995 ho feu Andrew Wiles, després d'un descomunal esforç desenvolupat al llarg de més de tres segles per la comunitat matemàtica.³⁷

³⁵Fermat [1601-1655] es dedicà professionalment a les Lleis, era advocat i conseller del Parlament de Toulouse. Les matemàtiques van ser per a ell, com per a la majoria de practicants de la seva època, una afició, en no estar considerades professionalment i no impartir-se a les Universitats. Entre les seves aportacions a la Matemàtica tenim la seva obra *Ad locos planos et solidos Isagoge*, la qual juntament amb la *Géométrie* del filòsof René Descartes [1596-1650] introduí la geometria analítica, en què es fa un tractament algebraic de la geometria gràcies a la introducció de coordenades.

³⁶No és possible dividir un cub en dos cubs, una potència quarta en dues potències quartes i, en general, una potència superior a la segona en dues potències de mateix exponent. Jo n'he descobert una demostració meravellosa, que l'exigüitat d'aquest marge no pot contenir.

³⁷Per a un treball monogràfic sobre el teorema de Fermat, vegeu OC.GTF [1995].

Fermat utilitzava un mètode del qual es proclama inventor com es desprèn d'una carta a Carcavi [1659], qui la comunicà a Huygens.³⁸

I, com que els mètodes que es troben en els llibres eren insuficients per demostrar unes proposicions tan difícils, vaig trobar finalment una ruta singular per fer-ho. Vaig anomenar aquesta manera de demostrar el *descens infinit*, i me'n vaig servir al començament per demostrar proposicions negatives com, per exemple, que no hi ha cap nombre menor en una unitat d'un múltiple de tres, que sigui composició d'un quadrat i del triple d'un altre quadrat; que no hi ha cap triangle rectangle, expressat en nombres enters, tal que la seva àrea sigui un quadrat.

El fet que l'última propietat citada permeti una demostració immediata del teorema per al cas $n = 4$,³⁹ fa pensar que Fermat creia que el cas general tindria una demostració accessible mitjançant el seu mètode, però és ingenu pensar que l'aconseguís.

Presentarem el mètode del *descens infinit* amb l'exemple de la demostració de la incommensurabilitat de la diagonal i el costat d'un quadrat o, el que és equivalent, la irracionalitat de $\sqrt{2}$. Aquest problema és, també, equivalent a demostrar que $x^2 = 2y^2$ no té solucions enteres positives. Efectivament,

Si x_0 i y_0 són solucions de l'equació tindríem $x_0^2 = 2y_0^2$ i haurien de ser parells. Llavors, $x_0^2/4 = 2y_0^2/4$, és a dir

$$\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{y_0}{2}\right)^2.$$

O sigui, que hem obtingut una solució $x_1 = x_0/2 < x_0$ i $y_1 = y_0/2 < y_0$. D'aquesta manera, repetint el procés, podem obtenir dues successions x_n i y_n infinites i decreixents d'enters positius. Això no pot ser, perquè en un nombre finit de passos exhaurim els enters positius menors que un enter donat. Per tant l'equació no té solució en nombres enters.

Activitats 4.2

1. Justifiqueu les afirmacions següents:

³⁸Extret de NOGUÈS [1932], 15 de l'edició de 1992.

³⁹Sembla ser que aquest teorema del triangle és l'únic, en el terreny de la teoria de nombres, del qual Fermat va deixar una demostració. Tanmateix, i d'acord amb EDWARDS [1977], 11–14 de la reimpressió de 1996, és una demostració bastant fosca. Se'n pot trobar la interpretació a la referència citada i, també, a MAHONEY [1973], 353–354 de l'edició de 1994. Vegeu la demostració de Fermat a la secció 8.5.1 en què s'ha utilitzat la traducció de Tannery a RASHED-HOUZEL-CHRISTOL [1999], Vol. 1, 153–154.

i) Els terns, citats per Procle, i atribuïts a Pitàgores, al principi de la secció 4.2.2 són primitius.

ii) Entre els terns atribuïts, per Procle, a Plató, n'hi ha de primitius i de no primitius.

iii) No hi ha cap triangle rectangle de costats enters tal que la diferència entre la hipotenusa i un catet sigui un nombre primer senar, i tals que els seus costats formin un tern primitiu. A més, tots són semblants a algun dels triangles, que resulten dels terns que Procle atribueix a Pitàgores.

\mathcal{S}

2. Observem que a la proposició II.8 de l'Aritmètica de Diofant es tracta de resoldre l'equació $x^2 + y^2 = 16$ en nombres racionals. El que fa Diofant és agafar un arithmos x com incògnita, i identificar $y^2 = 16 - x^2$ amb $y^2 = (2x - 4)^2$.

i) Interpreteu els passos de Diofant fins trobar x , i cerqueu el tern pitagòric primitiu relacionat amb al solució.

ii) Repetiu el procediment anterior de manera que “el conjunt qualsevol d'arithmos” que s'agafa de sortida sigui 5.

\mathcal{S}

iii) Generalitzeu el mètode anterior per a l'equació $x^2 + y^2 = z^2$, considerant

$$y = \frac{m}{n} x - z.$$

\mathcal{S}

3. Cerqueu les solucions de les solucions enteres positives de $x^2 + y^2 = 2z^2$.

\mathcal{S}

4. Demostreu el teorema de Fermat per a $n = 4$, a partir de que no existeix cap triangle rectangle tal que la seva àrea sigui un quadrat.

Indicació: Reduïu el problema a demostrar que l'equació $x^4 - z^4 = t^2$ no té solucions enteres.

\mathcal{S}

5. Elaboreu un programa amb el DERIVE que proporcioni k terns pitagòrics primitius $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$ consecutius a partir d'uns valors inicials $a = n$ i $b = m$, amb $n > m$. Per exemple, els quatre primers terns primitius consecutius a partir de $n = 5$ i $m = 4$ serien

a	b	$a^2 - b^2$	$2ab$	$a^2 + b^2$
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53

□

4.3 El càlcul d'arrels d'ordre n i la potència d'un binomi

La recerca d'algoritmes numèrics és un dels centres d'interès que mou la matemàtica àrab a partir del segle IX. En aquest punt, aquesta és hereva de la matemàtica babilònica i índia. La raó del desenvolupament d'aquestes tècniques rau en el seu lligam amb l'àlgebra i les observacions astronòmiques. Les innovacions que introduïren aquests matemàtics, a part de la quantitat d'algoritmes que descobriren, van consistir en l'interès per la seva justificació, i per la comparació dels algoritmes obtinguts de cara a obtenir millors aproximacions en els resultats de la seva aplicació. En aquesta secció tractarem els algoritmes d'extracció d'arrels dels quals trobem testimonis en les diferents tradicions. Aquests foren recollits pels àrabs, els quals els generalitzaren per a qualsevol índex de l'arrel, i els portaren a la introducció de les fraccions decimals per aconseguir aproximacions dels resultats, tan acurades com es volgués, en què les expressions de les parts entera i fraccionària es poguessin calcular de la mateixa manera.⁴⁰ Cal notar també la influència que, possiblement, aquest càlcul va tenir en l'estudi dels coeficients de la potència d'un binomi i en el descobriment del triangle aritmètic. Hem pogut comprovar en capítols anteriors, com els mètodes d'aproximació per al càlcul d'arrels quadrades implicaven la intervenció del quadrat d'un binomi. L'anàlisi que farem del problema, per al cas de les arrels cúbiques, mostrarà l'implicació que té la potència del binomi per a exponents superiors.

Abans d'entrar en matèria, fem nostres les paraules de Guido Ramellini de la *Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»*,⁴¹ i remarcuem que en l'estudi d'aquesta secció, tot i els llargs càlculs que s'hi desenvoluparan, no es pretén de cap manera incidir en la importància de l'aprenentatge memorístic d'algoritmes per aproximar arrels amb paper i llapis després de llargues llistes d'operacions; el que es pretén és despertar l'interès en la recerca dels algoritmes perquè pot desenvolupar habilitats matemàtiques importants.

4.3.1 Breu recorregut per les diferents tradicions

De les tradicions més antigues sabem que els babilonis estaven interessats en aquest problema, perquè existeixen tauletes de nombres i les seves arrels cúbiques, encara que no sabem res dels mètodes per obtenir-les. Se sap, però, que per als nombres que no eren a les taules utilitzaven una interpolació lineal.⁴² Més endavant, entre els grecs, no trobem cap escriptor que hagi donat un mètode per al càlcul d'arrels cúbiques. L'únic exemple d'extracció d'una arrel cúbica el trobem

⁴⁰Vegeu RASHED [1997], 60–69, i RASHED [1984], 115–122.

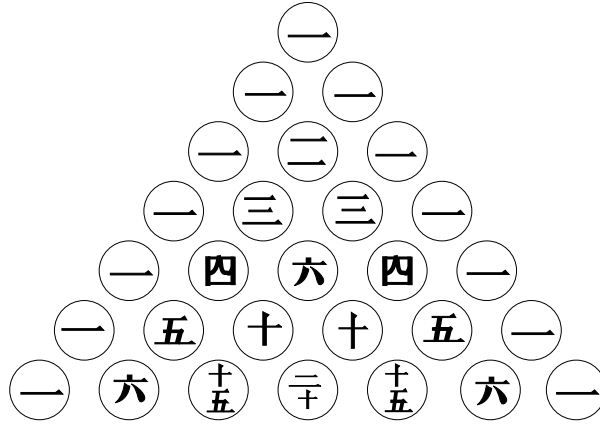
⁴¹Vegeu RAMELLINI [2000].

⁴²Vegeu BOYER [1968], 58 de l'edició espanyola de 1986.

a la *Mètrica* d'Heró. Hi trobem l'aproximació racional $4\frac{9}{14}$ de $\sqrt[3]{100}$.⁴³

Ara direm com calcular el costat cúbic [arrel cúbica] de 100. Agafem els cubs més propers a 100, el que ho és per excés i el que ho és per defecte, es a dir, 125 i 64. L'excés d'un és 25, i el defecte de l'altre és 36. Multipliquem 5 per 36, dóna 180. Afegim 100, dóna 280. [Dividim 180 per 280, dóna 9/14]. Afegim-ho al costat més petit, dóna $4\frac{9}{14}$. Aquesta serà l'aproximació del costat cúbic de 100 unitats.

A la Xina tenien algorismes per al càlcul de les arrels quadrades i cúbiques, com a mínim, en data anterior al segle II, tal com es mostra en els *Nou capítols sobre l'art matemàtic*. En el segle XIII, Yang Hui comenta aquesta obra i mostra un diagrama sota el títol “la font del mètode d'extracció d'arrels”. Allí diu que Jia Xian el va inventar en el segle XI, i que l'usava per a l'extracció d'arrels d'ordre superior a 2. Aquest diagrama no és altre que l'anomenat triangle aritmètic de Pascal. S'hi mostren els coeficients binomials per a potències diverses. En la figura adjunta en reproduïm un fragment.⁴⁴



Entre els matemàtics indis, concretament a l'*Aryabhatiya* d'Aryabhata I, escrit l'any 499, trobem una regla per al càlcul d'arrels cúbiques.⁴⁵

Es divideix el “segon aghana” per tres vegades el quadrat de l'arrel cúbica del “ghana” precedent. El quadrat del [quocient] multiplicat per

⁴³HEATH [1921], vol I, 63 de l'edició de 1981, diu que els grecs, tot i tenir un mètode no explicat com demostra l'escrit d'Heró, possiblement en tenien prou amb una taula de cubs per als seus propòsits. Per a una recerca de l'algoritme emprat vegeu HEATH [1921], vol 2, 341–342, i KNORR [1986], 191–194 de l'edició de 1993.

⁴⁴Fragment dissenyat segons una reproducció del *Yongle dadian* (*Gran Enciclopèdia del període-regne Yongle*) [1407], trobada a MARTZLOFF [1987], 231 de l'edició anglesa de 1997.

⁴⁵Traduïm de KATZ [1993], 202.

tres vegades la “purva”⁴⁶ es resta del “primer aghana”, i el cub [del quocient de la divisió anterior] es resta del “ghana”.

En fem la interpretació que quedarà aclarida amb l'anàlisi que efectuarem a la secció 4.3.2. Notarem que en la descripció de la regla hi falta algun pas, la qual cosa, en opinió de Katz, és deguda probablement a les limitacions de la versificació sànskrita de l'escrit.

L'ordre de les unitats augmenta de dreta a esquerra. Els noms que es donen als diferents ordres són:

Nom	Ordre-lloc
<i>ghana</i>	→ 1r, 4t, 7è, ...
primer <i>aghana</i>	→ 2n, 5è, 8è, ...
segon <i>aghana</i>	→ 3r, 6è, 9è, ...

Interpretació sobre el càlcul de $\sqrt[3]{9625}$

Presentem els passos de la regla que podeu visualitzar en l'esquema de més avall.

- 1) (a) *ghana* precedent: 9.
 (b) Arrel cúbica del *ghana* precedent (per defecte): 2.
 (c) Segon *aghana* (no explica que es compon del residu que produeix $2^3 = 8$ i del segon *aghana* 6 del nombre): $(9 - 8) \cdot 10 + 6 = 16$.
 (d) Tres vegades el quadrat de l'arrel cúbica del *ghana* precedent: $3 \cdot 2^2 = 12$.
 (e) Divisió de (c) entre (d): $16 = 12 \cdot 1 + 4$.
- 2) Aquí no especifica que s'ha de considerar el residu de la divisió anterior. Hauria de dir alguna cosa com ara «es resta del segon aghana, tres vegades el quocient pel quadrat del purna.»: $16 - 1 \cdot 3 \cdot 2^2 = 16 - 12 = 4$.
- 3) (a) Quadrat del quocient per tres vegades el *purna*: $1^2 \cdot 3 \cdot 2 = 6$.
 (b) Primer *aghana*: $4 \cdot 10 + 2 = 42$.
 (c) (b)-(a): $42 - 6 = 36$.
- 4) (a) Cub del quocient: $1^3 = 1$.
 (b) *ghana*: $36 \cdot 10 + 5 = 365$.
 (c) (b)-(a): $365 - 1 = 364$.

⁴⁶*purva*: La part de l'arrel cúbica que ja s'ha trobat.

$$\begin{array}{r|l}
 9 & 6 \ 2 \ 5 \\
 -8 & \\
 \hline
 1 & 6 \\
 -1 & 2 \\
 \hline
 & 4 \ 2 \\
 & -6 \\
 \hline
 & 3 \ 6 \ 5 \\
 & -1 \\
 \hline
 & 3 \ 6 \ 4
 \end{array}
 \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{l}
 2 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 2^3 = 8 \\
 \hline
 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = 12 \\
 \hline
 3 \cdot 1^2 \cdot 2 = 6 \\
 \hline
 1 \cdot 1^3 = 1
 \end{array}$$

Hem obtingut l'aproximació entera $\sqrt[3]{9625} \simeq 21$, amb residu 364. És a dir, $9625 = 21^3 + 364$.

S'ha pogut comprovar que s'hi troben implicats els coeficients 1, 3, 3 i 1, del cub d'un binomi. En el cas dels indis sembla que no es pot dir que el càlcul d'arrels provoqués, inicialment, l'interès en l'estudi d'aquests coeficients. Els trobem, uns segles abans, implicats en un altre tipus de problemes relacionats amb la poesia. Es tractava de repartir sons curts i llargs en composicions poètiques de diferent mètrica [nombre de síl·labes].⁴⁷ Aquest qüestió és la que desenvolupà Pingala [200 aC] en el *Chandahsutra* [*Regles dels metres*]. Així les maneres de repartir 4 sons en una composició de 4 síl·labes serien:

Sons	Nombre de maneres
4 llargs	1
3 llargs i 1 curt	4
2 llargs i 2 curts	6
1 llarg i 3 curts	4
4 curts	1

Halayudha [x-xI], en el seu comentari a l'obra de Pingala, introdueix el triangle aritmètic.⁴⁸ Ho fa per presentar una descripció “gràfica” de les possibles combinacions de sons per a les diferents mètriques.⁴⁹ En definitiva, la qüestió combinatòria, estretament relacionada amb el càlcul dels coeficients del triangle, es desenvolupa força aviat a l'Índia. A part de l'obra de Pingala, es troba el càlcul de combinacions de n elements agafats en grups de 2, 3, etc., en el *Bhagavati-Sutra* [300 aC]. Aquest càlcul es desenvolupa en els segles següents, i

⁴⁷Un article interessant, relacionat en aquest cas amb el recompte de possibles esquemes de rimes d'una composició poètica, es troba a KAESER [2000].

⁴⁸És la primera vegada que s'introdueix a l'Índia, segons el que sabem, i a la mateixa època que els matemàtics àrabs.

⁴⁹Vegeu la secció 8.6.1 i BAG [1979], 189–193.

Baskhara II [1150] dóna les fórmules per a les combinacions, permutacions simples i permutacions de 2 elements que es repeteixen un nombre fix de vegades.⁵⁰

Entre els àrabs trobem les primeres notícies de l'extracció d'arrels cúbiques als voltants de l'any 1000. Al-Nasawi [XI] és el primer del qual tenim una obra que indica un procediment basat en els coeficients binomials 1, 3, 3 i 1. A més si la part entera de $\sqrt[3]{N}$ és a , dóna per a la part no entera l'aproximació⁵¹

$$\frac{N - a^3}{3a^2 + 3a + 1}.$$

També se sap, que a la mateixa època, Abu-l-Wafa [940–998], al-Biruni [973–1048], i Omar Khayyam [1048–1131] escriuen sobre l'extracció d'arrels d'ordres superiors a 2, encara que no es conserven els escrits. Finalment citem as-Samaw'al [XII] com el primer autor de qui es conserva un text d'àlgebra, *al-Bahir*, en què es troba el triangle aritmètic, les seves propietats, i la fórmula de la potència del binomi, extretes d'un text d'al-Karaji [X–XI]. Allí explica la regla de formació del triangle aritmètic, equivalent a la nostra expressió:⁵²

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}.$$

Citem finalment que del *Tractat d'Aritmètica* d'as-Samaw'al [1172], es desprèn que el càlcul d'arrels està estretament relacionat amb la invenció de les fraccions decimals en els segles XI i XII. Aquestes assoleixen un estatus propi definitiu a *La clau del calculista* d'Al-Kashi en el segle XV.⁵³

4.3.2 Anàlisi per a la recerca d'un algoritme del càlcul d'arrels

Enfrontarem aquesta tasca amb l'exemple del càlcul de $\sqrt[3]{73542016}$. Utilitzant el nostre simbolisme algebraic seguirem la idea que es troba en l'obra dels matemàtics citats. En ser el radicand un nombre de vuit xifres, la seva arrel serà un nombre x tal que $10^2 < x < 10^3$. Això implica que la seva part entera es pot escriure,

$$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = abc.$$

L'estratègia consisteix a buscar ordenadament, des de l'ordre més gran al més petit, els nombres a , b i c d'unitats implicats.⁵⁴

⁵⁰Vegeu CHAKRAVARTY [1932].

⁵¹Estudiarem aquesta aproximació en la secció 4.3.2.

⁵²Vegeu RASHED [1972] i RASHED [1984], 73–78.

⁵³Vegeu RASHED [1978] i RASHED [1984], 93–145.

⁵⁴Després de l'anàlisi hem fet uns esquemes per visualitzar els algoritmes resultants.

- Cerquem el màxim $a \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tal que

$$(a \cdot 10^2)^3 \leq 73542016.$$

Això implica $a^3 \leq 73$ i, per tant $a \leq 4$. Un tempteig proporciona,

$$\boxed{a = 4} \implies 4^3 \cdot 10^6 = 64000000.$$

El nombre cercat serà $4 \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 4bc$, i el residu de considerar $4 \cdot 100 = 400$ com a primera aproximació de l'arrel és

$$73542016 - 64000000 = 9542016.$$

- Cerquem el màxim $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tal que

$$(4 \cdot 10^2 + b \cdot 10)^3 \leq 73542016.$$

Utilitzant el desenvolupament del cub d'un binomi obtenim:

$$3(4 \cdot 100)^2(b \cdot 10) + 3(4 \cdot 100)(b \cdot 10)^2 + (b \cdot 10)^3 \leq 9542016.$$

Això implica $3 \cdot 4^2 \cdot b = 48 \cdot b \leq 95$ i, per tant, $b \leq 1$. Un tempteig proporciona,

$$\boxed{b = 1} \implies \begin{cases} 3 \cdot 1 \cdot 4^2 \cdot 10^5 = 4800000 \\ 3 \cdot 1^2 \cdot 4 \cdot 10^4 = 120000 \\ 1 \cdot 1^3 \cdot 10^3 = 1000 \end{cases} \implies \frac{4921000}{4921000} < 9542016.$$

El nombre cercat serà $4 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + c = 41c$, i el residu de considerar $4 \cdot 100 + 1 \cdot 10 = 410$ com a segona aproximació de l'arrel és

$$9542016 - 4921000 = 4621016.$$

- Cerquem el màxim $c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tal que

$$(4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + c)^3 = (41 \cdot 10 + c)^3 \leq 73542016.$$

Tornem a desenvolupar el cub d'un binomi i obtenim:

$$3(41 \cdot 10)^2c + 3(41 \cdot 10)c^2 + c^3 \leq 4621016.$$

Això implica $3 \cdot 41^2 \cdot c = 5043 \cdot c \leq 46210$ i, per tant, $c \leq 9$. Un tempteig proporciona,

$$\boxed{c = 8} \implies \begin{cases} 3 \cdot 8 \cdot 41^2 \cdot 10^2 = 4034400 \\ 3 \cdot 8^2 \cdot 41 \cdot 10^1 = 78720 \\ 1 \cdot 8^3 \cdot 10^0 = 512 \end{cases} \quad \frac{\quad}{4113632} < 4621016.$$

El nombre cercat serà $4 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 8 = 418$, i el residu de considerar 418 com aproximació entera per defecte de l'arrel és

$$4621016 - 4113632 = 507384.$$

És a dir, $73542016 = 418^3 + 507384$.

Una primera visualització esquemàtica de les actuacions a realitzar, les presentem a l'esquema següent:

7 3	5 4 2	0 1 6	4	
- 6 4	0 0 0	0 0 0	1	$4^3 \cdot 10^6 = 64 \cdot 10^6$
9 5	4 2 0	1 6		$3 \cdot 1 \cdot 4^2 \cdot 10^5 = 48 \cdot 10^5$
- 4 8	0 0 0	0 0 0		$3 \cdot 1^2 \cdot 4 \cdot 10^4 = 12 \cdot 10^4$
4 7 4	2 0 1	6		$1 \cdot 1^3 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^3$
- 1 2	0 0 0	0 0 0	8	$3 \cdot 8 \cdot 41^2 \cdot 10^2 = 40344 \cdot 10^2$
4 6 2 2	0 1 6			$3 \cdot 8^2 \cdot 41 \cdot 10^1 = 7872 \cdot 10^1$
- 1	0 0 0	0 0 0		$1 \cdot 8^3 = 512$
4 6 2 1 0	1 6			
- 4 0 3 4 4	0 0			
5 8 6 6 1	6			
- 7 8 7 2	0			
5 0 7 8 9 6				
- 5 1 2				
5 0 7 3 8 4				

Si prescindim de les xifres, amb caràcters petits, que no tenen rellevància en el desenvolupament dels càlculs si es conserven les posicions dels nombres restants,

tenim l'esquema:

$\begin{array}{r} 7\ 3\ 5\ 4\ 2\ 0\ 1\ 6 \\ - 6\ 4\ \\ \hline 9\ 5\ \\ - 4\ 8\ \\ \hline 4\ 7\ 4\ \\ - 1\ 2\ \\ \hline 4\ 6\ 2\ 2\ \\ - 1\ \\ \hline 4\ 6\ 2\ 1\ 0\ \\ - 4\ 0\ 3\ 4\ 4\ \\ \hline 5\ 8\ 6\ 6\ 1\ \\ - 7\ 8\ 7\ 2\ \\ \hline 5\ 0\ 7\ 8\ 9\ 6\ \\ - 5\ 1\ 2\ \\ \hline 5\ 0\ 7\ 3\ 8\ 4\ \end{array}$	4 1 8	$4^3 = 64$ <hr/> $3 \cdot 1 \cdot 4^2 = 48$ $3 \cdot 1^2 \cdot 4 = 12$ $1 \cdot 1^3 = 1$ <hr/> $3 \cdot 8 \cdot 41^2 = 40344$ $3 \cdot 8^2 \cdot 41 = 7872$ $1 \cdot 8^3 = 512$
--	-----------------------------------	---

De l'esquema anterior es desprèn la manera de portar l'algoritme, el qual representat en una forma més simbòlica seria:

N	a	$a^3 = \alpha_1$
$\begin{array}{r} - \alpha_1 \\ \hline N - \alpha_1 \\ - \beta_1 \\ \hline N - \alpha_1 - \beta_1 \\ - \beta_2 \\ \hline N - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 \\ - \beta_3 \\ \hline N - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 \\ - \gamma_1 \\ \hline N - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \gamma_1 \\ - \gamma_2 \\ \hline \dots \quad \dots \end{array}$	b c	$\binom{3}{1} \cdot b \cdot a^2 = \beta_1$ $\binom{3}{2} \cdot b^2 \cdot a = \beta_2$ $\binom{3}{3} \cdot b^3 \cdot a^0 = \beta_3$ <hr/> $\binom{3}{1} \cdot c \cdot (10a + b)^2 = \gamma_1$ $\binom{3}{2} \cdot c^2 \cdot (10a + b)^1 = \gamma_2$ \dots

Si s'ha observat amb atenció el decurs de la recerca, es pot entendre la regla d'Aryhabata que hem citat al principi de la secció anterior.⁵⁵ Al-Kashi calcula a partir dels mateixos fonaments, —l'adequada utilització de les potències de les unitats cercades i dels coeficients binomials—, $\sqrt[5]{44240899506917}$ i obté el valor 536 i el residu 21, d'on resulta l'aproximació $536\frac{21}{414237740281}$.⁵⁶ L'obtenció de la part fraccionària és el que tractarem a la secció següent.

4.3.3 Part fraccionària de l'arrel d'un nombre enter

El càlcul aproximat de les parts fraccionàries de les arrels quadrades era practicat des de l'antiga Babilònia. Hem citat alguns procediments basats en concepcions geomètriques. També hem citat una fórmula d'al-Nasawi, al final del primer mil·lenni, que proporcionava l'aproximació per a les arrels cúbiques. As-Samaw'al generalitza el mètode per a les arrels de qualsevol ordre, i més tard el tornem a trobar a al-Khasi. Si a és la part entera de $\sqrt[n]{N}$ i $r > 0$ el residu enter, llavors la fórmula que proporciona as-Samaw'al és, en la nostra notació:

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + r} = a + \frac{r}{\binom{n}{1}a^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}a + 1}.$$

As-Samaw'al no en dóna cap justificació, però es pot conjecturar que surt d'una aplicació del desenvolupament del binomi i una interpolació lineal.⁵⁷ Efectivament,

$$\begin{aligned} N = a^n + r &\implies \sqrt[n]{a^n + r} = a + \varepsilon \implies N = (a + \varepsilon)^n = \\ &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\varepsilon + \binom{n}{2}a^{n-2}\varepsilon^2 + \dots + \binom{n}{n}\varepsilon^n. \end{aligned}$$

Llavors, en ser $a < a + \varepsilon < a + 1$, si aproximem el valor de ε fent la interpolació lineal, tenim:

$$\frac{(a + \varepsilon) - a}{(a + 1) - a} \approx \frac{(a + \varepsilon)^n - a^n}{(a + 1)^n - a^n} = \frac{r}{(a + 1)^n - a^n}.$$

D'aquí resulta l'aproximació,

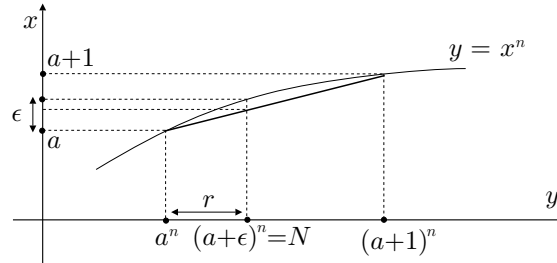
$$\varepsilon \approx \frac{r}{\binom{n}{1}a^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}}.$$

En el gràfic adjunt es veu que l'aproximació obtinguda per a ε , a partir de la línia recta, és per defecte.

⁵⁵Aquest algoritme, optimitzat pel que fa a la disposició dels coeficients i operacions, encara s'ensenyava a la secundària, en la primera meitat d'aquest segle. Vegeu, per exemple, BARDEY [1936], 103-105, i SALINAS-BENÍTEZ [1940] 177-191.

⁵⁶Vegeu l'activitat 4.3.1.

⁵⁷Vegeu BERGGREN [1986], 50-52, 61-63, RASHED [1978], RASHED [1984], 115-117 i YOUSCHKEVITCH [1976], 77-78.



Si apliquem la fórmula al càlcul aproximat de la part fraccionària de l'arrel $\sqrt[3]{73542016}$, de l'exemple de la secció anterior, obtenim

$$\varepsilon \approx \frac{r}{3a^2 + 3a + 1} = \frac{507384}{3 \cdot 418^2 + 3 \cdot 418 + 1} = \frac{507384}{525427},$$

la qual aproxima amb un error menor que 10^{-4} . Així, el resultat del nostre exemple és,

$$\sqrt[3]{73542016} \approx 418 \frac{507384}{525427}.$$

Activitats 4.3

- B** 1. Hem citat que al-Khasi, en el segle XV, aconseguí per a $\sqrt[5]{44240899506917}$, l'aproximació $536 \frac{21}{414237740281}$. Generalitzeu l'algoritme que hem donat per a les arrels cúbiques per trobar la part entera d'aquesta arrel, i apliqueu la fórmula d'aquesta secció per aproximar la part fraccionària.

□

4.4 L'algoritme d'Euclides

A la introducció del capítol, comentàvem que l'interès en l'estudi dels nombres i les seves propietats, amb independència de les seves aplicacions, sembla aparèixer amb els primers filòsofs grecs, i de manera especial amb Pitàgores. Així es pot entendre el seu interès en els diversos tipus de classificacions que feren dels nombres, depenent del tipus de propietat estudiada. Per exemple, mostraren gran interès en l'estudi, entre d'altres, dels divisors d'un nombre; dels nombres primers; dels nombres perfectes, els qual eren iguals a la suma dels seus divisors propis; dels nombres figurats per la seva propietat gnomònica que els feia “semblants” entre si. Euclides, dedicà tres llibres sencers dels seus *Elements*, —VII, VIII i IX—, a l'Aritmètica, tot i que la tracta amb llenguatge geomètric. Representa els nombres amb segments, i substitueix els termes a divideix b , per a mesura b , i b és múltiple de a , per b és mesurat per a . Dedicarem aquesta secció a una breu presentació dels teoremes VII.1-2 dels *Elements*, els quals utilitzarem en seccions posteriors.

• **Teorema VII.1**

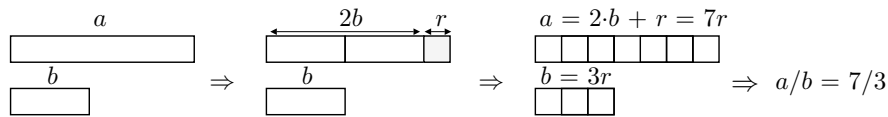
Donats dos nombres diferents, i essent restat successivament el menor del major, si el nombre que queda no mesura mai l'anterior fins que quedi una unitat, els nombres inicials són primers entre si.

• **Teorema VII.2**

Donats dos nombres primers entre si, trobar la seva mesura comuna màxima.

La demostració consisteix en un procés que ens sembla bastant natural si pensem en com comparariem l'extensió de dos segments a i b "materials" commensurables, si no disposéssim de cap més segment o unitat de mesura en forma, per exemple, de divisions en una cinta mètrica. Sembla raonable intentar mesurar el segment a gran amb el petit b , i si el conté un nombre sencer de vegades tenim el problema resolt. Si no és així, podríem fer una marca en el segment gran, que determinés l'extensió r_1 que queda per mesurar. Amb aquest segment r_1 podríem intentar mesurar b . Si b el conté un nombre q_2 sencer de vegades ja estaria; només caldria multiplicar el nombre q_1 de vegades que a conté b , pel nombre q_2 de vegades que b conté r_1 i sumar-li 1, per obtenir el nombre de vegades que a conté r_1 . La relació entre a i b , visualitzada en un cas concret, seria,

$$\frac{(q_1 \cdot q_2 + 1) \cdot r_1}{q_2 \cdot r_1} = \frac{q_1 \cdot q_2 + 1}{q_2} .$$



En cas contrari s'hauria de seguir amb el procediment, fins trobar un r_n que els mesurés tots dos. En aquest cas, el procés té un nombre finit de passos, perquè els segments han estat agafats de mesura entera, i la mesura del segment r_n final resulta ser el màxim comú divisor dels dos nombres representats.⁵⁸ En el cas que el segment r_n final fos 1 els dos nombres inicials serien primers entre si. En

⁵⁸ Observem que aquest és un procediment molt semblant al que utilitzàvem per comparar el costat i la diagonal del quadrat, a la secció 1.2.3, pàgina 19. Allí el problema es presentava quan el procediment es podia repetir tantes vegades com volguéssim sense arribar a mesurar totalment els segments.

llenguatge simbòlic escriuríem

$$\begin{aligned}
 a &= q_1 \cdot b + r_1 \\
 b &= q_2 \cdot r_1 + r_2 \\
 r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3 \\
 &\vdots \\
 r_{n-2} &= q_n \cdot r_{n-1} + r_n \\
 r_{n-1} &= q_{n+1} \cdot r_n,
 \end{aligned}$$

en què r_n és el màxim comú divisor de a i b . Aquest algoritme s'anomena *algoritme d'Euclides* i se sol representar amb l'esquema següent, al qual adjuntem un exemple d'aplicació:

	q_1	q_2	\cdots	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}			2	5	2
a	b	r_1	\cdots	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n		360	165	30	15
r_1	r_2	\cdots	r_{n-1}	r_n	0			30	15	0	

A l'exemple, hem obtingut 15 com a màxim comú divisor de 360 i 165.

4.5 Anàlisi lineal indeterminada

Els matemàtics de la Xina i l'Índia, es plantegen el problema de resoldre, en nombres enters, equacions lineals amb diverses incògnites, i sistemes d'equacions lineals amb un nombre d'incògnites superior al nombre d'equacions. L'interès original en aquesta qüestió està relacionat, en molts casos, amb els problemes de l'astronomia clàssica. Aquesta necessitava de certs procediments per a la divisió del temps, de cara a la confecció de calendaris i a les demandes de l'astrologia.⁵⁹ Aquests procediments es basaven en càlculs sobre el temps transcorregut entre diferents posicions de la Lluna, el Sol, o els planetes sobre el fons dels estels fixos. Per il·lustrar-ho d'una manera senzilla, proposem un exemple amb dades fictícies.

Exemple

Es tracta de fer un recompte dels dies passats des de l'última vegada que dos planetes A i B estaven en conjunció en un punt determinat, és a dir tenien la

⁵⁹Vegeu OC.HGS [1957–64], volum I, 185 de l'edició espanyola de 1988.

mateixa longitud λ_0 eclíptica.⁶⁰ Les dades que hem recollit són:

- El planeta A tarda 90 dies solars en recórrer tot el cercle de l'eclíptica, mentre el planeta B ho fa en 33 dies.
- Han passat 19 dies des que el planeta A va completar un nombre enter de voltes seguint l'eclíptica des de λ_0 .
- Han passat 28 dies des que el planeta B va completar un nombre enter de voltes seguint l'eclíptica en el mateix sentit, des de λ_0 .

Si anomenem,

N : el nombre de dies transcorreguts des de l'instant de la conjunció,

x : el nombre enter de revolucions del planeta A ,

y : el nombre enter de revolucions del planeta B ,

el problema es pot resoldre a partir del sistema d'equacions,

$$\begin{cases} N = 19 + 90x \\ N = 28 + 33y. \end{cases}$$

Si les igualem, caldrà cercar els mínims $x, y \in \mathbb{Z}^+$ tals que

$$90x - 33y = 28 - 19 = 9.$$

Hem obtingut una equació lineal amb dues incògnites, la qual té un nombre infinit de solucions enteres. Efectivament, farem una anàlisi de l'equació que permetrà trobar les solucions, i estudiar alguns dels mètodes utilitzats en la seva resolució.⁶¹ Suposem que tenim

$$x, y \in \mathbb{Z} \quad \text{tals que} \quad 90x - 33y = 9.$$

⁶⁰La trajectòria anual descrita pel Sol sobre l'esfera dels estels fixos és una circumferència màxima, la qual rep el nom d'eclíptica. La Lluna i els planetes es mouen en una franja estreta —el “zodiàc”— al seu voltant. La longitud eclíptica o celeste d'un planeta ve determinada per la mesura en graus de l'arc de cercle entre la seva posició sobre l'eclíptica i el punt Àries d'aquesta. Aquest últim punt és el de la posició del Sol, quan el dia i la nit tenen la mateixa durada en el començament de la primavera. Trobareu més informació a la secció 5.7.

⁶¹No simplifiquem l'equació perquè la forma no simplificada explicarà més bé un dels mètodes que volem presentar més endavant.

Llavors,

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{90x - 9}{33} = 2x + \frac{24x - 9}{33} \quad \text{i} \quad x, y \in \mathbb{Z} \implies \\
 &\implies \frac{24x - 9}{33} = z_1 \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} \boxed{y = 2x + z_1} \\ 33z_1 - 24x = -9 \end{cases} \\
 x &= \frac{33z_1 + 9}{24} = z_1 + \frac{9z_1 + 9}{24} \quad \text{i} \quad x, z_1 \in \mathbb{Z} \implies \\
 &\implies \frac{9z_1 + 9}{24} = z_2 \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} \boxed{x = z_1 + z_2} \\ 24z_2 - 9z_1 = 9 \end{cases} \\
 z_1 &= \frac{24z_2 - 9}{9} = 2z_2 + \frac{6z_2 - 9}{9} \quad \text{i} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \implies \\
 &\implies \frac{6z_2 - 9}{9} = z_3 \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} \boxed{z_1 = 2z_2 + z_3} \\ 9z_3 - 6z_2 = -9 \end{cases} \\
 z_2 &= \frac{9z_3 + 9}{6} = z_3 + \frac{3z_3 + 9}{6} \quad \text{i} \quad z_2, z_3 \in \mathbb{Z} \implies \\
 &\implies \frac{3z_3 + 9}{6} = z_4 \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} \boxed{z_2 = z_3 + z_4} \\ 6z_4 - 3z_3 = 9 \implies \boxed{z_3 = 2z_4 - 3} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Hem obtingut que l'existència de solucions $x, y \in \mathbb{Z}$ de l'equació implica necessàriament l'existència de $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{Z}$ que compleixen les igualtats emmarcades. Per tant, les solucions x, y es podran expressar en funció del paràmetre $z_4 = t$ de la manera següent:

$$\begin{aligned}
 z_3 &= 2t - 3 \implies z_2 = z_3 + z_4 = 3t - 3 \implies z_1 = 2z_2 + z_3 = 8t - 9 \implies \\
 &\implies x = z_1 + z_2 = 11t - 12 \implies y = 2x + z_1 = 30t - 33.
 \end{aligned}$$

És a dir que totes les solucions enteres de l'equació inicial han de ser del tipus

$$x = 11t - 12 \quad \text{i} \quad y = 30t - 33, \quad \text{amb } t \in \mathbb{Z},$$

i es comprova immediatament que tots aquests valors són solucions. Ara, la solució del problema consistirà a trobar la mínima parella x, y de nombres positius. S'ha de complir,

$$11t - 12 \geq 0, \quad 30t - 33 \geq 0, \quad \text{i } t \in \mathbb{Z} \text{ mínim.}$$

És a dir, $t \geq 12/11$, $t \geq 33/30$ i t mínim. Per tant, $t \geq 33/30$ i $t \in \mathbb{Z}$ mínim, la qual cosa implica $t = 2$,

$$x = 11 \cdot 2 - 12 = 10, \quad y = 30 \cdot 2 - 33 = 27.$$

Llavors, el nombre N de dies que han passat des de l'última conjunció en λ_0 , dels planetes A i B , és

$$N = 19 + 90 \cdot 10 = 28 + 33 \cdot 27 = 919 \text{ dies.}$$

Val la pena observar, tots els coeficients numèrics implicats en la nostra anàlisi:

- Els coeficients dels primers sumands de la part dreta de les equacions emmarcades coincideixen amb els quocients de l'algoritme d'Euclides aplicat als nombres 90 i 33.
- Els coeficients, canviats de signe, de x , z_1 , z_2 i z_3 en les equacions situades immediatament sota de les anteriors, coincideixen amb els residus positius de l'algoritme citat.

Tot això, deixa al descobert l'estreta relació entre la resolució d'aquest tipus d'equacions i l'aplicació de l'algoritme d'Euclides als coeficients de les seves variables. \square

Com hem comentat anteriorment problemes com aquest, podien tenir relació amb l'interès de resolució d'equacions com la mostrada a l'exemple. De totes maneres la primera referència escrita, que trobem en la matemàtica xinesa, sobre un problema d'anàlisi indeterminada d'aquest tipus, està en el *Sunzi Suanjing* [*Manual matemàtic del mestre Sun*], —obra que possiblement data del segle IV—, que diu el següent:⁶²

Tenim uns objectes dels quals desconeixem el nombre; si en fem el recompte en grups de tres, el residu és 2; si el fem en grups de 5, el residu és 3; si el fem en grups de 7, el residu és 2. Quants objectes hi ha?

Amb notació actual es tractaria de trobar un nombre N tal que

$$N = 3x + 2 \quad N = 5y + 3 \quad N = 7z + 2,$$

en què x , y , z són enters positius. Notem que això equival a la recerca de solucions enteres del sistema indeterminat d'equacions lineals⁶³

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 7z - 3x = 0. \end{cases}$$

⁶² LI YAN-DU SHIRAN [1963-64], 94 de l'edició anglesa de 1987, i KATZ [1993], 186, coincideixen en veure la relació entre els problemes del calendari i els problemes d'anàlisi lineal indeterminada, malgrat no tenir notícia de com resolien els astrònoms xinesos aquestes qüestions.

⁶³El tractament que es fa del problema en el *Sunzi Suanjing* no es pel camí de la reducció a un sistema lineal. GHEVERGHESE [1991], 285–287 de l'edició espanyola de 1996, i KATZ [1993], 186–187, en fan una presentació.

El matemàtic Quin Jiushao amplia en el segle XIII, en el *Sunzi Suanjing* l'estudi del problema anterior, al cas general d'un nombre qualsevol de congruències.⁶⁴

No estudiarem el tipus de tractament xinès i aprofundirem una mica en el dels matemàtics de l'Índia, perquè s'adapta més bé al tipus d'anàlisi presentada en el nostre exemple. Entre els matemàtics indis, trobem els primers exemples d'anàlisi indeterminada de primer grau en els problemes de construcció d'altars dels Sulvasutra, en el segle VII aC, en què es necessita resoldre uns sistemes lineals indeterminats en nombres enters com els següents:⁶⁵

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + t = 200 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{t}{d} = \frac{15}{2}. \end{cases}$$

A partir del segle V els astrònoms i matemàtics indis elaboraren el mètode anomenat *kutakka*,⁶⁶ consistent en contínues divisions, —com en l'algorisme d'Euclides per al càlcul del màxim comú divisor de dos nombres—, i substitucions. Sembla ser que l'introduïdor del mètode fou Aryhabata I, a finals del segle v, el qual va ser comentat i ampliat, entre d'altres, per Baskhara I [ca. 600], i Brahmagupta [ca. 628].

4.5.1 Resolució de $ax - by = c$ mitjançant el *kutakka*

Presentarem el mètode general i l'aplicarem a l'exemple donat al principi de la secció:⁶⁷

Donada l'equació $ax - by = c$, la recerca de solucions enteres utilitzant el *kutakka* es realitza seguint els passos següents, els quals es presenten en els esquemes numèrics de més avall per al cas general i de l'exemple inicial:⁶⁸

- 1) Efectuar la divisió de a entre b , de b entre el residu r_1 de la divisió anterior, de r_1 entre el residu r_2 de la segona divisió, i així successivament, fins arribar al residu positiu $r_n > 0$ més petit.
- 2) Situar els quocients $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ obtinguts un sota de l'altre.⁶⁹

⁶⁴Vegeu KATZ [1993], 188–191. La resolució d'aquesta qüestió dona lloc al teorema xinès del residu, el qual estableix l'existència de solucions d'un sistema de congruències lineals amb els mòduls primers entre si. Per a una presentació del tema vegeu ORE [1948], 240–249 de l'edició de 1988.

⁶⁵Vegeu DATTA [1993], 180–186.

⁶⁶Es pot traduir literalment com polsador, esmicolador o trinxador.

⁶⁷Ho fem adaptant la versió de Baskhara del treball d'Aryabhata, traduïda per Datta, que hem trobat a BAG [1979], 195–196.

⁶⁸Se sobreentén que treballem amb la condició que $\text{MCD}(a, b)$ és divisor de c .

⁶⁹Notem que aquests primers passos són exactament iguals que els presentats en l'algorisme d'Euclides per al càlcul del màxim comú divisor de a i b .

- 3) Afegir per sota de la columna anterior, dos coeficients més:
 – El primer ha de ser un nombre λ tal que si el multipliquem per l'últim residu $r_n [= \text{MCD}(a, b)]$, i afegim o restem al producte —segons el nombre de quocients sigui parell o senar— el terme independent c de l'equació, el resultat ha de ser múltiple del penúltim residu, és a dir $\mu \cdot r_{n-1}$:

$$r_n \cdot \lambda + (-1)^n c = r_{n-1} \cdot \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Z}.$$

– El segon i últim coeficient afegit és el nombre μ que apareix en el càlcul del nombre λ .

- 4) Creem una nova columna fent desaparèixer l'últim coeficient, repetint el penúltim, i substituint l'antepenúltim pel resultat α_1 de sumar al producte del penúltim coeficient i l'immediat superior, el terme immediatament inferior; finalment es deixen iguals, els coeficients superiors a l'antepenúltim.
- 5) Es fa el mateix amb aquesta última columna, i amb les que resulten successivament, fins aconseguir una columna de dos coeficients α_{n-1} i α_n . Aquests dos nombres constitueixen una solució particular de l'equació, el superior $\alpha_n = y$, i l'inferior $\alpha_{n-1} = x$.

• **Passos 1 i 2: Càlcul dels coeficients q_1, q_2, \dots, q_n .**

Cas general: $ax - by = c$

	q_1	q_2	\dots	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	\dots	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	\dots	r_{n-1}	r_n	0	

Cas particular: $90x - 33y = 9$

	2	1	2	1	2
90	33	24	9	6	3
24	9	6	3	0	

- **Passos 3, 4 i 5: Disposició dels quocients q_i , recerca dels coeficients λ i μ , i substitucions successives.**

Cas general: $ax - by = c$

λ i μ compleixen $r_n \cdot \lambda + (-1)^n c = r_{n-1} \cdot \mu$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 q_1 & q_1 & q_1 & \cdots & \alpha_n \\
 q_2 & q_2 & q_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 q_{n-2} & q_{n-2} & q_{n-2} & & \\
 q_{n-1} & q_{n-1} & q_{n-1}\alpha_1 + \lambda = \alpha_2 & & \\
 q_n & q_n\lambda + \mu = \alpha_1 & \alpha_1 & & \\
 \lambda & \lambda & & & \\
 \mu & & & &
 \end{array}$$

Cas particular: $90x - 33y = 9$

$r_4 \cdot \lambda + (-1)^4 \cdot c = r_3 \cdot \mu \implies 3 \cdot \lambda + 9 = 6 \cdot \mu$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 q_1 = 2 & 2 & 2 & 2 & \alpha_4 = 27 \\
 q_2 = 1 & 1 & 1 & \alpha_3 = 10 & \alpha_3 = 10 \\
 q_3 = 2 & 2 & \alpha_2 = 7 & \alpha_2 = 7 & \\
 q_4 = 1 & \alpha_1 = 3 & \alpha_1 = 3 & & \\
 \lambda = 1 & 1 & & & \\
 \mu = 2 & & & &
 \end{array}$$

Una solució particular és $x = 10$, $y = 27$. Observem també, que si deixem el valor μ com un paràmetre, llavors $\lambda = 2\mu - 3$, i aplicant el *kutakka* s'obtidria $x = 11\mu - 12$ i $y = 30\mu - 33$.

Si examinem aquest mètode a la llum, de l'anàlisi de l'exemple efectuat a partir de la pàgina 196, el *kutakka* sembla seguir els passos determinats per les igualtats que allí hem emmarcat. Efectivament, a partir de la nostra anàlisi, per trobar una solució particular de l'equació s'havia de:

- Donar, primerament, un valor enter al paràmetre z_4 de manera que $6 \cdot z_4 = 3 \cdot z_3 + 9$ ens permetia calcular z_3 . Els coeficients 6 i 3 eren els últims residus positius que resultaven d'aplicar l'algoritme d'Euclides als nombres 90 i 33. El coeficient 9 és el terme independent de l'equació lineal a resoldre, el qual dependent del pas de l'anàlisi en què es trobàvem anava canviant de signe.

La condició que havien de complir z_3 i z_4 és precisament la dels nombres λ i μ del *kutakka*:

$$r_3 \cdot \mu = r_4 \cdot \lambda + (-1)^4 \cdot c \quad \text{és a dir,} \quad 6 \cdot \mu = 3 \cdot \lambda + (-1)^4 \cdot 9.$$

- Calcular, a continuació,

$$z_2 = z_3 + z_4 = q_4 z_3 + z_4 = q_4 \lambda + \mu = \alpha_1$$

$$z_1 = 2z_2 + z_3 = q_3 z_2 + z_3 = q_3 \alpha_1 + \lambda = \alpha_2$$

$$x = z_1 + z_2 = q_2 z_1 + z_2 = q_2 \alpha_2 + \alpha_1 = \alpha_3$$

$$y = 2x + z_1 = q_1 x + z_1 = q_1 \alpha_3 + \alpha_2 = \alpha_4.$$

I això és exactament el que es fa al llarg de les successives columnes del *kutakka*.

En definitiva, la nostra anàlisi desemboca directament en el mètode indi. Això permet especular amb la possible execució d'una anàlisi equivalent, retòrica i no simbòlica, del problema per part dels autors indis.

4.5.2 Les fraccions contínues i l'anàlisi de les equacions lineals indeterminades

Bombelli [1526–1572], enginyer i arquitecte bolonyès, va idear un algorisme per calcular, amb ordres d'aproximació tan grans com es desitgés, arrels quadrades mitjançant fraccions. Cataldi [1548–1626], també bolonyès, va idear un simbolisme per representar les fraccions resultants d'aplicar aquest algorisme. La fracció representada per aquest simbolisme, lleugerament modificat en l'actualitat, rep el nom de *fracció contínua*. Veurem que l'anàlisi fet de l'equació $90x - 33y = 9$ pot ser conduït a trobar una altra expressió de la solució mitjançant l'ús d'aquestes fraccions. Abans, però, fem un breu repàs de l'aportació d'aquests dos autors. Bombelli en la seva *Algebra Opera* del 1579, la qual va tenir una primera edició l'any 1572 sota el nom de *L'Algebra parte maggiore dell'Arimetica divisa in tre libri*, dóna el seu “mètode de formació de fraccions per a l'extracció d'arrels”. Comença la seva exposició fent una defensa de totes les aportacions fetes sobre aquest tema en front dels atacs entre els seus autors. Proclama que els mètodes més obscurs han de deixar pas als mètodes més clars sense necessitat d'acusacions ni difamacions. Així presenta el seu mètode com el millor per a ell, fins que n'hi hagi algun altre que el judici dels homes declari superior en claredat. Diu així:

Assumim en primer lloc, que si desitgem trobar l'arrel aproximada de 13, aquesta serà 3 amb un excés de 4. Aquest romanent s'ha de dividir per 6 (dues vegades el 3 donat anteriorment) la qual cosa dóna $\frac{2}{3}$. Aquesta és la primera fracció que s'afegeix al 3, obtenint $3\frac{2}{3}$ com l'arrel aproximada de 13. En ser el quadrat d'aquest nombre $13\frac{4}{9}$, és $\frac{4}{9}$ més gran, i si es desitja una aproximació més ajustada, el 6 que és el doble del 3 s'ha

d'afegir a la fracció $\frac{2}{3}$, obtenint $6\frac{2}{3}$, i aquest nombre ha de dividir el 4, el qual és la diferència entre el 13 i el 9. El resultat és $\frac{3}{5}$, el qual afegit a 3 fa $3\frac{3}{5}$. Aquesta és una aproximació més ajustada de l'arrel de 13, perquè el seu quadrat és $12\frac{24}{25}$, el qual és més ajustat que el de $3\frac{2}{3}$. Però si desitjo una millor aproximació, afegeixo aquesta fracció a 6, obtenint $6\frac{3}{5}$, divideixo el 4 entre aquest, i obtinc $\frac{20}{33}$. Aquest s'ha d'afegir el 3, com abans, fent $3\frac{20}{33}$. Aquesta és una millor aproximació perquè el seu quadrat és $13\frac{4}{1089}$, el qual és $\frac{4}{1089}$ més gran. Si desitjo una aproximació més ajustada, divideixo 4 per $6\frac{20}{33}$, obtenint $\frac{109}{180}$, afegeixo aquest al 3, obtenint $3\frac{109}{180}$. Aquesta és molt més ajustada que l'anterior perquè el seu quadrat és $13\frac{1}{32400}$, el qual és $\frac{1}{32400}$ més gran. Si desitjo continuar això encara més, divideixo 4 per $6\frac{109}{180}$ obtenint $\frac{729}{1189}$, el qual és l'arrel de $13\frac{4}{1413721}$, el qual és $\frac{4}{1413721}$ més gran, i aquest procés pot ser portat a assolir diferències imperceptibles.

En aquest text, a part de les errades d'edició,

- entre el valors $3\frac{20}{33}$ i $3\frac{109}{180}$ falta el $3\frac{66}{109}$,
- l'últim valor obtingut ha de ser $3 + \frac{720}{1189}$, i no $3 + \frac{729}{1189}$. A més, l'error en els quadrats és per defecte de $\frac{4}{1413721}$,

queda clar l'algorisme seguit. En notació fraccionària podríem representar el seu desenvolupament així,

$$3 + \frac{4}{6}, \quad 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}, \quad 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}}, \quad \dots$$

En general, per al càlcul de \sqrt{A} , en què $A = a^2 + b$, i $a^2 < A < (a + 1)^2$ seria

$$a + \frac{b}{2a}, \quad a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}, \quad a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}}, \quad \dots \quad (4.3)$$

La manera com va concebre l'algorisme no la sabem, i es poden fer moltes conjectures. Podrien ser d'un tipus similar a les ja tractades en anteriors capítols, o bé com la que trobem a Brezinski:⁷⁰

$$A = a^2 + b \implies A - a^2 = (\sqrt{A} + a)(\sqrt{A} - a) = b.$$

⁷⁰Vegeu BREZINSKI [1991], 64.

Consegüentment,

$$\sqrt{A} = a + \frac{b}{a + \sqrt{A}}.$$

Aquesta última expressió, fent successives substitucions de \sqrt{A} , condueix a les fraccions de Bombelli.

Cataldi segueix el mètode anterior i crea un simbolisme nou, molt semblant a l'actual. Presenta l'exemple de l'aproximació de $\sqrt{18}$, i obté

$$4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8} \dots}}$$

que ell representa amb la notació

$$4.\&\frac{2}{8}.\&\frac{2}{8}.\&\frac{2}{8}, \quad \text{o bé} \quad 4.\&\frac{2}{8}.\&\frac{2}{8}.\&\frac{2}{8}.$$

en què el punt significa que la fracció següent està en el denominador.⁷¹

La notació actual per a la fracció contínua que hem presentat a (4.3) és,

$$a + \frac{b}{|2a} + \frac{b}{|2a} + \frac{b}{|2a} + \dots$$

Per exemple,

$$3 + \frac{2}{|3} + \frac{1}{|5} = 3 + \frac{2}{3 + \frac{1}{5}}.$$

Per a les nostres finalitats, a partir d'ara ens restringirem a les fraccions contínues del tipus

$$a_1 + \frac{1}{|a_2} + \frac{1}{|a_3} + \dots + \frac{1}{|a_n}$$

les quals també es representen amb la notació

$$[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n].$$

Per exemple,

$$[2, 1, 3, 4, 2, 7] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7}}}}} = \frac{782}{283}.$$

⁷¹Vegeu CAJORI [1928–29] volum II, 50–51 de l'edició de 1993.

Finalment, observem que la fracció p/q resultant del càlcul d'una fracció contínua sempre és irreductible, i que els quocients resultants d'aplicar l'algoritme d'Euclides a p i q són els coeficients del desenvolupament de p/q en fracció contínua.⁷² En l'exemple anterior:

	2	1	3	4	2	7
782	283	216	67	15	7	1
216	67	15	7	1	0	

Relació amb la resolució de diofàntiques lineals

Reprenem l'anàlisi de l'equació $90x - 33y = 9$, a partir del punt en què havíem obtingut que si x, y era solució, llavors existien z_1, z_2, z_3 i z_4 enters tals que complien les igualtats (4.2) emmarcades. Aquestes es poden representar sota l'esquema de l'algoritme d'Euclides

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
 \hline
 y & x & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\
 \hline
 z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & -3 & \\
 \hline
 \end{array} \tag{4.4}$$

Això suggereix fer un examen de la fracció y/x dirigit a fer-ne un tractament amb el llenguatge de les fraccions contínues:

$$\begin{aligned}
 \frac{y}{x} &= \frac{2x + z_1}{x} = 2 + \frac{z_1}{x} = 2 + \frac{1}{x/z_1}, \\
 \frac{x}{z_1} &= \frac{z_1 + z_2}{z_1} = 1 + \frac{z_2}{z_1} = 1 + \frac{1}{z_1/z_2}, \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2z_2 + z_3}{z_2} = 2 + \frac{z_3}{z_2} = 2 + \frac{1}{z_2/z_3}, \\
 \frac{z_2}{z_3} &= \frac{z_3 + z_4}{z_3} = 1 + \frac{z_4}{z_3} = 1 + \frac{z_4}{2z_4 - 3},
 \end{aligned}$$

de les quals obtenim que si x, y és solució, existeix $z_4 \in \mathbb{Z}$ tal que, —sempre que no aparegui un denominador igual a 0—,

$$\frac{y}{x} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{z_4}{2z_4 - 3}}}}. \tag{4.5}$$

⁷²Vegeu l'activitat 4.4.4.

D'altra banda observem que els quocients obtinguts a l'esquema (4.4) de més amunt, són els mateixos que els de l'algorisme d'Euclides aplicat a 90 i 33,

	2	1	2	1	2
90	33	24	9	6	3
24	9	6	3	0	

del qual surt el desenvolupament en fracció contínua per a 90/33:

$$\begin{aligned} \frac{90}{33} &= 2 + \frac{24}{33} = 2 + \frac{1}{33/24} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{9}{24}} = \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{24/9}} = \dots = [2, 1, 2, 1, 2]. \end{aligned}$$

Tota aquesta informació suggereix una línia per continuar l'anàlisi, —de cara a trobar un mètode per a la recerca d'una solució particular de l'equació—, en què intervinguin les fraccions contínues.

En la representació (4.5) de y/x considerem un valor particular del paràmetre z_4 que elimini la confusió que introdueix la fracció $\frac{z_4}{2z_4-3}$ de cara a la consideració de y/x desenvolupada en fracció contínua. Si fem $z_4 = 0$, obtenim

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = [2, 1, 2, 1].$$

Aquesta fracció contínua coincideix amb la de 90/33 excepte en l'últim terme. L'interès d'aquesta coincidència està en què sempre es produeix.⁷³ La qüestió que queda per resoldre és de saber si existeix una solució x_0, y_0 per a $z_4 = 0$, és a dir x_0, y_0 que compleixin

$$\frac{y_0}{x_0} = [2, 1, 2, 1] = \frac{11}{4}.$$

Si la resposta fos afirmativa tindríem un mètode per a la recerca d'una solució particular i, llavors, la recerca de la solució general no presenta gran dificultat.

⁷³Ha de ser així perquè les dues fraccions contínues han estat determinades pels nombres 90 i 33 sotmesos a les mateixes operacions. El que impossibilita l'aparició d'un últim coeficient, per a $z_4 = 0$, igual a l'últim de 90/33, és la intervenció en la primera fracció del terme independent $c = 9$ de l'equació, el qual no intervé en el desenvolupament de 90/33.

Suposem que la solució particular citada x_0, y_0 existeix. Això implicarà que existeix $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que,

$$x_0 = 4\lambda, \quad y_0 = 11\lambda.$$

Vegeu si això és possible, imposant la condició $90x_0 - 33y_0 = 9$:

$$90 \cdot 4\lambda - 33 \cdot 11\lambda = 9 \iff -3\lambda = 9 \iff \lambda = -3.$$

La resposta és afirmativa, i la solució és

$$x_0 = 4 \cdot (-3) = -12, \quad y_0 = 11 \cdot (-3) = -33$$

Ara la qüestió és esbrinar en quines condicions aquest mètode és general. La resposta és que això es podrà dur a terme, —és a dir l'equació $ax - by = c$, en què $a, b, c > 0$, tindrà solució—, si i només si $\text{MCD}(a, b)$ és divisor del coeficient c .⁷⁴ Un cop obtinguda la solució particular, s'obté la solució general $x, y \in \mathbb{Z}$, observant que

$$\left. \begin{array}{l} 90 \cdot (-12) - 33 \cdot (-33) = 9 \\ 90x - 33y = 9 \end{array} \right\} \implies 90(x + 12) - 33(y + 33) = 0,$$

i que en ser $x + 12 = \alpha \in \mathbb{Z}$ llavors $y + 33 = \frac{30}{11} \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$. O sigui que s'ha d'imposar $\alpha/11 = \beta \in \mathbb{Z}$, d'on s'obté

$$x = -12 + 11 \cdot \beta, \quad y = -33 + 30 \cdot \beta, \quad \text{en què } \beta \in \mathbb{Z}.$$

En resum, un mètode per trobar la solució de $ax - by = c$, en què $M = \text{MCD}(a, b)$ és divisor del coeficient c , utilitzant les fraccions contínues, es pot esquematitzar així:

- Trobar els quocients q_1, q_2, \dots, q_n que resulten d'aplicar l'algoritme d'Euclides a a i b .
- Calcular la fracció irreductible

$$[q_1, q_2, \dots, q_{n-1}],$$

el numerador de la qual anomenem α_{n-1} , i el denominador β_{n-1} .

⁷⁴Per al cas general $ax + by = c$, vegeu el tractament en els exemples del final de la secció. Per a un tractament rigorós d'aquestes afirmacions vegeu l'activitat 4.4.4, en què s'estudien les solucions a partir de l'estudi previ de les propietats de les fraccions contínues. Allí quedarà simplificat el mètode que derivarem d'aquesta anàlisi. Per a una introducció més extensa a la teoria de les fraccions contínues i les seves relacions amb l'anàlisi indeterminada lineal vegeu GUELFOND [1979] i TRIGNAN [1994].

- Imposar que $x_0 = \lambda \cdot \beta_{n-1}$ i $y_0 = \lambda \cdot \alpha_{n-1}$, en què $\lambda \in \mathbb{Z}$, satisfaguin $ax_0 - by_0 = c$. Així trobarem el valor de λ i, consegüentment, els de x_0 i y_0 .
- Establir que la solució general de l'equació és

$$x = x_0 + \frac{b}{M}t, \quad y = y_0 + \frac{a}{M}t, \quad \text{en què } t \in \mathbb{Z}.$$

El cas $ax + by = c$, $a, b, c > 0$, s'estudia expressant l'equació com

$$ax - b(-y) = c,$$

i actuant amb x_0 i $-y_0$, igual que abans amb x_0 i y_0 . Llavors,

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ -y = -y_0 + at \end{cases} \implies \begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}.$$

Finalment, el cas $ax - by = c$, $a < 0, b > 0, c > 0$ es resol de manera semblant actuant sobre $(-a)(-x) - by = c$.

Exemples

- **Resolució de $40x - 3y = 3$**

$$\begin{array}{c|c|c} & 13 & 3 \\ \hline 40 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & \end{array} \implies \frac{40}{3} = [13, 3] \implies \frac{y_0}{x_0} = [13] = 13 \implies \begin{cases} x_0 = \lambda \\ y_0 = 13\lambda \end{cases} \implies$$

$$\implies 40\lambda - 39\lambda = 3 \implies \lambda = 3 \implies \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 39 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 39 + 40t \end{cases}$$

- **Resolució de $32x + 14y = 4$**

$$32x + 14y = 4 \iff 16x - 7(-y) = 2.$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 2 & 3 & 2 \\ \hline 16 & 7 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & \end{array} \implies \frac{16}{7} = [2, 3, 2] \implies \frac{-y_0}{x_0} = [2, 3] = \frac{7}{3} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x_0 = 3\lambda \\ -y_0 = 7\lambda \end{cases} \implies 48\lambda - 49\lambda = 2 \implies \lambda = -2 \implies$$

$$\implies \begin{cases} x_0 = -6 \\ y_0 = 14 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -6 + 7t \\ y = 14 - 16t \end{cases}$$

– **Resolució de** $59x + 16y + 1 = 0$

$$59x + 16y + 1 = 0 \iff 59(-x) - 16y = 1.$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 3 & 1 & 2 & 5 \\ \hline 59 & 16 & 11 & 5 & 1 \\ \hline 11 & 5 & 1 & 0 & \end{array} \implies \frac{59}{16} = [3, 1, 2, 5] \implies \frac{y_0}{-x_0} = [3, 1, 2] = \frac{11}{3} \implies$$

$$\implies \begin{cases} -x_0 = 3\lambda \\ y_0 = 11\lambda \end{cases} \implies 177\lambda - 176\lambda = 1 \implies$$

$$\implies \lambda = 1 \implies \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 11 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3 - 16t \\ y = 11 + 59t \end{cases}$$

Activitats 4.4

\overline{E}_2 1. Sigui l'equació $976x + 170y = 28$.

- \mathcal{S} i) Trobeu una solució particular utilitzant el kutakka.
ii) Trobeu la solució general utilitzant fraccions contínues.

\overline{B} 2. Dos punts P i L descriuen òrbites circulars en sentit antihorari, amb velocitat constant, en un mateix pla. El punt P dona 30 voltes cada 32 anys al voltant d'un punt S . El punt L dona 11 voltes cada 4 anys al voltant del punt P . En un moment determinat P , L i S estan alineats, amb L entre P i S .

i) Quants anys enters han de transcórrer perquè l'angle \widehat{SPL} , orientat en sentit antihorari, sigui per primera vegada $\widehat{SPL} = 90^\circ$? Quin és l'angle, prescindint de les voltes senceres, entre les posicions inicial i final del punt P ? Quina va ser la última vegada que es trobaven en aquesta posició?

\mathcal{S} ii) Resoleu la mateixa qüestió en el cas que P doni 1 volta cada any i L doni 11 voltes cada 5 anys.

3. Disposeu de dos rellotges A i B de sorra. El rellotge A només pot mesurar intervals de 1m 57s, el rellotge B intervals 1m 10s, i no s'hi poden fer marques per mesurar temps parcials. Heu de coure un plat per dinar, ja preparat, que necessita estar, exactament, 10m al foc. A les 13h us poseu a manipular els rellotges per tal de poder establir exactament aquest temps. Quina és l'hora més propera a les 13h, en què podreu dinar.

\overline{P} 4. En aquesta activitat estudiarem algunes propietats de les fraccions contínues, que permetran l'establiment d'una fórmula per al càlcul d'una solució entera particular de l'equació

$$ax + by = c \quad a, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad c \in \mathbb{Z}, \quad (4.6)$$

en el cas que existeixi solució.

Sigui la fracció racional $\frac{a}{b} \neq 0$, en què $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$. Considerem l'expressió,

$$\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \dots, q_n] = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}$$

la qual resulta de cercar els q_i i r_i enters, tals que

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_2, & \text{en què } 0 \leq r_2 < b; & \quad \text{si } r_2 > 0, \\ b &= r_2 \cdot q_1 + r_3, & \text{en què } 0 \leq r_3 < r_2; & \quad \text{si } r_3 > 0, \\ r_2 &= r_3 \cdot q_1 + r_4, & \text{en què } 0 \leq r_4 < r_3, & \\ & \text{procés que es repeteix fins trobar } r_n > 0 \text{ tal que } r_{n+1} = 0, & \text{és a dir} & \\ r_{n-1} &= r_n q_n, & & \end{aligned}$$

(Aquest r_n existeix, en ser $b > r_2 > r_3 > \dots$, una successió decreixent de nombres enters positius).

És immediat que $q_1 \in \mathbb{Z}$ i $q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$. Per exemple,

$$\frac{-16}{5} = [-4, 1, 4], \quad \frac{16}{5} = [3, 1].$$

Considerem les successives fraccions reduïdes ω_k que resulten de la fracció contínua, és a dir,

$$\omega_k = [q_1, q_2, \dots, q_k], \quad \text{en què } \beta_k > 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Observem que,

$$\omega_1 = \frac{q_1}{1} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \omega_2 = \frac{q_2 \cdot q_1 + 1}{q_2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \omega_3 = \frac{q_3 \cdot q_2 \cdot q_1 + q_1 + q_3}{q_3 \cdot q_2 + 1} = \frac{\alpha_3}{\beta_3},$$

en què

$$\begin{cases} \alpha_1 = q_1 \\ \beta_1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 = q_2 \cdot q_1 + 1 \\ \beta_2 = q_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3 = q_3 \cdot (q_2 \cdot q_1 + 1) + q_1 = q_3 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \\ \beta_3 = q_3 \cdot q_2 + 1 = q_3 \cdot \beta_2 + \beta_1. \end{cases}$$

i) Demostreu que:

$$(a) \quad \omega_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k}, \quad \forall k > 2, \quad \text{en què } \begin{cases} \alpha_k = q_k \cdot \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} \\ \beta_k = q_k \cdot \beta_{k-1} + \beta_{k-2}, \end{cases} \quad \text{i } \beta_k > 0.$$

$$(b) \frac{\alpha_k}{\beta_k} - \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{\beta_k \cdot \beta_{k-1}}, \text{ i } \text{mcd}(\alpha_k, \beta_k) = 1.$$

$$(c) \text{ Si } \text{mcd}(a, b) = 1, \text{ llavors } \begin{cases} \alpha_n = a \cdot \text{signe}(b) \\ \beta_n = |b|. \end{cases}$$

ii) Demostreu que una condició necessària per a l'existència de solució de l'equació (4.6), és que $M = \text{mcd}(a, b)$ sigui divisor del coeficient c . [Això implicarà que la resolució de l'equació serà equivalent a la de l'equació $\frac{a}{M}x + \frac{b}{M}y = \frac{c}{M}$. És a dir que només caldrà estudiar la resolució de l'equació (4.6) per al cas $\text{mcd}(a, b) = 1$.]

iii) Apliqueu els resultats del primer apartat a la recerca d'una expressió per a una solució particular $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'equació $ax + by = c$, en què $\text{mcd}(a, b) = 1$.

\boxed{S}

iv) Doneu una expressió per a la solució general de $ax + by = c$, en què $\text{mcd}(a, b) = 1$.

5. Elaboreu un fitxer *DERIVE* en què s'obtinguin funcions que proporcionin:

- La fracció contínua de a/b racional.
- La visualització de l'algoritme d'Euclides aplicat a dos enters positius.
- Les fraccions reduïdes de a/b racional.
- La solució general, en nombres enters, de $ax + by = c$. S'entén que si no existeix, ho haurà d'anunciar amb un missatge. Les dades a, b i c , han de ser enteres, amb l'única restricció que $a, b \neq 0$.
- Les fraccions reduïdes d'una fracció contínua.

\boxed{S}

□

Capítol 5

Semblança i trigonometria

Existeixen indicis de que les civilitzacions egípcia i babilònica mostraven interès en la qüestió de trobar raons entre els costats d'un triangle rectangle i en la consideració de la seva invariància per a angles iguals. Ho veiem en el problema 56 del papir de Rhind en què es proporciona la inclinació de la cara d'una piràmide, mitjançant el càlcul de la relació que avui anomenem cotangent de l'angle que aquesta forma amb la base.¹ També ho trobem en la primera columna de la tauleta Plimpton,² i en una tauleta trobada a Tell Harmal, a l'Irak, del 2000 aC, en què es resol un problema que implicava el coneixement de les relacions entre els costats i les àrees dels triangles semblants.³ De totes maneres no hi ha cap constància de l'existència d'una teoria sobre la semblança. De la qüestió que no es té cap traça en aquestes civilitzacions, és de l'evolució del concepte de semblança envers el tractament sistemàtic de problemes en què es relacionessin, no tan sols les mesures dels segments, sinó les mesures de tots els elements, — angles i costats—, d'un triangle. D'això se'n faria càrrec la disciplina que avui anomenem trigonometria, la qual encara tardaria a fer la seva aparició.

En el món grec, trobem diverses narracions que connecten amb el concepte de semblança. Presentem dos fragments que fan referència a Tales. El primer és del primer llibre de les *Vides de filòsofs famosos* de l'escriptor Diògenes Laerci [III] i ens transmet les paraules del biògraf i historiador grec Jeroni de Rodas [IV aC]:⁴

Jeroni diu que també va mesurar les piràmides per observació de la longitud de la seva ombra en el moment en què la nostra ombra és igual a la nostra alçada.

¹Vegeu GILLINGS [1972], 185–187, i ROBINS–SHUTE [1987], 48.

²Vegeu la secció 4.2.1, pàgina 177.

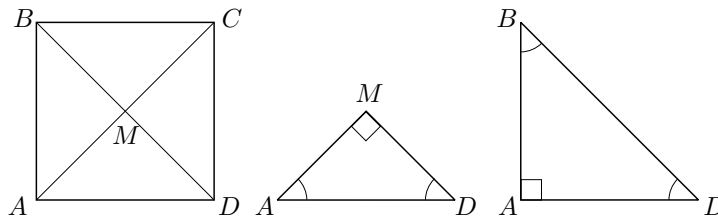
³Vegeu l'anàlisi que'n fa GHEVERGHESE [1991], 175–178 de l'edició espanyola de 1996.

⁴Vegeu KIRK–RAVEN [1966], 123 de l'edició de 1974.

El segon és de Plutarc [I d.C.]:⁵

Entre d'altres fetes seves, ell [Amasis⁶] estava particularment satisfet amb la seva mesura de la piràmide quan sense dificultat ni assistència de cap instrument, simplement posant un bastó en l'extrem de l'ombra projectada per la piràmide i havent fet dos triangles per l'impacte dels raigs del sol, va mostrar que la piràmide té amb el bastó la mateixa raó que l'ombra amb l'ombra.

En aquests fragments es manifesta el coneixement pràctic de les relacions entre els costats de dos triangles semblants, és a dir d'aquells triangles amb els mateixos angles. Però, una cosa és l'aplicació pràctica, en què les mesures es prenen amb aproximació racional, i una altra cosa és el tractament teòric en què les magnituds implicades poden no ser commensurables. Per exemple, en el quadrat $ABCD$ de la figura adjunta, els triangles AMB i BAD són semblants; però, en el pla teòric, es presenta el problema de no tenir les eines adequades per parlar de les raons entre BD i AD , o entre AM i BA , ni de la seva igualtat, perquè els segments de cada parella són incommensurables.⁷ O sigui que si es vol parlar de proporcionalitat de segments en els triangles semblants, caldrà crear una teoria de la proporció que ultrapassi el domini de les magnituds commensurables. S'atribueix a Éudox [IV aC] la introducció d'aquesta teoria, la qual és recollida per Euclides en les divuit definicions i vint-i-cinc teoremes del llibre V dels *Elements*.⁸



A les seccions d'aquest capítol farem una breu presentació de la teoria de la proporció tal com es troba a Euclides, i el seu tractament consegüent de la semblança en els primers teoremes del llibre VI. Estudiarem els inicis de la trigonometria i a quins problemes s'aplica, cercant en l'obra de Claudi Ptolemeu [II], el qual recollí el llegat d'Hiparc [II aC]. Aquest últim va ser, possiblement, el primer a elaborar

⁵El fragment és dels *Convivia septem sapientium*, el qual pertany als *Assaigs morals*.

⁶Rei d'Egipte (570–526), penúltim de la dinastia saïta.

⁷Vegeu la secció 1.2.3, pàgina 19.

⁸Segons THORUP [1992], aquest no seria l'únic intent de crear una teoria de la proporció. Abans d'Éudox s'hauria desenvolupat una teoria basada en el procés de l'antiphairesis, o procediment de restes mútues per comparar dos segments, i que s'ha utilitzat en les presentacions de la incommensurabilitat del costat i la diagonal d'un quadrat —secció 1.2.3, pàgina 19—, i de l'algorisme d'Euclides —secció 4.4, pàgina 195.

una taula de cordes —equivalent a una taula trigonomètrica de sinus—, a partir dels estudis menys sistemàtics dels seus predecessors sobre segments i circumferències, de d'Hipòcrates de Quios [v aC] fins Arquimedes i Apol·loni [III aC], passant per Aristarc de Samos [III aC] i Eratostenes de Cirene [III aC] entre d'altres. Finalment donarem un apunt de l'evolució d'aquesta disciplina i mostrarem un exemple d'aplicació a la descripció de corbes.

Activitats 5.1

1. Considerem els mètodes explicats per Diògenes i Plutarc. E₁

i) Feu un gràfic en què es visualitzi el mètode del primer. Quina limitació presenta aquest mètode?

ii) Expliqueu les avantatges que presenta el segon mètode respecte l'anterior. Quines dificultats es presenten en portar-lo a la pràctica i com les solucioneu. S

2. Recordem el teorema I.26 dels Elements d'Euclides:

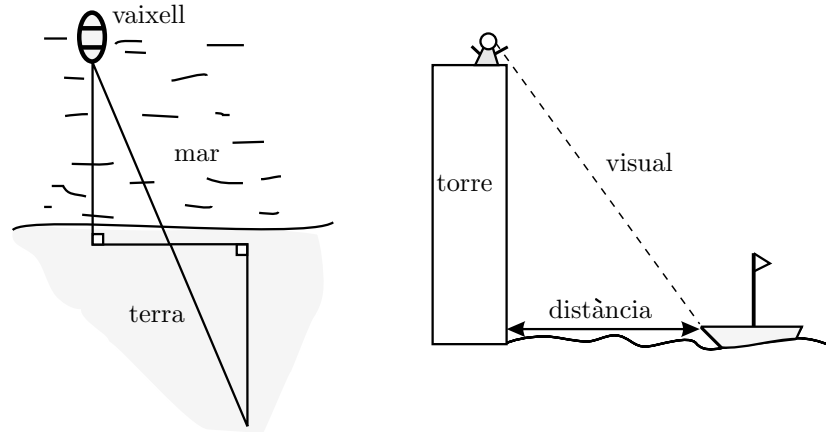
Si dos triangles tenen dos angles i un costat iguals, estant aquest costat entre els angles iguals o subtendint un d'aquests angles, llavors tindran iguals els altres dos costats i el tercer angle.

Fent referència a aquest teorema trobem el fragment de Procle següent:

Eudem,⁹ en la seva història de la geometria, atribueix aquest teorema a Tales dient que, en el mètode mitjançant el qual s'explica que Tales trobà a quina distància estaven els vaixells en el mar, era necessari fer-ne ús.

i) En el gràfic adjunt de l'esquerra presentem una vista zenital de la solució suggerida de la lectura de Procle. Observeu-lo i expliqueu com es troba la distància del vaixell a la costa. Discutiu-ne la dificultat pràctica i solucioneu-la.

⁹Eudem de Rodes [IV aC], fou deixeble d'Aristòtil. Va escriure una història de les Matemàtiques que s'ha perdut. S'ha conservat part de la informació d'un resum posterior, gràcies a Procle. Concretament, aquest fragment és de PROCLE [v], 275 de l'edició de 1970.



- S** ii) Ideu una manera, utilitzant la semblança de triangles, per trobar la distància d'un vaixell a la costa, on suposem que l'estem observant des de dalt d'una torre d'altura coneguda a la vora de la mar. [Observeu el gràfic anterior de la dreta.]

□

5.1 La teoria de la proporció i la semblança

Entre les definicions del llibre V, n'hi ha un nucli de cinc que podrien aclarir el que entenen els grecs per raó entre magnituds o, potser més correctament, magnituds proporcionals:

Definició V.3 Una raó és un tipus de relació entre dues magnituds de la mateixa classe, respecte de la seva grandària.

Definició V.4 Es diu que tenen raó entre si, les magnituds que en multiplicar-se poden excedir una a l'altra.

Definició V.5 Es diu que una primera magnitud té la mateixa raó amb una segona magnitud, que una tercera amb una quarta, quan qualssevol equimúltiples de la primera i la tercera, alhora excedeixin, alhora siguin iguals, o alhora siguin inferiors, que qualssevol equimúltiples de la segona i la quarta, respectivament agafats en l'ordre corresponent.

Definició V.6 S'anomenen proporcionals les magnituds que tenen la mateixa raó.

Definició V.7 Entre els equimúltiples, quan el múltiple de la primera excedeix al múltiple de la segona, però el múltiple de la tercera no excedeix el múltiple de la quarta, llavors es diu que la primera té amb la segona una raó més gran que la tercera amb la quarta.

Notem que la primera definició remet al concepte de relació i no defineix res. L'hem incorporat per fer notar que Euclides no defineix quina cosa és una raó. En té prou en definir —definicions 4 i 5—, en quines condicions dues magnituds

tenen raó, i en quines són iguals. De fet, aquestes dues definicions junt amb la setena, constitueixen el nucli principal en què es basa la teoria. La definició 6 l'únic que fa és assignar un nom a les magnituds que tenen la mateixa raó. La definició 4 permet pensar en l'existència, a la ment d'Euclides, de magnituds que no tenen raó, les qual no complirien la propietat enunciada. Tanmateix, tot fa pensar que aquesta no és la realitat, perquè Euclides sempre treballa amb la suposició que dues magnituds de la mateixa classe compleixen la condició d'aquesta definició. És a dir que aquí hi ha amagat un postulat, el qual rep el nom de *postulat d'Arquimedes*, perquè Arquimedes el presenta com a tal en el seu tractat *Sobre l'esfera i el cilindre* de la manera següent:¹⁰

Donades dues línies, dues superfícies o dos sòlids desiguals, si l'excés d'una d'aquestes figures sobre l'altra s'afegeix a si mateix un cert nombre de vegades, es pot superar cadascuna de les figures que es comparen entre si.

Finalment la definició d'igualtat entre raons, i de raó més gran que una altra raó, li permetrà establir tota la teoria de la proporció, amb la qual podrà tractar amb èxit la proporcionalitat de les figures semblants. Farem una presentació simbòlica de la definició 5 que simplificarà la presentació posterior. Representem la raó entre les magnituds a i b , amb la notació $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \forall m, n \in \mathbb{N} \quad \text{es compleix} \quad \left\{ \begin{array}{l} n \cdot a > m \cdot b \quad \text{i} \quad n \cdot c > m \cdot d \\ \text{o} \\ n \cdot a = m \cdot b \quad \text{i} \quad n \cdot c = m \cdot d \\ \text{o} \\ n \cdot a < m \cdot b \quad \text{i} \quad n \cdot c < m \cdot d. \end{array} \right.$$

Un cop presentades les seves definicions Euclides demostra els vint-i-cinc teoremes de la teoria i, amb el seu ajut, s'enfronta a les tasques del llibre VI, dedicat a la semblança.¹¹ Abans d'estudiar el llibre VI, presentem un exemple de l'estil de demostració del llibre V, concretament la del teorema V.7, en què utilitzem el llenguatge algebraic.

¹⁰Vegeu VERA [1970], II, 27.

¹¹Vegeu una transcripció, en llenguatge algebraic, dels enunciat dels teoremes del llibre V a l'apèndix 2 del final d'aquest capítol, pàgines 274–275. Es podrà observar que les propietats que demostra són les que ja es coneixen en el domini del commensurable o racional. És a dir que en aquest llibre trobem una teoria de voluntat globalitzadora, una teoria de l'incommensurable que conté la teoria del commensurable; en el nostre llenguatge, obviant un cert nombre de qüestions, una teoria del real, la qual conté la del racional.

- **Teorema V.7**

Magnituds iguals tenen la mateixa raó amb una mateixa magnitud, i aquesta mateixa magnitud té la mateixa raó amb les iguals.

És a dir, si a, b i c són magnituds i $a = b$ llavors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ i $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$.
Efectivament, siguin $n, m \in \mathbb{N}$.

Llavors, $a = b \implies n \cdot a = n \cdot b$ i, per tant,

$$\begin{aligned} n \cdot a \stackrel{\leq}{\geq} m \cdot c &\implies n \cdot b = n \cdot a \stackrel{\leq}{\geq} m \cdot c \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \\ m \cdot c \stackrel{\leq}{\geq} n \cdot a &\implies m \cdot c \stackrel{\leq}{\geq} n \cdot a = n \cdot b \implies \frac{c}{a} = \frac{c}{b} \end{aligned}$$

□

5.1.1 El llibre VI i la semblança

Un dels primers objectius que es proposa Euclides en aquest llibre, és el de demostrar la proposició coneguda a l'ensenyament secundari com a *teorema de Tales*. Concretament, que la paral·lela a un costat d'un triangle talla proporcionalment els altres dos costats i recíprocament. Ho aconsegueix en el segon teorema, després d'una proposició prèvia en què generalitza I.38, comparant les àrees dels triangles que tenen la mateixa alçada amb les seves bases. En fem la presentació per observar de quina manera utilitza la teoria de la proporció.

- **Teorema VI.1**

Triangles i paral·lelograms que tenen la mateixa alçada són entre si com les seves bases.

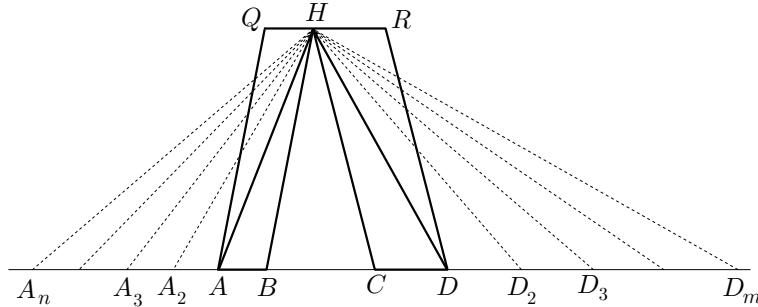
Siguin, a la figura adjunta, $BA_n = n \cdot AB$ i $CD_m = m \cdot CD$. La primera part a demostrar diu que¹²

$$\frac{ABH}{CDH} = \frac{AB}{CD}.$$

1r. cas: Suposem $n \cdot AB = m \cdot CD$. Llavors, $BA_n = CD_m$. Per tant, en tenir A_nBH i D_mCH la mateixa base $BA_n = CD_m$ i la mateixa alçada, es poden considerar els dos triangles amb la mateixa base i situats entre paral·leles, com a I.38, i llavors,

$$n \cdot ABH = A_nBH = D_mCH = m \cdot DCH.$$

¹²Quan escrivim ABH o $ABCD$ ens referim a l'àrea del triangle ABH o del quadrilàter $ABCD$. Quan no hi hagi perill de confusió identificarem l'àrea d'un quadrilàter amb les dues lletres que representen els punts extrems d'una diagonal.



2n. cas: $n \cdot AB > m \cdot CD \implies BA_n > CD_m$. Llavors, en tenir A_nBH major base que D_mCH i la mateixa alçada,

$$n \cdot ABH = A_nBH > D_mCH = m \cdot DCH.$$

3r. cas: De manera similar, $n \cdot AB < m \cdot CD \implies BA_n < CD_m$. Per tant,

$$n \cdot ABH = A_nBH < D_mCH = m \cdot DCH.$$

O sigui que es compleix la definició V.5 d'igualtat de raons i

$$\frac{AB}{CD} = \frac{ABH}{CDH}.$$

Per als paral·lelograms $ABHQ$ i $CDHR$, només cal considerar que són dues vegades els triangles estudiats. Llavors, pel teorema V.15,

$$\frac{ABHQ}{CDHR} = \frac{2 \cdot ABH}{2 \cdot CDH} = \frac{ABH}{CDH}.$$

I, finalment, pel teorema V.11,

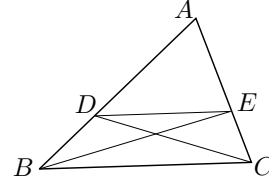
$$\frac{AB}{CD} = \frac{ABH}{CDH} \quad \text{i} \quad \frac{ABHQ}{CDHR} = \frac{ABH}{CDH} \implies \frac{ABHQ}{CDHR} = \frac{AB}{CD}.$$

• **Teorema VI.2**

□

Si es traça una recta paral·lela a un dels costats d'un triangle, aquesta tallarà els costats del triangle proporcionalment; i, si els costats del triangle es tallen proporcionalment, la línia que uneix els punts d'intersecció serà paral·lela a l'altre costat del triangle.

Donat el triangle ABC i la paral·lela a BC , que determina els punts D i E sobre AB i AC , Euclides construeix les línies auxiliars BE i DC amb les que pot implicar una nova parella BDE i CDE de triangles en la demostració. Aquests nous triangles i la seva relació amb el ADE , faran de pont, gràcies al teorema VI.1, entre les raons de les dues parelles de segments a relacionar. Efectivament,



$$\frac{BD}{AD} = \frac{BDE}{ADE} = \frac{CDE}{ADE} = \frac{CE}{AE}.$$

(La segona igualtat gràcies a I.38 i V.7, i les altres a VI.1.)

Quant al recíproc, tenim $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$ per hipòtesi. A més, per VI.1

$$\frac{BDE}{ADE} = \frac{BD}{AD} \quad \text{i} \quad \frac{CDE}{ADE} = \frac{CE}{AE}.$$

Llavors, per V.11,

$$\frac{BDE}{ADE} = \frac{CDE}{ADE}$$

i, per V.9, $BDE = CDE$. Llavors, en tenir aquests dos triangles iguals, la mateixa base DE , i estar entre DE i BC , aquestes línies són, per I.39, paral·leles. □

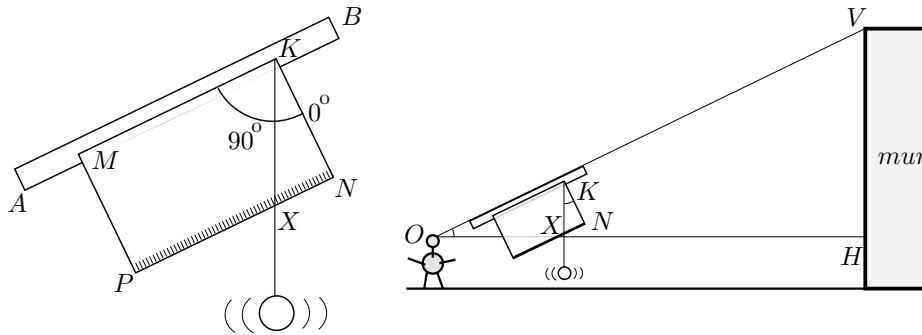
Un cop demostrat aquest teorema li és fàcil establir en els teoremes VI.4, 5 i 6, els criteris de semblança de triangles. És a dir, esquemàticament, en dos triangles es verifiquen:

- Angles d'un triangle, iguals als de l'altre \implies costats proporcionals.
- Costats proporcionals \implies angles d'un triangle, iguals als de l'altre.
- Un angle igual i els costats que el determinen proporcionals \implies les altres dues parelles d'angles són iguals entre si.

Activitats 5.2

- E₁** 1. Haureu observat, en els mètodes atribuïts a Tales, que una bona estratègia per resoldre el problema de mesurar distàncies o altures de llocs inaccessibles es basa en la consideració de triangles semblants. Aquests triangles es caracteritzen per tenir els angles iguals de dos en dos i els costats proporcionals. Construïrem un instrument, el qual anomenarem “quadrant”, que ens ajudarà en aquest problema. Aquest es compon de:

- Un llistó de fusta AB , (llargària entre 35 i 45 cm).
- Un cartó rígid o fullola $MPKN$ de forma rectangular (15×25 cm). El costat MK segueix la direcció del llistó, i els costats KN i MP li seran perpendiculars. Sobre KN anirà escrita la mesura del costat, i sobre NP s'establirà una graduació mil·limètrica assignant a N el valor 0. També s'establirà una graduació angular de 90° amb centre K i assignant a KN el valor 0° .
- Una plomada penjada del vèrtex K , —fil de cosir molt fi, amb un pes que el tibi lligat a l'altre extrem—.



i) Construïu un quadrant. Observeu el gràfic adjunt en què l'observador O el col·loca amb el llistó AB , seguint la direcció del raig visual, dirigit al cap d'amunt del mur que té davant. Justifiqueu que els triangles KNX i OHV són semblants.

ii) Calculeu l'alçada del mur utilitzant la informació de l'apartat anterior.

iii) Seguiu el mètode dels apartats anteriors per calcular l'alçada de l'aula.

iv) Feu una simulació, amb el CABRI, del problema i la seva solució.

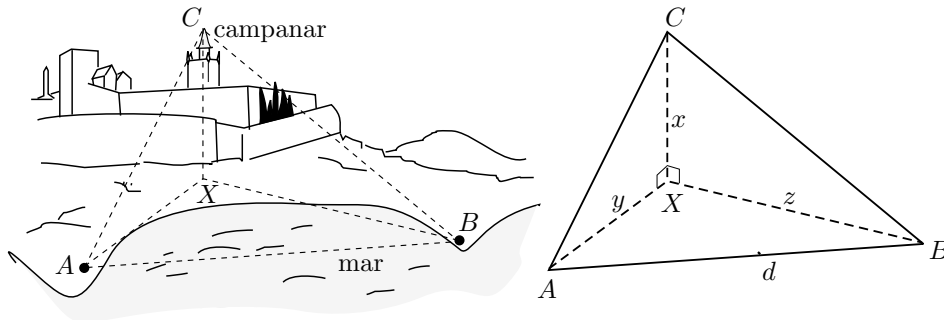
\overline{B}

v) Si entre l'observador O i el peu del mur H hi hagués un obstacle que us impedís mesurar la distància OH , com ho podríeu fer per trobar l'alçada del mur?

\overline{E}_2

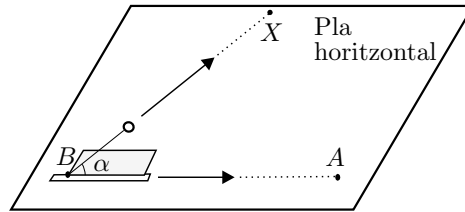
\overline{S}

2. En aquesta activitat es tracta de calcular l'altura XC del campanar de la Catedral de Tarragona sobre el nivell del mar, fent observacions amb el quadrant des de la línia costanera. A més es disposa d'un plànol de la costa que permet únicament calcular la distància $d = AB$ entre els dos punts d'observació A i B .



S

Elaboreu un procediment per assolir aquest objectiu, basat en la semblança de triangles. Tingueu en compte que el quadrant també es pot utilitzar per mesurar angles en el pla horitzontal. Per exemple, si voleu mesurar l'angle \widehat{ABX} només cal col·locar la fullola, on es fan les lectures, horitzontalment; apuntar al punt A, des de B, amb el llistó de la visual, i apuntar amb la plomada al punt X.¹³



□

5.1.2 Els teoremes VI.9 a VI.13. Els orígens de la representació algebraica de la geometria.

En aquest grup de teoremes es troben les construccions que permetrien Descartes [1596-1650], molts segles després, expressar la geometria en forma algebraica i posar, junt amb Fermat [1601-1665], l'eina de la geometria analítica a la disposició de la comunitat matemàtica. El punt de partida del treball de Descartes era el d'assignar a cada segment un nombre, el qual representava la raó d'aquest segment amb un segment que agafava, de sortida, com a segment *unitat*. Al segment unitat li assignava el nombre 1. Llavors, per poder tractar la geometria amb llenguatge algebraic, calia trobar les construccions equivalents a la realització de les operacions aritmètiques de suma, diferència, producte, divisió, i extracció d'arrels. El que feu Descartes fou definir el producte i la divisió amb l'ajut del teorema VI.12, en què es construeix la quarta proporcional de tres

¹³Aquesta activitat es pot simplificar per al primer cicle d'ESO si es proporciona un plànol amb l'escala indicada, el qual, a més de la costa, inclogui tota la zona implicada en l'estudi.

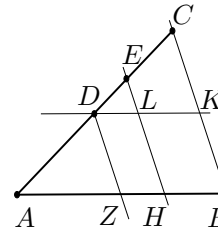
segments, i l'arrel quadrada amb l'ajut del teorema VI.13, en què es construeix la mitjana proporcional de dos segments.¹⁴

Iniciem la presentació del grup amb el teorema VI.10, en ser el VI.9 un cas particular.

• **Teorema VI.10**

Dividir una recta donada de manera semblant a una recta ja dividida.

La clau de la demostració està en l'adequada col·locació de les rectes donades i el traçat d'unes rectes paral·leles que li permetin aplicar el teorema VI.2. Efectivament, considera la recta AB que vol dividir i situa la recta AC , dividida en els punts D i E , formant una angle qualsevol, en A , amb AB . Tot seguit, traça CB i les seves paral·leles EH i DZ , —vegeu la figura adjunta—, i finalment la paral·lela DLK a AB .



Llavors, demostra que Z i H són els punts cercats, utilitzant VI.2 i I.34. Efectivament,

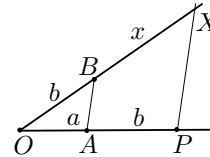
$$\frac{CE}{ED} = \frac{KL}{LD} = \frac{BH}{HZ}, \quad \text{i} \quad \frac{ED}{DA} = \frac{HZ}{ZA}.$$

• **Teorema VI.11**

Donades dues rectes OA i OB , trobar una tercera proporcional.

En llenguatge de raons seria, donats $OA = a$ i $OB = b$, trobar x tal que

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{x}.$$



Per aconseguir-ho, construeix P sobre la prolongació de OA tal que $AP = b$. Llavors, traça una paral·lela per P a OB . La seva intersecció X amb la prolongació de OB , determina el segment $x = BX$ cercat. El teorema VI.2 en dóna la justificació immediata. \square

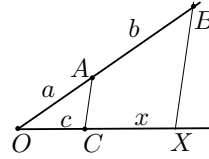
• **Teorema VI.12**

Donades tres rectes OA , AB i OC , trobar una quarta proporcional.

¹⁴Recordem que aquesta última construcció ja s'havia fet en el llibre II; aquí, el que fa Euclides és donar una altre tipus de justificació basada en la proporcionalitat que es desprèn de la semblança de triangles. Sobre el tema de l'assignació numèrica als segments vegeu la introducció de PLA, VIADER [1999], xxxiv–xxxviii. Vegeu de quina manera construeix Descartes les operacions indicades a les pàgines 13–15 de la mateixa obra.

O sigui, donats $OA = a$, $AB = b$ i $OC = c$, trobar x tal que

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{x}.$$



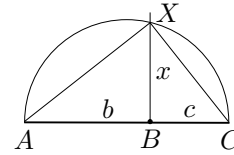
Per aconseguir-ho, col·loca els segments com a la figura, i traça una paral·lela per B a AC . La seva intersecció X amb la prolongació de OC , determina el segment $x = CX$ cercat. Igual que abans, s'obté la justificació gràcies al teorema VI.2. \square

• **Teorema VI.13**

Donades dues rectes AB i BC , trobar una mitjana proporcional.

En el llenguatge de raons posaríem donats $AB = b$ i $BC = c$, trobar x tal que

$$\frac{AB}{x} = \frac{x}{BC}.$$



Per aconseguir-ho, posa AB i BC adjacents sobre la mateixa recta. Traça el semicercle de diàmetre AC , i la perpendicular per B a BC . El punt X d'intersecció d'aquesta perpendicular amb el semicercle determina el segment solució $x = XB$. La justificació es basa en el teorema VI.8 en què ha demostrat que els triangles ABX i XBC són semblants. \square

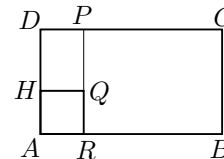
Si es parteix d'aquests teoremes, la comprensió del perquè del tipus de construcció del producte de segments es pot tenir si afegim una altra identificació. Aquesta consisteix a assignar a cada àrea un nombre que defineix la seva raó amb l'àrea unitat, —aquesta última seria l'àrea d'un quadrat de costat el segment unitat—. En el cas concret dels rectangles, el nombre que representa l'àrea coincidiria amb el producte dels nombres que representen els seus costats.¹⁵ Lla-

¹⁵Podríem trobar un fonament per a la justificació d'aquesta identificació, en l'estudi del significat de la *composició de raons* utilitzada per Euclides en el teorema VI.23, però no definida en cap dels seus llibres. Si s'identifiquen les raons amb nombres i la composició amb l'operació numèrica del producte, llavors la identificació esmentada queda clara. Efectivament, una de les propietats d'aquesta composició segons Euclides, és que per a qualsevol L , la raó de dues magnituds K i M es compon de les raons K/L i L/M . Si representem l'operació composició de raons pel símbol \circ , escriurem

$$\frac{K}{M} = \frac{K}{L} \circ \frac{L}{M}.$$

Llavors, si comparem el rectangle $ABCD$ i el quadrat unitat $ARQH$ de la figura, obtenim per la propietat anterior i el teorema VI.2,

$$\frac{ABCD}{ARQH} = \frac{ABCD}{ARPD} \circ \frac{ARPD}{ARQH} = \frac{AB}{AR} \circ \frac{AD}{AH}.$$



Ara, si donem a les raons significat numèric tal com fa Descartes, només cal identificar la

vors, es pot entendre la construcció de Descartes del producte de dos segments a i b si tenim present el teorema VI.16. Allí, Euclides demostra l'equivalència

$$\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{PQ} \iff \text{àrea}(\mathcal{R}_1) = \text{àrea}(\mathcal{R}_2),$$

per als rectangles \mathcal{R}_1 i \mathcal{R}_2 de costats congruents, respectivament, amb AB , PQ i CD , MN . Efectivament, Descartes defineix aquest producte, com la quarta proporcional x dels segments u , a i b , en què u és el segment unitat. S'entén que ho faci així perquè

$$\frac{u}{a} = \frac{b}{x} \implies \text{àrea}(u, x) = \text{àrea}(a, b) \implies a \cdot b = 1 \cdot x = x.$$

De la mateixa manera, per construir el quocient x de dos segments a i b , construirà la quarta proporcional de b , a i u . També s'explica, perquè

$$\frac{b}{a} = \frac{u}{x} \implies \text{àrea}(b, x) = \text{àrea}(a, u) \implies b \cdot x = a \cdot 1 \implies x = \frac{a}{b}.$$

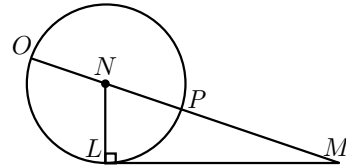
Finalment, per construir l'arrel quadrada x d'un segment a , caldrà construir la mitjana proporcional de u i a . Perquè,

$$\frac{u}{x} = \frac{x}{a} \implies 1 \cdot a = x^2 \implies x = \sqrt{a}.$$

Activitats 5.3

1. Construiu un fitxer amb el CABRI en què es visualitzin les construccions del producte i la divisió de dos segments, i l'arrel quadrada d'un segment. Presenteu-lo de manera que es pugui comprovar amb la calculadora que la mesura dels segments resultants concorda amb el resultat numèric de les operacions. B

2. Descartes dóna la construcció geomètrica de la solució de l'equació $z^2 = az + b^2$, en què $a, b > 0$, utilitzant la figura adjunta. Expliqueu de quina manera la utilitzareu vosaltres per obtenir la solució de l'equació, i feu-ne una visualització amb el CABRI. S



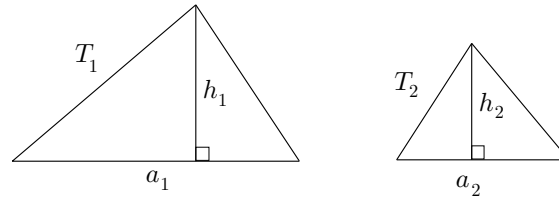
3. Per apreciar la complexitat del treball amb la teoria de la proporció, — mentre no es disposa de la identificació entre nombres i magnituds i les construccions equivalents a les operacions aritmètiques—, plantegem les qüestions següents: P

composició amb l'operació producte i queda justificada la representació de l'àrea del rectangle com el producte dels dos costats. És a dir, en ser $AR = AH = 1$, $\text{àrea}(ABCD) = AB \cdot AD$.

i) Donats dos triangles d'àrees T_1 i T_2 , i un segment p , trobeu un segment x tal que

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{x}.$$

És a dir, es tracta de construir la quarta proporcional quan les magnituds implicades són de diferent tipus.



Notem que, amb les identifications de Descartes, no tindríem problemes. Es tractaria de construir

$$x = \frac{p \cdot T_2}{T_1} = \frac{p \cdot a_2 \cdot h_2}{a_1 \cdot h_1}.$$

ii) Com es podria trobar la composició de raons

$$\frac{q}{p} \circ \frac{T_1}{T_2},$$

en què q i p són segments, i T_1 i T_2 són triangles? Tingueu en compte l'afirmació d'Euclides a VI.23 que diu

\square

$$\frac{K}{M} = \frac{K}{L} \circ \frac{L}{M}.$$

Visualitzeu la construcció i feu una comprovació numèrica amb el CABRI.

\square

5.1.3 El teorema VI.3 i la circumferència d'Apol·loni

El teorema VI.3, conegut com a *teorema de la bisectriu*, es troba relacionat amb la resolució de moltes construccions, i amb la recerca de llocs geomètrics. Concretament, un dels més coneguts entre aquests últims, és el que rep el nom de *circumferència d'Apol·loni*. Se li ha donat aquest nom perquè Apol·loni l'estudià en el segon llibre de la seva obra *Llocs plans*, la qual cosa sabem pel comentari d'Eutoci a les *Còniques* d'Apol·loni, i per Pappo el qual ho refereix amb aquestes paraules:¹⁶

¹⁶Vegeu EECKE [1933] II, llibre VII, 498–499 de l'edició de 1982.

El segon llibre conté això:

Si dues rectes traçades per dos punts es tallen i els quadrats construïts sobre aquestes difereixen en una àrea donada, el punt de tall es troba sobre una recta donada en posició.

D'altra part, si aquestes rectes estan en una raó donada, el punt de tall es troba sobre una recta o una circumferència.

.....

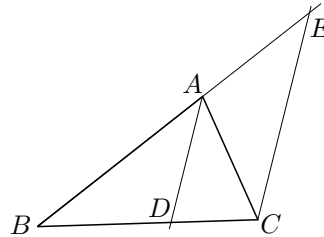
Si els punts donats són B i C , i la raó donada és b/c , l'últim lloc referit en el fragment rep el nom de *circumferència d'Apol·loni dels punts B i C per a la raó b/c* . Sabem que Apol·loni no en fou el descobridor perquè aquest lloc apareix abans, a la *Meteorologia* d'Aristòtil.¹⁷ Abans d'entrar en el seu estudi, presentarem el teorema de la bisectriu, el qual ens serà d'utilitat.

• **Teorema VI.3**

Si es divideix en dues parts iguals \widehat{BAD} i \widehat{CAD} un angle \widehat{BAC} d'un triangle BAC , i la recta que talla l'angle talla també la base BC , els segments BD i CD de la base tindran la mateixa raó que els altres costats BA i CA del triangle; i si els segments de la base tenen la mateixa raó que els altres costats del triangle, la recta traçada des del vèrtex A fins la secció D , dividirà en dues parts iguals l'angle del triangle.

Euclides comença prolongant la recta BA fins que talla en el punt E , la paral·lela, per C , a la bisectriu AD . Amb això obté $AE = AC$, perquè

- $\widehat{ACE} = \widehat{CAD}$, per I.29, —alterns interns—,
- $\widehat{CAD} = \widehat{BAD}$, per hipòtesi,
- $\widehat{BAD} = \widehat{AEC}$, per I.29, —corresponents—.



Llavors, $\widehat{ACE} = \widehat{AEC}$. Per tant, per I.6, $EA = CA$. Finalment, per V.7 i VI.2,

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BA}{EA} = \frac{BD}{CD}$$

i per V.11,

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD}.$$

Quant al recíproc, la hipòtesi, VI.2 i V.11 permeten afirmar que

$$\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD} = \frac{BA}{EA} \implies \frac{BA}{CA} = \frac{BA}{EA}.$$

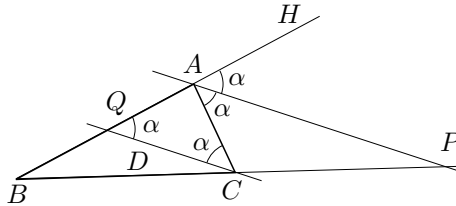
¹⁷Vegeu-ne el fragment a VERA [1970], 627–631. Vegeu una anàlisi força completa d'aquest problema a KNORR [1986], 102–108 de l'edició de 1991.

Llavors, per V.9, $CA = EA$, i per I.5, $\widehat{AEC} = \widehat{ACE}$. Finalment, per I.29,

$$\widehat{BAD} = \widehat{AEC} = \widehat{ACE} = \widehat{CAD}.$$

□

Observem que aquest resultat també és vàlid per a la bisectriu exterior de l'angle en A , excepte en el cas que aquesta sigui paral·lela al costat BC . És a dir si prolonguem BA fins H , el teorema és vàlid per a la bisectriu de l'angle \widehat{CAH} .



Només cal traçar la paral·lela CQ , per C , a la bisectriu AP , en què Q pertany a AB , i P pertany a la prolongació de BC . Llavors, per les mateixes raons que abans,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{AP} = \frac{BP}{PC}.$$

Quant al recíproc es raona, també igual que en el cas de la bisectriu interior. Queda clar que el teorema no es compleix quan la bisectriu exterior és paral·lela al costat BC —és a dir $AB = AC$ —, perquè llavors no existeix P . □

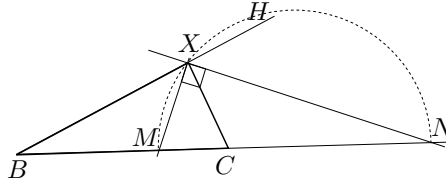
Aquest és un moment apropiat per plantejar la qüestió més general a la qual s'ha referit Pappo. Volem trobar el lloc geomètric de “tots” els punts X del pla tals que, donats els punts B i C , i els segments b i c , es compleix $XA/XB = b/c$.

De moment, per tot el que hem vist, en coneixem dos, M i N , els quals estan sobre la recta que passa per B i C . La seva determinació és fàcil i es pot aconseguir a partir de la construcció de triangles semblants.¹⁸ Es tracta de fer una anàlisi que permeti determinar el lloc de tots els altres punts que compleixen la propietat. Treballem en el cas $b \neq c$, perquè en el cas $b = c$ es veu immediatament que el lloc cercat és la mediatriu de BC . Suposem, doncs, que tenim construït un punt X , exterior a la recta per B i C , el qual compleix la propietat. Si considerem el triangle BXC , les bisectrius pel vèrtex X tallen, per VI.3, la recta per B i C en els punts M i N coneguts. Llavors, es compleix

$$\widehat{MXN} = \frac{1}{2} \widehat{BXH} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Per tant, el punt X pertany a la circumferència de diàmetre MN de posició determinada.

¹⁸Vegeu l'activitat 5.4.2.

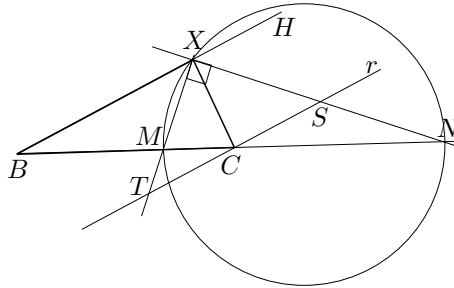


Ara, un cop sabem que qualsevol punt X del lloc cercat pertany a la circumferència, falta esbrinar si tots els punts de la circumferència tenen la propietat. Partim del fet que

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} = \frac{b}{c},$$

i cerquem XB/XC per a qualsevol punt $X \neq M, N$ de la circumferència. Una manera de relacionar aquestes raons és la de cercar la construcció d'alguna parella de triangles semblants adequats. Això s'aconsegueix traçant la paral·lela r a BX per C , i a partir d'ella les parelles de triangles semblants, —vegeu el gràfic—,

$$BMX \sim CMT \quad \text{i} \quad BNX \sim CNS.$$



D'aquesta manera s'obté

$$\frac{BX}{CS} = \frac{NB}{NC} = \frac{MB}{MC} = \frac{BX}{CT} \implies CS = CT.$$

Això implica que XC és la mitjana del triangle rectangle TXS corresponent a l'angle recte; per tant, $CX = CS$, en ser el radi de la seva circumferència inscrita. Finalment,

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BX}{CS} = \frac{NB}{NC} = \frac{b}{c}.$$

És a dir que la circumferència de diàmetre MN és el lloc cercat, el qual anomenem circumferència d'Apol·loni de B i C per a la raó b/c .

Activitats 5.4

1. Constrúiu un quadrat conegut un vèrtex i el punt mitjà d'un dels costats no adjacents al vèrtex.



2. Donats dos segments b i c , i dos punts B i C , elaboreu amb el CABRI:

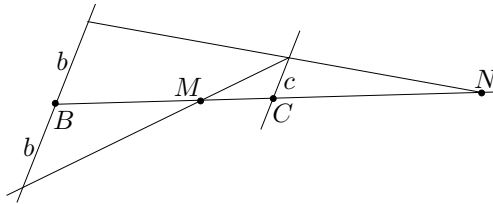
i) Un fitxer en què es visualitzi, pas a pas, la construcció de:

– El punt M interior a BC , i el punt N sobre la seva prolongació tals que

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} = \frac{b}{c}.$$

▮ – La circumferència d’Apol·loni dels punts B i C per a la raó b/c .

Indicació: Per a la primera part us podeu inspirar en el gràfic adjunt.



▮ ii) Una macro que donats dos segments b i c , i dos punts B i C , construeixi la circumferència d’Apol·loni d’aquests dos punts per a la raó b/c .

▮ 3. Construïu amb regle i compàs un triangle XBC , del qual coneixeu el costat BC , l’angle oposat $\widehat{BXC} = \alpha$ i la relació $XB/XC = b/c$. Feu-ne una visualització amb el CABRI.

▮ 4. Donats tres punts A , B i C , i la grandària d’un angle $\alpha < 180^\circ$, construïu la circumferència que passa per A i B , i tal que les seves tangents per C formin un angle α . Feu-ne una visualització amb el CABRI per examinar el nombre de solucions del problema.

□

5.2 El naixement de la trigonometria

Si s’examinen els treballs que s’han conservat de les antigues civilitzacions, que tenen a veure amb l’estudi i tractament sistemàtic de les relacions entre segments i circumferències, s’arriba a la conclusió que la trigonometria nasqué a Grècia a l’època d’Hiparc [II aC], o potser una mica abans amb Apol·loni [III aC]. També sembla clar que una de les motivacions que conduïren a plantejar les relacions entre les mesures de tots els elements del triangle, residí en l’intent de crear un model cosmològic racional que expliqués i relacionés els moviments dels astres en la volta celeste, i contribuís a la mesura cada cop més acurada dels fenòmens relacionats, com la durada de les hores de claror, les posicions relatives dels planetes, etc. Aquest intent esdevingué en el món grec, a més tardar, en el segle IV aC, a l’època de Plató. Els principis justificats amb arguments més o

menys racionals, en què es tenia que basar aquest model deien fonamentalment que:

- La Terra restava immòbil en el centre d’una gran esfera, en la qual es trobaven els estels fixos, és a dir aquells que conservaven les seves distàncies relatives per a un observador de la Terra. A més aquesta esfera girava al voltant d’un eix que passava pel centre de la Terra.
- El Sol, la Lluna i els cinc planetes coneguts es trobaven a l’interior de l’esfera i compartien el seu moviment. També estaven sotmesos a d’altres moviments que provocaven que les seves projeccions sobre l’esfera seguisin trajectòries diferents entre els estels fixos. Aquestes eren força complexes en el cas dels cinc planetes, en què periòdicament canviaven de sentit.
- En ser l’únic moviment que convenia al Cel, pel seu caràcter diví, el circular i uniforme, s’havien d’explicar aquestes trajectòries a partir de moviments circulars i uniformes.

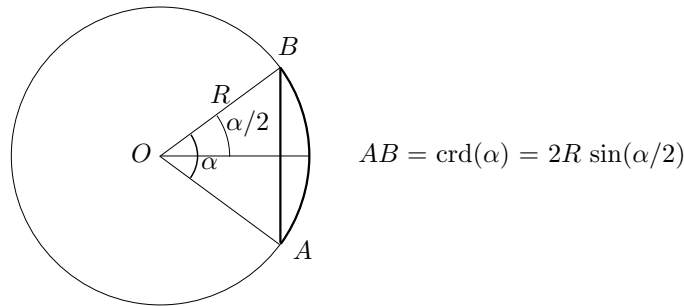
Només tenim notícia que treballassin amb un principi diferent al primer, d’Heraclides de Pontus [IV aC], Aristarc de Samos [III aC] —com explica Arquimedes a l’*Arenari*¹⁹—, i un segle més tard Seleuco, els quals proposaven una teoria heliocèntrica. Quant al repte plantejat, diversos matemàtics, astrònoms i filòsofs van contribuir a l’elaboració del model. Entre ells cal destacar, en el segle IV aC, Éudox, Calipo i Aristòtil, que crearen i desenvoluparem models en què els moviments dels planetes estaven determinats pels d’unes esferes homocèntriques, encaixades en l’esfera dels estels fixos. Aquestes tenien diferents eixos de rotació que passaven pel centre de la terra, i els planetes s’hi trobaven lligats. Amb els diferents moviments que cada esfera imprimia a les més interiors, i aquestes als planetes, podien explicar aproximadament perquè els planetes seguien trajectòries tan erràtiques respecte dels estels fixos.²⁰ Tot i això, els models eren incomplets. A partir possiblement d’Apol·loni i, de ple, amb Hiparc i Ptolemeu [II], per tal de concordar més acuradament els models amb les observacions, el model de les esferes homocèntriques evolucionà. Es féu la inclusió de cercles excèntrics i epicicles, mitjançant els quals s’aproximaven millor les trajectòries dels astres interiors de l’esfera celeste. En d’altres paraules els moviments d’aquests astres es podien explicar a partir de la composició de trajectòries circulars amb diferents centres. La complexitat que afegia aquesta teoria, contribuí a fer més punyent la necessitat de relacionar les mesures dels angles i els costats dels triangles. Hiparc fou, possiblement, el primer a establir aquesta relació, compilant una “taula de cordes” corresponents als arcs d’una circumferència, la qual cosa també va fer Menelau en el primer segle de la nostra era, cap de les quals s’ha

¹⁹Vegeu VERA [1970], II, 205.

²⁰Vegeu DREYER [1953], 87–122, i HEATH [1913], 191–248.

conservat. L'obra més antiga en què podem trobar-ne un model és la *Composició Matemàtica* —o *Sintaxi Matemàtica*— de Ptolemeu, composta de tretze llibres conservats íntegrament.²¹ Allí podem estudiar la seva presentació, així com els procediments geomètrics, —amb les demostracions pertinents—, emprats per elaborar-les.

En aquestes taules, els valors de les cordes corresponents a diferents arcs —o angles centrals— d'una circumferència venien donats en funció del radi, més exactament, en funció de les parts iguals en què es dividia el radi. Així, si en la circumferència (O, OA) es considera la corda AB i l'arc \widehat{AB} , subtendits per l'angle central $\alpha = \widehat{AOB}$, la taula proporcionava per a cada valor de α la mesura de la corda $AB = \text{crd}(\alpha)$.



Els arcs eren mesurats a partir de la divisió de la circumferència en 360 parts iguals, o graus. Cadascuna d'aquestes parts es dividia en 60 parts més, i aquestes últimes en 60 més. Per mesurar les cordes, Hiparc feia servir una unitat de longitud basada en la comparació del radi amb la circumferència. Considerava la raó entre la longitud de la circumferència i el diàmetre, és a dir π , aproximada per l'expressió sexagesimal $3; 8, 30$.²² Llavors calculava el valor del radi en minuts d'arc de circumferència. Així obtenia, en notació sexagesimal,

$$\text{Radi} = \frac{360 \cdot 60}{2\pi} = 57,18_{(60)} \text{ minuts},$$

és a dir, 3438 minuts d'arc. A partir d'aquí, donava el valor de les cordes en aquestes mateixes unitats. El cas més simple de calcular és el de la corda de 60° . En ser aquesta igual al radi, tenim

$$\text{crd}(60^\circ) = \text{Radi} = 57,18.$$

Més tard, Ptolemeu canviaria les unitats de mesura i consideraria el radi compost de 60 unitats. En definitiva, si s'observa el gràfic de més amunt, s'obtenen

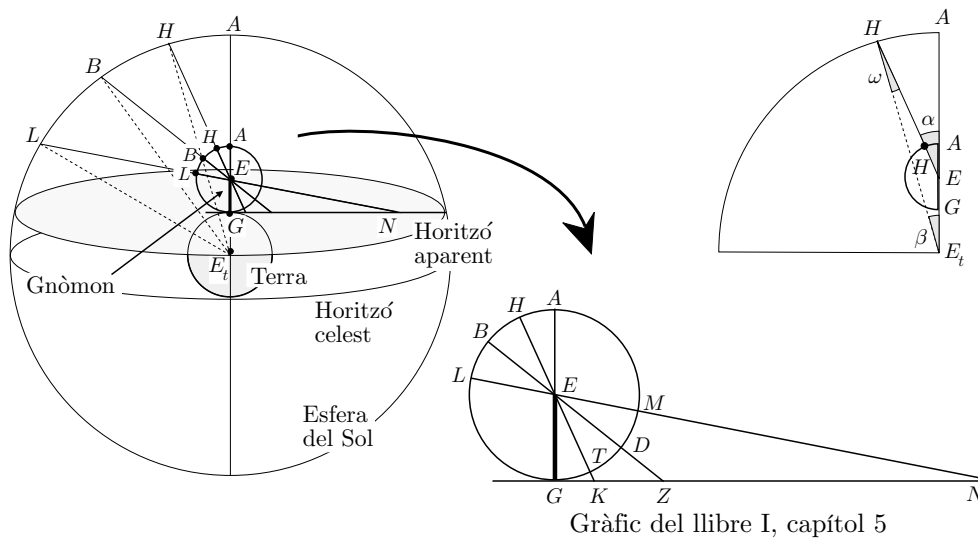
²¹Vegeu PTOLEMEU [II].

²²Recordem que “;” separa la part entera de la part fraccionària.

les següents equivalències amb la trigonometria actual, en què R és el radi de la circumferència:

Angle	Corda de l'angle	Hiparc	Ptolemeu
α	$\text{crd}(\alpha) = 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$6876 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$120 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Per tal de percebre la innovació que representen els mètodes d'Hiparc i Ptolemeu, en els càlculs referents a les mesures d'un triangle, estudiarem el problema que presenta aquest últim en el llibre I, capítol 5.²³ Allí tracta de calcular les longituds de les ombres projectades per un gnòmon EG de longitud 60, en la latitud geogràfica de 36° , els dies dels equinoccis i dels solsticis.²⁴ El moment del dia triat és el del pas del Sol pel meridià del lloc, és a dir quan la seva trajectòria es troba en el punt més alt sobre l'horitzó. Observem en les figures adjuntes, la de la part inferior de la dreta, en la qual es recolza el seu treball. Notem que identifica els angles de vèrtex en el centre E_t de la terra, —de costats que passen per les diferents posicions H, B, L del Sol en els solsticis i equinoccis, i el zenit A del lloc—, amb els determinats pels mateixos punts, i el vèrtex en l'extrem superior E del gnòmon. Ho justifica «en no ser la terra només que un punt i un centre, relativament a l'esfera del Sol, de manera que no hi ha diferència entre el centre E_t , i l'extremitat superior E del gnòmon».



Estudiem aquesta justificació i el càlcul de la longitud de l'ombra, centrant-nos en el cas del solstici d'estiu. Com que «no hi ha diferència entre el centre E_t

²³Vegeu PTOLEMEU [II], volum I, 74–75 de l'edició de 1988, i la secció 8.10.1.

²⁴Vegeu l'apèndix 1 a la secció 5.7, per als conceptes bàsics de la visió cosmològica en temps de Ptolemeu.

i l'extremitat superior E del gnòmon», es té —mireu la figura—

$$\omega \approx 0^\circ \implies \alpha = \omega + \beta \approx 0^\circ + \beta = \beta.$$

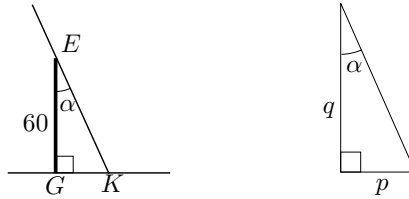
Llavors quan, el dia del solstici d'estiu, el Sol en el seu pas pel meridià, es troba en el punt H es compleix $\widehat{KEG} = \widehat{HEA}$. Aquest angle és igual a la diferència entre la latitud 36° i la declinació del Sol. En ser aquesta última igual a la inclinació de l'eclíptica, calculada en aquell temps en $23^\circ 51' 20''$, s'obté

$$\widehat{KEG} = 36^\circ - 23^\circ 51' 20'' = 12^\circ 8' 40''.$$

Si no haguessin elaborat les taules de cordes, el procediment de càlcul de l'ombra hagués presentat tres possibilitats:

- Esperar el dia del solstici i prendre la mesura directament.
- No esperar el solstici, construir un triangle rectangle congruent a partir del criteri A–C–A, [90° – 60 – $12^\circ 8' 40''$], i prendre la mesura del costat que representa l'ombra.
- No esperar el solstici, construir un triangle semblant, —en aquest cas no caldrà que el costat conegut mesuri 60 unitats—, i establir la proporcionalitat entre els costats p , q del triangle construït, i les longituds del gnòmon $EG = 60$ i l'ombra GK desconeguda. S'obtindria,

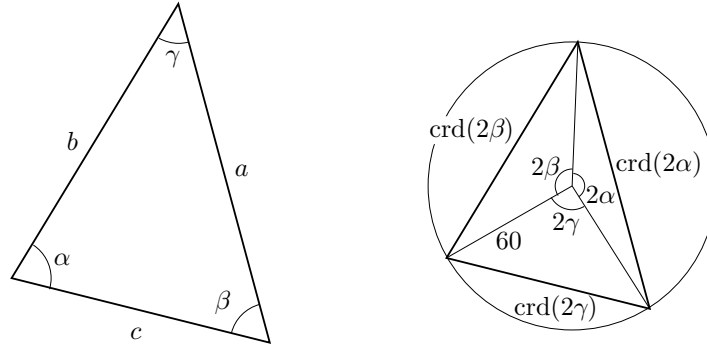
$$\frac{GK}{p} = \frac{60}{q} \implies GK = \frac{60 \cdot p}{q}.$$



El que es van plantejar aquests geòmetres i astrònoms, era el fet d'estalviar-se aquestes construccions. Sobretot tenint en compte que, en els problemes en què hi havia implicats més d'un triangle, s'haurien de repetir més d'una vegada. Aquesta necessitat d'estalvi era encara més urgent en els problemes en què s'havia de treballar amb triangles sobre l'esfera. El camí que decidiren seguir fou el de considerar una circumferència, —de radi 3438 en el cas d'Hiparc, i 60 a Ptolemeu—, i elaborar una taula amb la mesura de les cordes subtendides pels diferents arcs. D'aquesta manera, si es té un triangle de costats a , b i c , i angles α , β i γ , el triangle inscrit a la circumferència de costats $\text{crd}(2\alpha)$, $\text{crd}(2\beta)$ i $\text{crd}(2\gamma)$ li és semblant. A partir d'això, si es coneixen α , β i γ , i el costat a , per calcular els altres costats b i c , només cal fer dues coses:

- Consultar els valors de les cordes dels angles 2α , 2β i 2γ a les taules.
- Calcular

$$b = \frac{a \cdot \text{crd}(2\beta)}{\text{crd}(2\alpha)}, \quad c = \frac{a \cdot \text{crd}(2\gamma)}{\text{crd}(2\alpha)}. \quad (5.1)$$



Així, en el problema que estem estudiant, el que fa Ptolemeu és calcular la longitud de l'ombra GK , amb l'ajut de la seva taula:

$$GK = \frac{GE \cdot \text{crd}(2\alpha)}{\text{crd}(2 \cdot \widehat{GKE})}.$$

Concretament,

$$\begin{aligned} \alpha = 12^\circ 8' 40'' &\implies 2\alpha = 24^\circ 17' 20'' \implies \text{crd}(2\alpha) = 25; 14, 43. \\ \widehat{GKE} = 90^\circ - \alpha &\implies 2 \cdot \widehat{GKE} = 180^\circ - 2\alpha = 155^\circ 42' 40'' \implies \\ &\implies \text{crd}(2 \cdot \widehat{GKE}) = 117; 18, 51. \end{aligned}$$

Per tant,

$$GK = \frac{GE \cdot \text{crd}(2\alpha)}{\text{crd}(2 \cdot \widehat{GKE})} = \frac{60 \cdot 25; 14, 43}{\text{crd}(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{60 \cdot 25; 14, 43}{117; 18, 51} = 12; 55. \quad (5.2)$$

Si fem una comprovació amb les nostres eines trigonomètriques obtenim,

$$GK = \frac{60}{\tan 77^\circ 51' 20''} = 12.911575 \approx 12; 54, 42.$$

Activitats 5.5

1. Comproveu que per als problemes amb triangles rectangles d'angles cone- \overline{B}

guts, si es coneix la hipotenusa només cal fer el càlcul d'una corda per trobar un catet. Ara bé, si es vol trobar un catet a partir de l'altre catet, cal calcular dues cordes. Això ve a establir una quasi-equivalència entre les prestacions directes de la taula de cordes i de la nostra calculadora científica. Concretament, les taules de cordes es poden interpretar com a taules de sinus i de cosinus, però manquen unes taules per a un càlcul directe equivalent al de la tangent. En aquest últim cas, cal consultar els valors de dues cordes d'angles suplementaris i dividir-los.

S

□

5.3 La taula de cordes. El teorema de Ptolemeu

En el capítol 9 del llibre I de l'*Almagest*, trobem una col·lecció de teoremes que li permeten construir vuit taules de cordes organitzades en tres columnes:²⁵

- La primera columna conté els valors dels arcs de circumferència expressats en graus i minuts. Comença pel valor $0^{\circ}30'$, i arriba a 360° amb intervals de $30'$.²⁶
- La segona columna conté els valors corresponents de les cordes. La unitat de mesura és $\frac{1}{120}$ del diàmetre, i la part fraccionària ve donada en numeració sexagesimal.
- La tercera columna conté les trentenes parts de les diferències o increments entre cada corda i la immediatament posterior.

Així, de la consulta directa de les taules es poden obtenir les cordes de tots els angles expressats en graus i minuts. Per al càlcul de la corda d'un angle expressat, a més, en segons, només calia fer una interpolació lineal. Per exemple, la manera de trobar el valor que assigna Ptolemeu, —en el problema de la secció anterior a la pàgina 235—, a la $\text{crd}(24^{\circ}17'20'')$ consistiria en:²⁷

- 1) Consultar a les taules, les dues files consecutives,

²⁵Vegeu PTOLEMEU [II], volum I, 26–45 de l'edició de 1988.

²⁶MAOR [1998], 16, explica que la paraula *grau* per designar la unitat de mesura dels angles, té origen grec. Ells utilitzaven la paraula *μοιρα* (*moira*), traduïda pels àrabs per *daraja*, la qual esdevé *de gradus* en llatí. D'altra banda els grecs anomenaven “primera part” la seixantena part del grau, i “segona part” la seixantena part de la primera part. Passat al llatí es convertiria en *pars minuta prima* i *pars minuta secunda*, és a dir la “primera part petita” i la “segona part petita”. Actualment, ha quedat *minut* i *segon*. Vegeu també CAJORI [1928–29], volum II, 142–148 de l'edició de 1993.

²⁷És evident que els dos últims passos es poden reunir en un de sol, però preferim mostrar la diferència entre l'actuació si existeixen minuts d'arc, o si existeixen minuts i segons.

Arcs °	Cordes			Diferències/30			
	p	'	''	p	'	''	'''
45.5	46	24	19	0	0	57	54
46	46	53	15	0	0	57	46
46.5	47	22	9	0	0	57	40
47	47	50	59	0	0	57	33
47.5	48	19	46	0	0	57	27
48	48	48	30	0	0	57	20
48.5	49	17	10	0	0	57	13
49	49	45	48	0	0	57	7
49.5	50	14	21	0	0	57	0
50	50	42	51	0	0	56	53
50.5	51	11	17	0	0	56	46
51	51	39	40	0	0	56	39
51.5	52	8	0	0	0	56	31
52	52	36	16	0	0	56	26
52.5	53	4	28	0	0	56	18
53	53	32	38	0	0	56	10
53.5	54	0	42	0	0	56	2
54	54	28	43	0	0	55	55
54.5	54	56	41	0	0	55	47
55	55	24	36	0	0	55	40
55.5	55	52	26	0	0	55	33
56	56	20	11	0	0	55	24
56.5	56	47	54	0	0	55	16
57	57	15	32	0	0	55	9
57.5	57	43	7	0	0	55	1
58	58	10	37	0	0	54	53
58.5	58	38	4	0	0	54	45
59	59	5	26	0	0	54	37
59.5	59	32	45	0	0	54	28
60	60	0	0	0	0	54	20
60.5	60	27	11	0	0	54	12
61	60	54	16	0	0	54	4
61.5	61	21	18	0	0	53	55
62	61	48	17	0	0	53	47
62.5	62	15	10	0	0	53	38
63	62	42	0	0	0	53	30
63.5	63	8	45	0	0	53	22
64	63	35	26	0	0	53	12
64.5	64	2	2	0	0	53	3
65	64	28	34	0	0	52	55
65.5	64	55	0	0	0	52	46
66	65	21	24	0	0	52	37
66.5	65	47	42	0	0	52	28
67	66	13	56	0	0	52	19
67.5	66	40	7	0	0	52	9

Versió d'un fragment de la taula de cordes de l'*Almagest*

Arcs		Cordes			Trentenes de les diferències			
Graus	Minuts	Parts del diàmetre	Prim.	Seg.	Parts	Prim.	Seg.	Terc.
24	0	24	56	58	0	1	1	26
24	30	25	27	41	0	1	1	22

2) Calcular amb l'ajut de les “trentenes de les diferències”,

$$\begin{aligned} \text{crd}(24^\circ 17') &= \text{crd}(24^\circ) + 17 \cdot 0; 1, 1, 26 \\ &= 24; 56, 58 + 0; 17, 24, 22 = 25; 14, 22, 22. \end{aligned}$$

3) Interpol·lar linealment el valor de la corda cercada entre $\text{crd}(24^\circ 17')$ i $\text{crd}(24^\circ 18')$,

$$\begin{aligned} \text{crd}(24^\circ 17' 20'') &= \text{crd}(24^\circ 17') + \frac{20}{60} \cdot 0; 1, 1, 26 = \\ &= 25; 14, 22, 22 + 0; 20 \cdot 0; 1, 1, 26 = 25; 14, 42, 50.40 \approx \\ &\approx 25; 14, 43. \end{aligned}$$

5.3.1 Anàlisi de la construcció de la taula de cordes

Ptolemeu inicia el capítol 9, previ a la presentació dels teoremes i les taules, amb el següent discurs:

Per facilitar la pràctica, construirem una taula dels valors d'aquestes rectes [les cordes], partint la circumferència en 360 graus. Tots els arcs de la nostra taula aniran creixent en mig grau, constantment, i donarem per a cadascun d'aquests arcs el valor de la corda, suposant el diàmetre partit en 120 parts. Es veurà per la pràctica, que aquest nombre serà el més còmode que es pot escollir. Mostrarem, primerament, com mitjançant un nombre el més petit possible de teoremes, que són sempre els mateixos, s'assoleix un mètode general i ràpid per obtenir aquests valors. No ens limitarem a la taula, de la qual es podrien agafar aquests valors sense conèixer la teoria, sinó que facilitarem els mitjans de provar-los i verificar-los, donant els mètodes de construcció. Utilitzarem, en general, la numeració sexagesimal, per evitar l'embolic de les fraccions; i, en les multiplicacions i les divisions, agafarem sempre els resultats més aproximats, de manera que, allò que negligirem no els privarà de ser sensiblement justos.

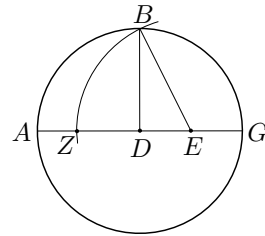
La seva manera d'actuar, dirigida a trobar la corda d' 1° , la d' $\frac{1}{2}^\circ$ i la corda de la suma d'arcs de cordes conegudes, presenta les etapes següents:

- 1) Troba els valors de $\text{crd}(36^\circ)$, $\text{crd}(60^\circ)$, $\text{crd}(72^\circ)$, $\text{crd}(90^\circ)$ i $\text{crd}(120^\circ)$, a partir de propietats dels polígons regulars presentades en els *Elements* d'Euclides.
- 2) Utilitza el teorema de Pitàgores per relacionar els valors de les cordes dels angles suplementaris.
- 3) Troba la manera de calcular $\text{crd}(\alpha - \beta)$ en què α i β són arcs de cordes conegudes, mitjançant el lema conegut com a teorema de Ptolemeu. Així pot calcular $\text{crd}(12^\circ) = \text{crd}(72^\circ - 60^\circ)$.
- 4) Relaciona la corda d'un arc amb la corda de l'arc meitat. Això li permetrà calcular $\text{crd}(6^\circ)$, $\text{crd}(3^\circ)$, $\text{crd}(1\frac{1}{2}^\circ)$ i $\text{crd}(\frac{3}{4}^\circ)$.
- 5) Compara les raons entre arcs i les raons entre les seves cordes, i ho aplica al càlcul de $\text{crd}(1^\circ)$, mitjançant la comparació de $\text{crd}(\frac{3}{4}^\circ)$, $\text{crd}(1^\circ)$ i $\text{crd}(1\frac{1}{2}^\circ)$. Llavors, amb la relació del quart apartat troba, també, $\text{crd}(\frac{1}{2}^\circ)$.
- 6) Finalment, calcula $\text{crd}(\alpha + \beta)$ en què α i β són arcs de cordes conegudes. Aquest últim pas li permet construir tota la taula mitjançant successius càlculs de $\text{crd}(\alpha + \frac{1}{2}^\circ)$.

Anirem seguint les etapes de la seva actuació.

Etapa 1

El primer que fa es justificar que si en un cercle (D, DA) traça el diàmetre AG , considera el punt mitjà E de GD , el radi DB perpendicular a AG , i el punt Z sobre AD tal que $EZ = EB$, llavors



- GD és el costat de l'hexàgon inscrit.
- DZ és el costat del decàgon inscrit, per XIII.9 dels *Elements*.²⁸ Efectivament, per II.6 i I.47 dels *Elements*,

$$GZ \times ZD + ED^2 = EZ^2 = EB^2 \quad \text{i} \quad ED^2 + DB^2 = EB^2.$$

²⁸Per als enuncis de les proposicions XIII.9 i XIII.10 dels *Elements*, vegeu la secció 2.7.2

Per tant,

$$GZ \times ZD = DB^2 = DG^2.$$

És a dir que GZ és tallat en mitjana i extrema raó en el punt D . Consegüentment, en ser DG el costat de l'hexàgon inscrit, ZD serà el costat del decàgon inscrit, per XIII.9.

- BZ és el costat del pentàgon inscrit, per XIII.10 dels *Elements*, en ser ZD el costat del decàgon inscrit i DB el de l'hexàgon.

Llavors, en ser el costat del decàgon igual a la corda de 36° , aplica el teorema de Pitàgores i obté,²⁹

$$\begin{aligned} \text{crd}(36^\circ) &= DZ = EZ - ED = EB - ED = \sqrt{BD^2 + ED^2} - ED = \\ &= \sqrt{3600 + 900} - 30 = 67; 4, 55 - 30 = 37; 4, 55. \end{aligned}$$

Després, en ser el costat del pentàgon igual a la corda 72° , obté

$$\begin{aligned} \text{crd}(72^\circ) &= BZ = \sqrt{DZ^2 + BD^2} = \sqrt{37; 4, 55^2 + 3600} = \\ &= \sqrt{4975; 4, 15} = 70; 32, 3. \end{aligned}$$

També sap que la corda de 60° és igual al costat de l'hexàgon inscrit, el qual és igual al radi. Per tant,

$$\text{crd}(60^\circ) = GD = 60.$$

Quant a la corda de 90° , sap que és igual al costat del quadrat inscrit. Consegüentment,

$$\text{crd}(90^\circ) = BG = \sqrt{DG^2 + DB^2} = \sqrt{2 \cdot 60^2} = 84; 51, 10.$$

Finalment, obté la corda de 120° com el costat del triangle equilàter inscrit, del qual sap que el seu quadrat és tres vegades el quadrat del radi:

$$\text{crd}(120^\circ) = \sqrt{3 \cdot 60^2} = \sqrt{10800} = 103; 55, 23.$$

Etapa 2

Respecte de les cordes dels angles suplementaris afirma que

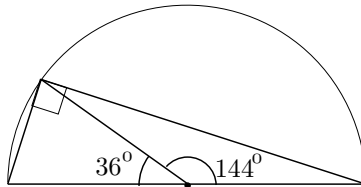
És fàcil veure que, mitjançant les cordes donades, s'obtidran aquelles que subtendeixen la resta de la semicircumferència, perquè la suma dels seus quadrats és igual al quadrat del seu diàmetre.

²⁹No indica com fa el càlcul d'arrels. Per observar l'aproximació amb que treballa vegeu l'activitat 5.6.1, en què es calcula $\text{crd}(120^\circ)$.

És a dir que

$$\text{crd}(180^\circ - \alpha) = \sqrt{120^2 - \text{crd}^2(\alpha)}.$$

Llavors, ho aplica al càlcul de la corda de 144° :

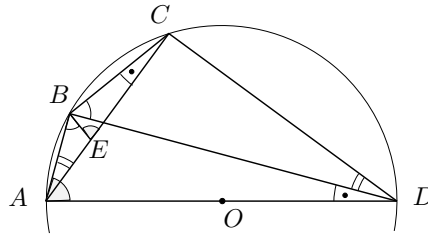


$$\begin{aligned} \text{crd}(144^\circ) &= \sqrt{120^2 - \text{crd}^2(36^\circ)} = \sqrt{14400 - 1375; 4, 15} = \\ &= \sqrt{13204; 55, 45} = 114; 7, 37. \end{aligned}$$

Etapa 3

En aquest punt, es planteja de trobar les cordes dels arcs que són diferència de dos arcs de cordes conegudes. Això constituirà el primer pas per calcular les cordes d'arcs cada vegada més petits.

Aquí entra en joc teorema de Ptolemeu, que ell dóna com un lema. No sabem si el teorema és original d'ell ni, molt menys, el camí del seu descobriment. Però veurem que una anàlisi del problema que ens ocupa ens hi condueix.



Es tracta d'establir alguna relació entre els segments $AB = \text{crd}(\widehat{AB})$ i $AC = \text{crd}(\widehat{AC})$, i la corda $BC = \text{crd}(\widehat{BC})$ de l'arc diferència $\widehat{BC} = \widehat{AC} - \widehat{AB}$.

Notem que si coneixem els valors de AB i AC , coneixem els valors de les cordes dels arcs suplementaris, és a dir BD i CD . D'altra banda coneixem el valor del diàmetre.

A més, si observem la figura adjunta, i per les relacions entre angles inscrits en una circumferència, tenim

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} \quad \text{i} \quad \widehat{BCA} = \widehat{BDA}.$$

Amb tota aquesta informació caldria establir relacions entre la corda BC i la resta de cordes conegudes. Una estratègia a seguir és cercar triangles semblants

en què estiguin implicats aquests segments. De moment, no n'hi ha cap parella, però Ptolemeu, possiblement inspirat per la igualtat dels angles esmentats, té la pensada de considerar el triangle ABE , en què E pertany a la corda AC i $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$. Llavors, si tornem a utilitzar les relacions entre angles inscrits, tenim les semblances entre triangles,

$$BCD \sim BEA \quad \text{i} \quad ADB \sim ECB.$$

Consegüentment,

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AE} \quad \text{i} \quad \frac{AD}{EC} = \frac{AB}{EB} = \frac{BD}{CB}.$$

Això implica que,

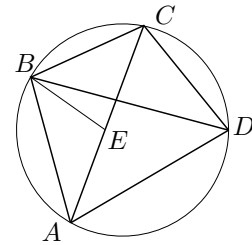
$$AE \cdot BD = AB \cdot CD \quad \text{i} \quad AD \cdot BC = EC \cdot BD.$$

Si sumem les dues igualtats, obtenim

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot (AE + EC) = BD \cdot AC. \quad (5.3)$$

O sigui, que s'ha pogut trobar una relació entre la corda BC de l'arc $\widehat{BC} = \widehat{AC} - \widehat{AB}$ i la resta de cordes conegudes. El resultat que proporciona Ptolemeu com un lema per als seus càlculs, és una generalització de la relació (5.3) a quadrilàters convexos inscrits en una circumferència. La prova que dóna és la mateixa que resulta de l'exposició anterior, perquè ha sigut independent de que un dels costats del quadrilàter fos un diàmetre. Així el teorema ve expressat a l'*Almagest* de la manera següent:

Sigui un quadrilàter qualsevol inscrit en el cercle $ABCD$; siguin traçades les diagonals AC , BD : es tracta de provar que el rectangle construït sobre AC i BD , és igual als dos rectangles dels costats oposats AB , CD i AD , BC .



És a dir,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

en què recordem que la clau de la demostració està en considerar el punt E sobre AC tal que $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$.

Ara, si en la recerca de $\text{crd}(\widehat{AC} - \widehat{AB})$, utilitzem el llenguatge d'angles, i anomenem $\widehat{AOC} = \alpha$ i $\widehat{AOB} = \beta$, en què O és el centre de la circumferència, obtenim de la igualtat (5.3),

$$120 \cdot \text{crd}(\alpha - \beta) + \text{crd}(\beta) \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha) = \text{crd}(180^\circ - \beta) \cdot \text{crd}(\alpha).$$

Finalment, podem cercar el valor de la taula de Ptolemeu per a la corda de 12° :

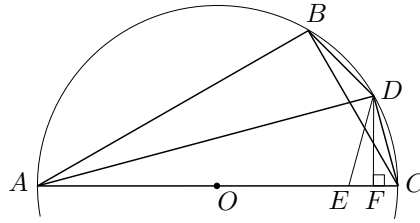
$$120 \cdot \text{crd}(72^\circ - 60^\circ) + \text{crd}(60^\circ) \cdot \text{crd}(180^\circ - 72^\circ) = \text{crd}(180^\circ - 60^\circ) \cdot \text{crd}(72^\circ).$$

És a dir,

$$\text{crd}(12^\circ) = \frac{1}{120} \left(103; 55, 23 \cdot 70; 32, 3 - 60 \cdot \sqrt{14400 - 70; 32, 3^2} \right) = 12; 32, 36.$$

Etapa 4

Per al càlcul de les cordes de l'arc meitat d'un arc de corda coneguda, també es podria utilitzar el teorema de Ptolemeu, però a l'*Almagest* se segueix un camí diferent.³⁰



Considera B , C i D sobre la circumferència tals que $\widehat{BD} + \widehat{DC} = 2\widehat{BD} = \widehat{BC}$, i cerca la relació entre les cordes BC i DC .

Primerament considera la perpendicular DF al diàmetre AC , i el punt E sobre AC tal que $AE = AB$. De la congruència dels triangles ABD i AED —pel criteri C-A-C—, obté $BD = DE$ i, per tant, $DC = DE$.

Això implica que el triangle DEC sigui isòsceles, i DF sigui l'altura sobre el costat desigual EC . Per tant,

$$CF = \frac{1}{2}(AC - AE) = \frac{1}{2}(AC - AB).$$

D'altra banda, en ser ADC rectangle, es compleix $CD^2 = AC \cdot CF$. Per tant,

$$\begin{aligned} \text{crd}^2(\widehat{CD}) &= AC \cdot CF = \frac{1}{2}AC \cdot (AC - AB) = \\ &= \frac{1}{2}\text{crd}(180^\circ) \cdot (\text{crd}(180^\circ) - \text{crd}(180^\circ - \widehat{BC})) = \\ &= 60 \cdot (120 - \text{crd}(180^\circ - \widehat{BC})). \end{aligned}$$

³⁰Per a NEUGEBAUER [1975], 23-24, el fet que no s'utilitzi el teorema en aquest cas, sinó un procediment que ve d'Arquimedes, segons la traducció de Ibn Qurra del seu tractat sobre l'heptàgon, podria ser un argument a favor d'una datació del teorema pròxima al temps de Ptolemeu. Tanmateix, fem notar que se'n pot trobar una demostració per a un cas particular a la proposició 94 de les *Dades* d'Euclides la qual proposem a l'activitat 5.6.3.

Si anomenem $\alpha = \widehat{BOC}$ i $\frac{\alpha}{2} = \widehat{DOC}$, tenim

$$\text{crd}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 60 \cdot (120 - \text{crd}(180^\circ - \alpha)).$$

A partir d'aquest resultat, Ptolemeu es troba en condicions de calcular $\text{crd}(6^\circ)$, $\text{crd}(3^\circ)$, $\text{crd}(1\frac{1}{2}^\circ)$ i $\text{crd}(\frac{3}{4}^\circ)$. Per a aquestes últimes proporciona els valors,

$$\text{crd}(1\frac{1}{2}^\circ) = 1;34,15 \quad \text{i} \quad \text{crd}(\frac{3}{4}^\circ) = 0;47,8.$$

Etapa 5

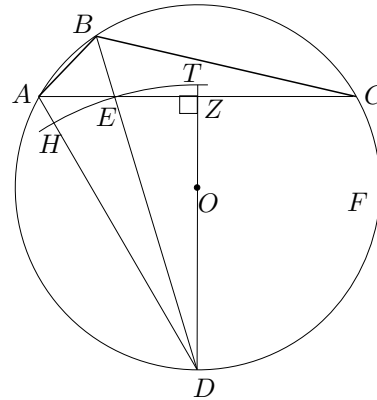
Com a pas previ del càlcul de $\text{crd}(1^\circ)$, Ptolemeu demostra un lema que enuncia de la manera següent:

Dic que si es tracen en el cercle dues rectes desiguals, la més gran és a la més petita, en una raó més petita que l'arc descrit sobre la més gran, a l'arc subtendit per la més petita.³¹

És a dir, si es consideren les cordes AB i BC , en què $BC > AC$, llavors

$$\frac{BC}{AB} < \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}}$$

L'estratègia de la seva demostració passa per considerar la bisectriu BD de l'angle \widehat{ABC} , en què D pertany a la circumferència. Amb ella aconseguirà comparar les cordes AB i BC amb els arcs subtendits, mitjançant la comparació de les àrees d'uns triangles i sectors circulars que aquesta bisectriu determina amb AC , AD i la mediatriu de AC , i la d'aquests últims sectors amb els seus angles. Observem-ho



³¹Aquesta proposició ja havia sigut assumida per Aristarc sense demostració en diverses proposicions de la seva obra *Sobre les grandàries i distàncies del Sol i la Lluna*, —vegeu HEATH [1913], 352–414 de l'edició de 1981—. És equivalent a la desigualtat

$$90^\circ > a > b > 0 \implies \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b}.$$

També és del mateix tipus la desigualtat

$$90^\circ > a > b > 0 \implies \frac{\tan a}{\tan b} < \frac{a}{b},$$

assumida per Aristarc i de la qual tenim una demostració a la proposició 8 de l'*Òptica* d'Euclides, —vegeu EUCLIDES [c.300 aC b], 142–143 de l'edició de 2000.

Si E és el punt d'intersecció de la bisectriu BD amb el segment AC , pel teorema de la bisectriu es compleix

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CB}{BA} > 1 \quad \text{i, per tant,} \quad CE > EA.$$

Llavors, si es traça la perpendicular DZ , — Z sobre AC —, a AC pel punt D , resulta que E està entre A i Z . Amb aquest punt E aconseguim expressar $\frac{BC}{AB}$ en termes de AE i EZ :

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CE}{AE} = \frac{CZ + EZ}{AE} = \frac{AE + 2EZ}{AE}.$$

D'altra banda, en ser $DA > DE > DZ$, si traça el cercle (D, DE) , aquest tallarà al segment AD en un punt H , i a la prolongació de DZ en un punt T . Ara, les àrees dels triangles ADE , EDZ , i dels sectors HDE , EDT li serviran per assolir l'objectiu. Efectivament,³²

$$\frac{EZ}{AE} = \frac{\text{triangle}(EDZ)}{\text{triangle}(ADE)} < \frac{\text{sector}(EDT)}{\text{sector}(HDE)} = \frac{\widehat{EDZ}}{\widehat{ADE}}.$$

Per tant,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AE + 2EZ}{AE} < \frac{\widehat{ADE}}{\widehat{ADE}} + \frac{2\widehat{EDZ}}{\widehat{ADE}} = \frac{\widehat{CDB}}{\widehat{ADB}} = \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}}.$$

Aquest resultat li permet seguir amb el procés de formació de la taula de cordes:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{crd}(1^\circ)}{\text{crd}\left(\frac{3}{4}^\circ\right)} < \frac{1}{\frac{3}{4}} \\ \frac{\text{crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right)}{\text{crd}(1^\circ)} < \frac{1\frac{1}{2}}{1} \end{array} \right\} \implies \frac{4}{3}\text{crd}\left(\frac{3}{4}^\circ\right) > \text{crd}(1^\circ) > \frac{2}{3}\text{crd}\left(1\frac{1}{2}^\circ\right),$$

on substitueix i conclou que,

$$1; 2, 50 \gtrsim \text{crd}(1^\circ) \gtrsim 1; 2, 50 \implies \text{crd}(1^\circ) \approx 1; 2, 50.$$

Finalment pot, també, calcular $\text{crd}\left(\frac{1}{2}^\circ\right) \approx 0; 31, 25$

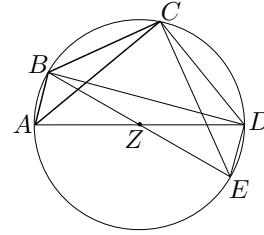
³²La última igualtat de raons de sectors i angles, es pot obtenir de manera semblant a la utilitzada per Euclides, a la proposició VI.33 dels *Elements*, per a la igualtat de raons d'arcs i angles, —ho podeu consultar a HEATH [1908], volum 2, 273–276 de l'edició de 1956.

Etapa 6

Ara, només li queda pendent el càlcul de la corda de $\alpha + \frac{1}{2}^\circ$ a partir de la corda de α . Es planteja trobar la corda d'un arc $\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC}$ del cercle, conegudes les cordes dels arcs \widehat{AB} i \widehat{BC} .

Per aconseguir-ho traça els diàmetres AD i BE . Llavors, en conèixer AB , BC , BD , DE i CE , aplica el seu teorema sobre $BCDE$ i obté,

$$BE \cdot CD = BD \cdot CE - BC \cdot DE,$$



és a dir

$$\text{crd}(180^\circ) \cdot \text{crd}(180^\circ - \widehat{AC}) = \text{crd}(180^\circ - \widehat{AB}) \cdot \text{crd}(180^\circ - \widehat{CE}) - \text{crd}(\widehat{BC}) \cdot \text{crd}(\widehat{AB}).$$

En aquesta igualtat l'únic valor desconegut és $\text{crd}(180^\circ - \widehat{AC})$, del qual, un cop calculat, es pot obtenir $\text{crd}(\widehat{AC})$ pel teorema de Pitàgores.³³ Si anomenem $\alpha = \widehat{AZB}$ i $\beta = \widehat{BZC}$, obtenim,

$$120 \cdot \text{crd}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \text{crd}(180^\circ - \alpha) \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}(\beta) \cdot \text{crd}(\alpha).$$

Un cop completada la seva exposició, anuncia que «la corda de 2° es troba per la suma de les de $\frac{1}{2}^\circ$ i de $1\frac{1}{2}^\circ$, i la de $2\frac{1}{2}^\circ$ per la diferència de la de $\frac{1}{2}^\circ$, a la de 3° , i així les altres». Segons continua dient aquesta és, des del seu punt de vista, «la manera més fàcil de trobar totes les rectes inscrites en el cercle». Llavors fa la presentació de les taules, explicant la seva disposició i recordant que el diàmetre té 120 unitats, i acaba remarcant la facilitat amb que poden ser corregides amb l'ajut dels quatre teoremes exposats:³⁴

És fàcil de veure que, si es tingués el dubte d'alguna falta de còpia, per a alguna d'aquestes cordes, se'n podria fer la verificació fàcilment o la correcció amb l'ajut dels teoremes precedents, sigui per aquell que dóna la corda de l'arc doble, sigui per aquell que dóna la de la suma o la de la diferència, sigui finalment per aquell que dóna la corda del suplement en el semicercle.

³³Ens preguntem perquè no aplica aplica el seu teorema, sense necessitat de traçar el diàmetre auxiliar BE , sobre el quadrilàter $ABCD$. De fer-ho, hagués obtingut

$$\text{crd}(180^\circ - \widehat{AB}) \cdot \text{crd}(\widehat{AC}) = 120 \cdot \text{crd}(\widehat{BC}) + \text{crd}(\widehat{AB}) \cdot \text{crd}(180^\circ - \widehat{AC}).$$

El motiu que l'empeny a la seva manera d'actuar podria residir en la condició de segon grau que s'obté d'aquesta manera, la qual implica uns càlculs més complexos.

³⁴Vegeu l'activitat 5.6.5.

Activitats 5.6

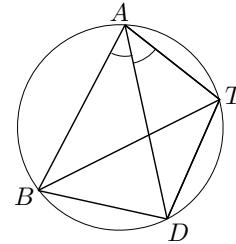
1. Calculeu el valor de $\text{crd}(120^\circ) = 60\sqrt{3}$, utilitzant l'algoritme de la secció 4.3.2 adaptat al càlcul d'arrels quadrades, treballant en base 60, i fent-ne una extensió al càlcul de la part fraccionària. B
S

2. Donat un punt sobre una circumferència, cerqueu una relació entre les seves distàncies als vèrtexs d'un triangle equilàter inscrit? S

3. Demostreu el resultat que es troba a la proposició 94 de les Dades d'Euclides, sense utilitzar el teorema de Ptolemeu: P
S

Donat el polígon convex $BATD$ inscrit en un cercle, tal que la diagonal AD és la bisectriu de l'angle \widehat{BAT} , es compleix

$$\frac{BA + AT}{AD} = \frac{BT}{BD}.$$



Comproveu que és un cas particular del teorema de Ptolemeu.

4. Calculeu l'altura d'una casa que fa una ombra de 42 metres, quan l'altura del Sol sobre l'horitzó és de $32^\circ 22' 17''$. Utilitzeu la transcripció següent de la taula de l'Almagest, —utilitzeu la calculadora únicament per sumar, multiplicar i dividir—. B
S

Arcs		Cordes			Trentenes de les diferències			
Graus	Minuts	Parts del diàmetre	Prim.	Seg.	Parts	Prim.	Seg.	Terc.
64	0	63	35	26	0	0	53	13
64	30	25	27	41	0	0	53	4
115	0	101	12	25	0	0	33	39
115	30	101	29	15	0	0	33	25

Resoleu la mateixa qüestió utilitzant les raons trigonomètriques i la calculadora.

5. Utilitzeu la igualtat $\text{crd}(\alpha) = 120 \cdot \sin(\alpha/2)$, per elaborar una taula amb el DERIVE, com la de Ptolemeu presentada a la pàgina 237. Observeu-la i comenteu l'ordre d'aproximació de la taula de Ptolemeu. S

6. Recordem que els quatre teoremes que Ptolemeu cita per a la verificació o correcció de les taules són, el que dóna la corda de l'arc doble, els que donen la corda de la suma o la de la diferència, i el que dóna la corda del suplement en el semicercle.

i) Utilitzeu les relacions entre sinus, cosinus i cordes, per trobar les fórmules trigonomètriques equivalents.

S ii) A partir de les fórmules trigonomètriques obtingudes per al $\sin(a - b)$, el $\cos(a + b)$, i la suma $\sin^2 a + \cos^2 a$, trobeu les corresponents per al $\sin(a + b)$ i el $\cos(a - b)$.

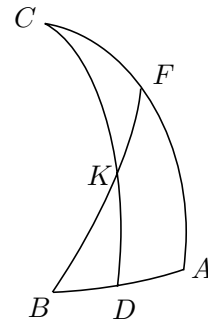
□

5.4 Trigonometria esfèrica. El teorema de Menelau

Moltes qüestions plantejades a l'*Almagest* estan relacionades amb la resolució de triangles esfèrics. Ptolemeu concreta el seu tractament en la resolució de triangles rectangles sobre l'esfera. La seva estratègia d'actuació es basa en les relacions existents en una configuració de quatre arcs \widehat{AB} , \widehat{AC} , \widehat{BF} i \widehat{CD} , de cercle màxim, dos dels quals — \widehat{AB} i \widehat{AC} — tenen un extrem A comú, i els altres dos — \widehat{BF} i \widehat{CD} — comparteixen respectivament un extrem — B i C — amb els dos anteriors i es tallen “interiorment” en un punt K . Ptolemeu demostra les relacions següents:

$$\frac{\text{crd}(2\widehat{CF})}{\text{crd}(2\widehat{FA})} = \frac{\text{crd}(2\widehat{CK})}{\text{crd}(2\widehat{KD})} \cdot \frac{\text{crd}(2\widehat{BD})}{\text{crd}(2\widehat{BA})} \quad (5.4)$$

$$\frac{\text{crd}(2\widehat{CA})}{\text{crd}(2\widehat{FA})} = \frac{\text{crd}(2\widehat{CD})}{\text{crd}(2\widehat{KD})} \cdot \frac{\text{crd}(2\widehat{BK})}{\text{crd}(2\widehat{BF})} \quad (5.5)$$



La primera d'aquestes dues relacions es coneix amb el nom de *teorema de Menelau*. Es troba demostrada a l'*Esfèrica* de Menelau, a partir d'una projecció sobre l'esfera de la mateixa relació per al cas pla, de la mateixa manera que ho fa Ptolemeu en el capítol 11 del llibre I.³⁵ Tanmateix no es coneix l'autoria del teorema. A la *Collecció Matemàtica* de Pappo trobem uns lemes per a l'obra desapareguda dels *Porismes* d'Euclides, en què s'utilitza la recíproca d'aquesta proposició per al cas pla.³⁶ Això podria indicar que el cas pla podria ser conegut

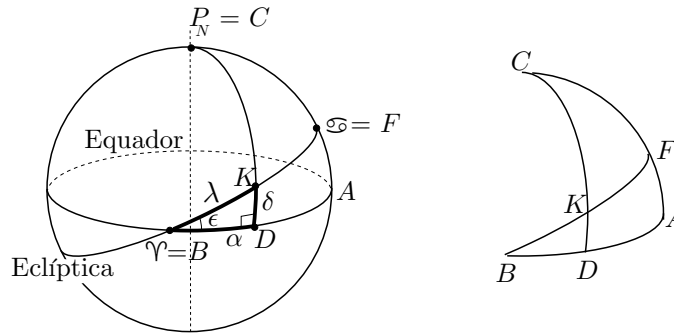
³⁵Anomenarem la configuració d'arcs esmentada, *configuració de Menelau*.

³⁶Vegeu les proposicions 130 i 131 de ECKE [1933], 675-678 de l'edició de 1982.

a l'època d'Euclides. Abans d'entrar en una anàlisi de la manera en què Ptolemeu estableix aquestes relacions, observarem l'ús que en fa en els problemes de resolució de triangles rectangles esfèrics.

5.4.1 Càlcul de l'ascensió recta i declinació d'un punt de l'eclíptica

Un dels problemes que Ptolemeu tracta, és el del càlcul de l'ascensió recta $\alpha = \widehat{BD}$ i la declinació $\delta = \widehat{KD}$ d'un punt K de l'eclíptica,³⁷ del qual coneix la longitud eclíptica $\lambda = \widehat{BK}$. El valor de la obliquïtat de l'eclíptica que utilitza és $\epsilon = 23^\circ 51' 20''$.



Per resoldre la qüestió considera un punt A sobre l'equador tal que $\widehat{BA} = 90^\circ$, i el pol $P_N = C$ d'aquest cercle.³⁸ Llavors, la intersecció de l'eclíptica amb el cercle màxim que conté \widehat{CA} , és el punt Cranc F . O sigui que en la configuració de Menelau $BDAFCK$, disposa de les dades següents:

$$\begin{array}{llll} \widehat{CA} = 90^\circ & \widehat{FA} = \epsilon = 23^\circ 51' 20'' & \widehat{CD} = 90^\circ & \widehat{KB} = \lambda \\ \widehat{BF} = 90^\circ & \widehat{CF} = 90^\circ - \epsilon & \widehat{BA} = 90^\circ & \end{array}$$

Càlcul de $\delta = \widehat{DK}$

Per a la declinació δ , utilitza la igualtat (5.5) i obté,

$$\frac{\text{crd}(180^\circ)}{\text{crd}(2\epsilon)} = \frac{\text{crd}(180^\circ)}{\text{crd}(2\delta)} \cdot \frac{\text{crd}(2\lambda)}{\text{crd}(180^\circ)}.$$

Per tant,

$$\text{crd}(2\delta) = \frac{\text{crd}(2\epsilon) \cdot \text{crd}(2\lambda)}{120}. \quad (5.6)$$

³⁷Vegeu PTOLEMEU [II], volum I, 56–63 de l'edició de 1988. Recordem que els conceptes bàsics de la visió cosmològica de Ptolemeu es poden trobar a la secció 5.7 d'aquest capítol.

³⁸Anomenem *pol* d'un cercle màxim sobre l'esfera, qualsevol dels extrems del diàmetre de l'esfera perpendicular al pla del cercle.

A partir d'aquí es pot trobar la declinació δ , amb l'ajut de la taula de cordes.

Càlcul de $\alpha = \widehat{BD}$

Per a l'ascensió recta α , utilitza la igualtat (5.4) i obté,

$$\frac{\text{crd}(180^\circ - 2\epsilon)}{\text{crd}(2\epsilon)} = \frac{\text{crd}(180^\circ - 2\delta)}{\text{crd}(2\delta)} \cdot \frac{\text{crd}(2\alpha)}{\text{crd}(180^\circ)}.$$

Consegüentment,

$$\text{crd}(2\alpha) = \frac{120 \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\epsilon) \cdot \text{crd}(2\delta)}{\text{crd}(2\epsilon) \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\delta)}. \quad (5.7)$$

Igual que abans, amb l'ajut de la taula de cordes es pot trobar α .

5.4.2 Càlcul de les hores de llum solar

A partir dels resultats anteriors, Ptolemeu construeix unes taules de declinacions i d'ascensions rectes.³⁹ Quan es vol fer el càlcul de la durada de les hores de llum a qualsevol dia de l'any aquestes són útils però insuficients. Ptolemeu utilitza un procediment, per a l'aplicació del qual, elabora unes taules d'*ascensions obliqües*.⁴⁰ En la seva construcció, utilitza les ascensions rectes i declinacions. Aquest procediment es concreta en les etapes següents:

- Recerca de la longitud eclíptica del Sol en el dia fixat.⁴¹

³⁹Vegeu PTOLEMEU [II], volum I, 59 i 103 de l'edició de 1988.

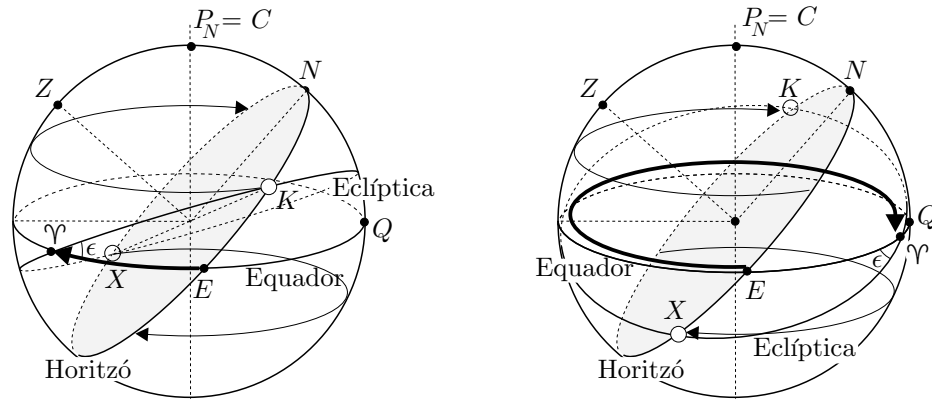
⁴⁰Vegeu més avall el significat d'aquest concepte.

⁴¹Ptolemeu prenia la durada de l'any, com l'interval de temps transcorregut entre dos passos consecutius del Sol pel punt vernal, —o interval de temps entre dos equinoccis de primavera consecutius—, i l'havia calculat en 365;14,48 dies. Llavors, si el moviment del Sol hagués sigut uniforme al voltant de la Terra, s'hagués pogut calcular la longitud eclíptica de manera proporcional amb la fórmula

$$\frac{360^\circ \cdot d}{365;14,48},$$

en què d era el nombre de dies transcorreguts des de l'últim pas del Sol pel punt vernal γ . Però la qüestió era més complexa i aquest càlcul no servia. Era ben conegut que no totes les estacions tenien la mateixa durada, la qual cosa implicava la no uniformitat de la velocitat de rotació del Sol si el centre d'aquesta estava localitzat en el centre de la Terra. Per tal de preservar aquesta uniformitat, Apol·loni, Hiparc i més tard Ptolemeu, desplaçaren el centre de rotació, i crearen i desenvoluparen la teoria dels cercles excèntrics i epicicles, que també utilitzarien per explicar la irregularitat en els moviments de la Lluna i dels planetes. Així proposaven que el Sol no girava amb el centre de rotació a la Terra, sinó al voltant d'un punt desplaçat del centre de la Terra. Això els permetia explicar la diferent durada de les estacions. Aquesta explicació implicava establir relacions entre mesures d'angles i segments, la qual cosa fa pensar que en l'aparició de problemes com aquest es va gestar el naixement de la trigonometria. Es pot trobar el tractament d'aquest problema a PTOLEMEU [II], volum 1, 183-188 de l'edició de 1988 i, el seu estudi, a la secció 5.6.1.

- Càlcul del temps t_1 transcorregut des que el punt vernal γ ha sortit per l'horitzó, en el moment que el Sol K surt per l'horitzó en el dia fixat. És a dir, —vegeu la part esquerra de la figura adjunta—, el càlcul del valor de l'arc $\widehat{\gamma E}$, quan K està sortint per l'horitzó, en què E és el punt Est de l'horitzó. Aquest valor era anomenat *ascensió oblíqua* del punt K de l'eclíptica, el qual depèn de la latitud del lloc.⁴²

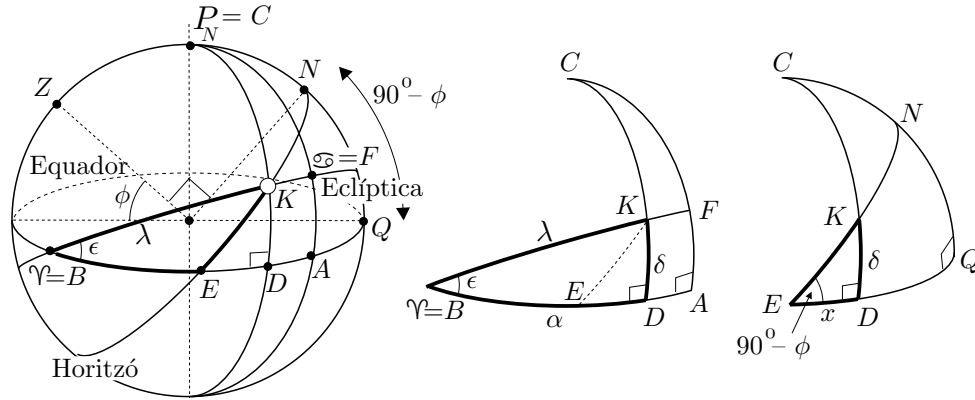


- Càlcul del temps t_2 transcorregut des que el punt γ ha sortit per l'horitzó, en el moment de la posta del Sol K en el dia fixat. Aquest era el moment de la sortida per l'horitzó del punt X de l'eclíptica oposat a K . Si mireu la part dreta de la figura adjunta, s'ha de calcular el valor de l'arc $\widehat{\gamma E}$ quan X surt per l'horitzó.
- Finalment, la diferència $t_2 - t_1$, dóna la durada del temps de llum.

Estudiarem el procediment, suposant que tenim solucionada la primera part. És a dir, coneixem la longitud eclíptica del Sol del dia fixat. Cal que trobem les ascensions oblíquies dels punts X i K per tal de calcular $t_2 - t_1$. Els triangles implicats són els $K\gamma E$ i $X\gamma E$ de la figura anterior. Aquests són iguals pel criteri C–C–C, el qual és cert a l'esfera.⁴³ O sigui que només cal que n'estudiem un dels dos. Considerarem el triangle $K\gamma E$, i la diferència $t_2 - t_1 = 360^\circ - 2 \cdot \widehat{\gamma E}$. Llavors, la seva conversió a unitats de temps proporcionarà la solució. Efectivament,

⁴²Ptolemeu elaborà taules d'ascensions oblíquies, per a diferents latituds, mitjançant el procediment que indicarem en aquesta secció. Vegeu, també, PTOLEMEU [II], volum I, 90–108 de l'edició de 1988. Notem que l'ascensió oblíqua coincideix amb l'ascensió recta quan l'observador és a l'equador.

⁴³Notem que Euclides, a la seva demostració en el teorema I.8 dels *Elements*, no utilitza cap propietat que no es compleixi a l'esfera.



Sigui α l'ascensió recta de K , la qual ja ha estat calculada. Com veiem a la figura, l'ascensió oblíqua $\widehat{\gamma E}$ compleix

$$\widehat{\gamma E} = \widehat{\gamma D} - \widehat{ED} = \alpha - \widehat{ED}.$$

Així, cal calcular $x = \widehat{ED}$. Utilitzem la configuració de Menelau $EDQNCK$, en què

$$\widehat{CQ} = \widehat{EQ} = 90^\circ, \widehat{CN} = \phi, \widehat{NQ} = 90^\circ - \phi, \widehat{KD} = \delta, \widehat{CK} = 90^\circ - \delta,$$

en què ϕ és la latitud geogràfica de l'observador. Si utilitzem la igualtat (5.4) del teorema de Menelau,

$$\frac{\text{crd}(2\widehat{CN})}{\text{crd}(2\widehat{NQ})} = \frac{\text{crd}(2\widehat{CK})}{\text{crd}(2\widehat{KD})} \cdot \frac{\text{crd}(2\widehat{ED})}{\text{crd}(2\widehat{EQ})}. \quad (5.8)$$

O sigui que,

$$\frac{\text{crd}(2\phi)}{\text{crd}(180^\circ - 2\phi)} = \frac{\text{crd}(180^\circ - 2\delta)}{\text{crd}(2\delta)} \cdot \frac{\text{crd}(2x)}{\text{crd}(180^\circ)}.$$

Per tant,

$$\text{crd}(2x) = \frac{120 \cdot \text{crd}(2\phi) \cdot \text{crd}(2\delta)}{\text{crd}(180^\circ - 2\phi) \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\delta)}. \quad (5.9)$$

Amb les fórmules obtingudes, o amb les taules que Ptolemeu elabora a partir d'elles, és fàcil resoldre el problema plantejat. Per exemple, per al cas particular del càlcul d'hores de llum per al dia amb més hores de claror —el solstici d'estiu—, en una latitud $\phi = 8^\circ 25'$, trobem la solució a l'encapçalament de la primera taula d'ascensions oblíquies. Allí apareixen dues informacions, les hores de llum del dia de més temps de claror i la latitud del lloc. Concretament, per a aquesta latitud, dóna $12\text{ h}\frac{1}{2}$ hores de llum. Per comprovar-ho a partir de la fórmula (5.9), caldrà considerar en el dia del solstici d'estiu la informació següent del punt K :

- La declinació de K , $\delta = 23^{\circ}51'20''$.
- L'ascensió recta de K , $\alpha = 90^{\circ}$.
- El càlcul de l'ascensió oblíqua de K , $\alpha - x = 90^{\circ} - x$.
- El càlcul de la diferència $360^{\circ} - 2 \cdot (\alpha - x)$, i la seva conversió proporcional a unitats de temps, —24 hores equivalen a 360° —.

Efectivament, si substituïm a la fórmula (5.9), obtenim

$$\text{crd}(2x) = \frac{120 \cdot \text{crd}(16^{\circ}50') \cdot \text{crd}(47^{\circ}42'40'')}{\text{crd}(163^{\circ}10') \cdot \text{crd}(132^{\circ}17'20'')}.$$

Consultem les taules de cordes,

Angles	$16^{\circ}30'$	$47^{\circ}30'$	132°	163°
Cordes	17; 13, 9	48; 19, 47	109; 37, 32	118; 40, 55
Trentenes	0; 1, 2, 10	0; 0, 57, 27	0; 0, 25, 26	0; 0, 9, 9

i efectuem les interpolacions necessàries per al càlcul de $\text{crd}(2x)$:

$$\begin{aligned} \text{crd}(16^{\circ}50') &= 17; 13, 9 + 20 \cdot 0; 1, 2, 10 = 17; 33, 52 \\ \text{crd}(47^{\circ}42'40'') &= 48; 19, 47 + 12; 40 \cdot 0; 0, 57, 27 = 48; 31, 54 \\ \text{crd}(132^{\circ}17'20'') &= 109; 37, 32 + 17; 20 \cdot 0; 0, 25, 26 = 109; 44, 51 \\ \text{crd}(163^{\circ}10') &= 118; 40, 55 + 10 \cdot 0; 0, 9, 9 = 118; 42, 27 \end{aligned}$$

O sigui que,

$$\text{crd}(2x) = \frac{120 \cdot 17; 33, 52 \cdot 48; 31, 54}{118; 42, 27 \cdot 109; 44, 51} = 7; 51, 6.$$

Tornem a consultar la taula de cordes, per calcular $2x$,

$$\left. \begin{array}{l} \text{crd}(7^{\circ}30') = 7; 50, 54 \\ \text{Trentena} = 0; 1, 2, 41 \end{array} \right\} \implies 2x = 7^{\circ}30' + 0; 1 \cdot \frac{7; 51, 6 - 7; 50, 54}{0; 1, 2, 41} = 7^{\circ}30'11''29'''.$$

Consegüentment,

$$x = 3^{\circ}45'6'', \quad \text{i} \quad \alpha - x = 90^{\circ} - 3^{\circ}45'6'' = 86^{\circ}14'54''.$$

En aquest punt s'observa la coincidència de l'ascensió oblíqua $\alpha - x$ amb la que dóna la taula de Ptolemeu de $86^{\circ}15'$. Finalment, el temps de llum cercat, és el que tarda un cercle horari en recórrer l'arc de l'equador de mesura

$$360^{\circ} - 2 \cdot 86^{\circ}14'54'' = 187^{\circ}30'12''.$$

És a dir,

$$\frac{187^{\circ}30'12'' \cdot 24 \text{ h}}{360^{\circ}} = 12 \text{ h } 30 \text{ m } 1 \text{ s} \approx 12 \text{ h } 30 \text{ m}.$$

Activitats 5.7

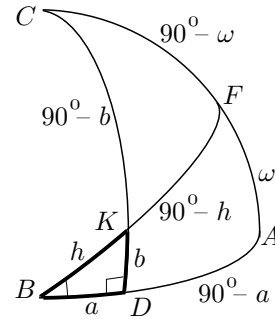
B 1. Sigui el triangle rectangle esfèric de catets $a = \widehat{BD}$, $b = \widehat{DK}$ i hipotenusa $h = \widehat{BK}$. Construïu la configuració de Menelau $BDAFCK$ tal que:

– El punt A estigui sobre la prolongació de l'arc \widehat{BD} i $\widehat{BA} = 90^\circ$.

S – El punt C sigui pol del cercle que conté \widehat{BD} .

Observeu que, en ser $\widehat{BDK} = 90^\circ$, la prolongació de \widehat{DK} passa per C , i $\widehat{DC} = 90^\circ$. A més, en ser $\widehat{BC} = \widehat{BA} = 90^\circ$, —perquè C és el pol de \widehat{BD} —, B és el pol de \widehat{AC} , i el punt F d'intersecció de \widehat{AC} amb la prolongació de \widehat{BK} compleix $\widehat{BF} = 90^\circ$. Es demana que utilitzeu les relacions (5.5) i (5.4) de la pàgina 248, per demostrar que:

- 1) $\tan b = \tan \omega \cdot \sin a$.
- 2) $\sin b = \sin \omega \cdot \sin h$.
- 3) $\tan a = \cos \omega \cdot \tan h$.
- 4) $\cos h = \cos a \cdot \cos b$.



2. Donades la longitud i latitud geogràfica de dos punts de l'esfera terrestre, $A(l_1, \phi_1)$, $B(l_2, \phi_2)$:

i) Trobeu la mesura de l'arc de cercle màxim que els uneix.⁴⁴ [Trebal·leu amb les quatre fórmules trigonomètriques trobades a l'activitat anterior, per la qual cosa s'aconsella traçar un cercle màxim, per A , perpendicular al meridià que passa per B].

ii) Si sabem que Barcelona té coordenades geogràfiques $B(2^\circ 9' E, 41^\circ 24' N)$, i Tarragona $T(1^\circ 17' E, 41^\circ 5' N)$, trobeu la mesura en graus de l'arc de cercle màxim que determinen, i la mesura en km. d'aquest arc. Tingueu en compte que el radi equatorial de la Terra és de 6378.16 km i el radi en el pol és 6356.78 km,⁴⁵ i considereu la Terra com una esfera de radi la mitjana d'aquestes quantitats, és a dir 6367 km.

iii) Considereu les ciutats de Nova York i Tarragona. Les coordenades geogràfiques de la primera són $N_Y(74^\circ 0' O, 40^\circ 45' N)$. Supposeu les longituds geogràfiques de les dues ciutats aproximades a $41^\circ N$. Quines són les coordenades geogràfiques del punt de latitud més gran, de la trajectòria més curta que les

⁴⁴Aquest arc és el camí més curt sobre l'esfera; vegeu l'activitat 1.2.2 en què es comparen aquests arcs amb els que no pertanyen a un cercle màxim.

⁴⁵Vegeu BAKULIN-KONONOVICH-MOROZ [1983], 119.

uneix? Compareu, també, la distància mínima sobre la superfície esfèrica entre les dues ciutats, amb la distància seguint el paral·lel 41° .

iv) Justifiqueu, observant el desenvolupament de la primera part d'aquesta activitat, que en un triangle esfèric qualsevol de costats els arcs a , b i c , i l'angle oposat al costat a igual a α , es compleix

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha. \quad (5.10)$$

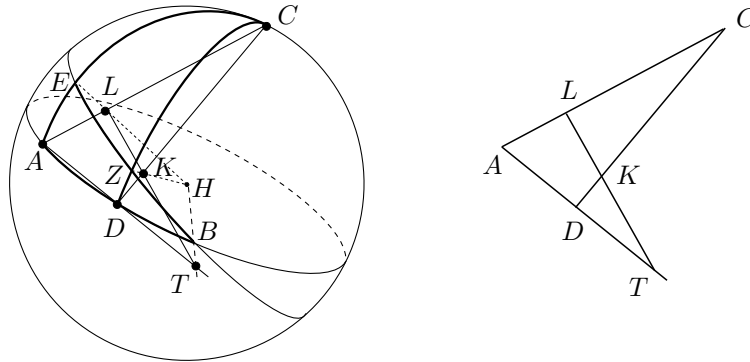
3. Hem extret la informació següent de les taules de declinacions i ascensions de Ptolemeu. Compareu-la amb els resultats que s'obtenen amb l'ajut de les fórmules trigonomètriques de l'activitat 5.7.1 del present grup.

Latitud geogràfica	Longitud eclíptica	Declinació	Ascensió recta	Ascensió oblíqua
$8^\circ 25'$	50°	$18^\circ 2' 53''$	$47^\circ 28'$	$44^\circ 43'$
$16^\circ 27'$	30°	$11^\circ 40' 0''$	$27^\circ 50'$	$24^\circ 20'$

□

5.4.3 El teorema de Menelau

Ptolemeu demostra aquest teorema,⁴⁶ de la mateixa manera que Menelau a l'*Esfèrica*. Utilitza una projecció, sobre el pla ACD des del centre H de l'esfera, de la configuració $ADBZCE$ de Menelau.



Traça les rectes, prolongades quan convé, HB , HZ , HE , AD , CD i AC . Llavors,

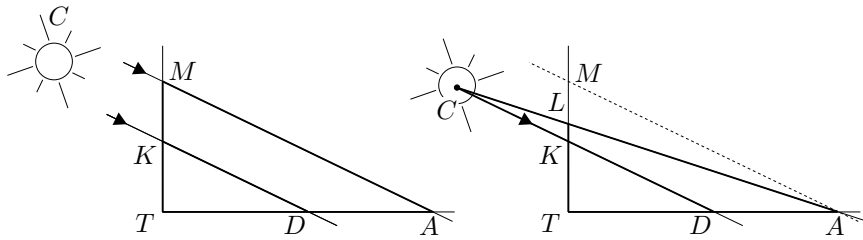
$$AD \cap BH = T, \quad CD \cap ZH = K, \quad AC \cap EH = L.$$

Observa que els punts L , K i T estan alineats, perquè pertanyen als plans ACD i BZE no paral·lels. Obté la configuració $ADTKCL$ en el pla ACD , la qual

⁴⁶Vegeu PTOLEMEU [II], volum I, 50–55 de l'edició de 1988.

recorda una mica la del problema de Tales, de la mesura de la piràmide a partir de les ombres, com es veu a la figura de més avall. La configuració de Tales s'obtenia perquè el Sol es troba a distància molt llunyana, la qual cosa permet considerar els seus raigs paral·lels. Llavors, sabem que en la configuració de Tales de l'esquerra es compleixen, a partir dels teoremes VI.2 i VI.4 dels *Elements*, les igualtats

$$\frac{TK}{TM} = \frac{TD}{TA}, \quad \frac{TK}{KM} = \frac{TD}{DA}, \quad \frac{TM}{KM} = \frac{TA}{DA}.$$



Però, què passaria si la distància Sol–Terra, no fora excessivament gran en comparació a les mesures dels objectes i les ombres? Tindríem una situació com la del gràfic de la dreta i, si examinem la relació TD/DA veiem que,

$$\frac{TD}{DA} = \frac{TK}{KM} < \frac{TK}{KL}.$$

És a dir que si la volem comparar amb TK/KL cal incloure un factor de correcció. Això és bastant senzill, si utilitzem la semblança dels triangles CKL i LMA . Efectivament,

$$\frac{TD}{DA} = \frac{TK}{KM} = \frac{TK}{KL} \cdot \frac{KL}{KM} = \frac{TK}{KL} \cdot \frac{CL}{CA}.$$

Hem obtingut el teorema de Menelau per al cas pla:

Donat el triangle TLA i una recta que talla els tres costats, respectivament en C , K i D , es compleix

$$\frac{TD}{DA} = \frac{TK}{KL} \cdot \frac{CL}{CA}. \quad (5.11)$$

Si tracem una recta paral·lela, per D , al costat LT , és fàcil demostrar l'altra relació de Menelau. És a dir, en les mateixes condicions que abans,

$$\frac{TA}{DA} = \frac{TL}{KL} \cdot \frac{CK}{CD}. \quad (5.12)$$

De la mateixa manera pot obtenir

$$\frac{CL}{LA} = \frac{CK}{KD} \cdot \frac{TD}{TA} \quad \text{i} \quad \frac{CA}{LA} = \frac{CD}{KD} \cdot \frac{TK}{TL} \quad (5.13)$$

A partir d'aquí li cal esbrinar si aquestes relacions es mantenen sobre les cordes de la configuració sobre l'esfera. En dos lemes previs demostra que existeixen les mateixes relacions entre les cordes dels arcs dobles de la configuració esfèrica, que entre les projeccions, d'aquests arcs, estudiades. Concretament estableix que donades les condicions,

- A, B i C , estan sobre una circumferència de centre D ,
- $\widehat{AB}, \widehat{AC}$, i \widehat{BC} no superen mitja circumferència,

es compleixen els lemes següents:

Lema 1

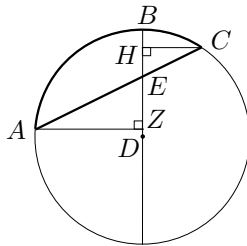
Si el diàmetre per B talla AC dins de la circumferència en E , llavors

$$\frac{\text{crd}(2\widehat{AB})}{\text{crd}(2\widehat{BC})} = \frac{AE}{EC}.$$

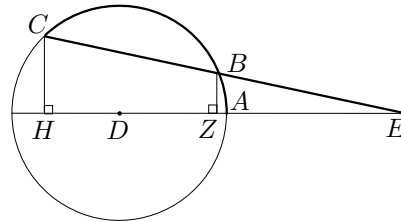
Lema 2

Si el diàmetre per A talla BC fora de la circumferència en E , llavors

$$\frac{\text{crd}(2\widehat{CA})}{\text{crd}(2\widehat{BA})} = \frac{CE}{BE}.$$



Lema 1



Lema 2

Les demostracions s'obtenen respectivament, per les semblances de triangles

$$AZE \sim CHE, \quad BZE \sim CHE,$$

en què, en el primer cas, CH i AZ són perpendiculars al diàmetre per B , i en el segon cas, CH i BZ són perpendiculars al diàmetre per A prolongat. Efectivament, quant al lema 1,

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AZ}{CH} = \frac{\frac{1}{2}\text{crd}(2\widehat{AB})}{\frac{1}{2}\text{crd}(2\widehat{BC})} = \frac{\text{crd}(2\widehat{AB})}{\text{crd}(2\widehat{BC})}.$$

Quant al lema 2,

$$\frac{CE}{BE} = \frac{CH}{BZ} = \frac{\frac{1}{2}\text{crd}(2\widehat{CA})}{\frac{1}{2}\text{crd}(2\widehat{BA})} = \frac{\text{crd}(2\widehat{CA})}{\text{crd}(2\widehat{BA})}.$$

En definitiva, gràcies a aquests dos lemes i a les relacions (5.11) i (5.12), —o bé (5.13)—, de Menelau per al cas pla, les relacions per al cas esfèric queden demostrades. Efectivament, en mostrem un cas amb la notació de la figura del principi d'aquesta secció, a la pàgina 255:

$$\frac{\text{crd}(2\widehat{CE})}{\text{crd}(2\widehat{EA})} = \frac{CL}{LA} = \frac{CK}{KD} \cdot \frac{TD}{TA} = \frac{\text{crd}(2\widehat{CZ})}{\text{crd}(2\widehat{ZD})} \cdot \frac{\text{crd}(2\widehat{BD})}{\text{crd}(2\widehat{BA})}.$$

Les igualtats es justifiquen, la primera pel lema 1, la segona per la relació (5.13), i l'última pels lemes 1 i 2.

Activitats 5.8

B 1. Un focus lluminós provoca que un gnòmon de 9 m d'alçada projecti una ombra de 40 m de longitud. A 8 m d'alçada el gnòmon té un petit sortint, l'ombra del qual és projectada a 35 m de la base del gnòmon. Quina és la distància entre el focus lluminós i el punt més alt del gnòmon?

S 2. Demostreu el recíproc del teorema de Menelau en el pla:

Sigui el triangle ABC. Siguin P i Q interiors respectivament als costats AB i AC, i R que pertany a la prolongació de BC; o bé, P, Q i R que pertanyen a les prolongacions dels costats respectivament citats. Llavors,

$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QC} \cdot \frac{RC}{RB}$, implica que els tres punts P, Q i R estan en línia recta.

S 3. Siguin dues bisectrius interiors d'un triangle i la bisectriu exterior corresponent a l'altre vèrtex. Demostreu que les seves interseccions amb els costats del triangle estan en línia recta. Feu-ne una visualització amb el CABRI.

□

5.5 Apunt sobre l'evolució posterior de la trigonometria

Per estudiar l'evolució de la trigonometria, a partir de Ptolemeu, hem de traslladar-nos a l'Índia i, més tard, a la civilització àrab. De la mateixa manera que

entre els grecs, està lligada amb l'interès per resoldre els problemes pràctics originats per l'astronomia. Però, també, el fet de ser útil per solucionar problemes originats en altres disciplines com la topografia i l'òptica la converteix cada cop en una disciplina més independent i abstracta.⁴⁷

A l'Índia trobem una primera innovació en els conceptes bàsics de la disciplina. Això passa a partir del segle IV, en què en els *Siddhanta* es presenta per primera vegada l'estudi de la relació entre la meitat d'un arc 2α donat i la meitat de la corda d'aquest arc. Aquesta semicorda rebia el nom de *jya-ardha* o “corda meitat”, el qual s'abreujà a *jya* o també *jiva*.

Aquesta nova relació és equivalent a la que ofereix la funció sinus, amb la correcció del factor R igual al radi de la circumferència. Així tenim la nova relació

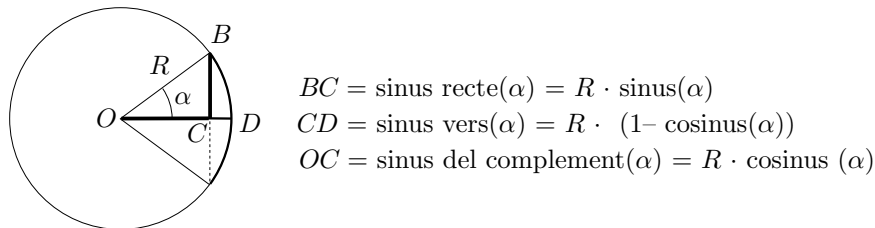
$$\text{semicorda}(\alpha) = R \cdot \sin \alpha .$$

Posteriorment els àrabs, per anomenar la semicorda, conservaren la forma “jiva”, amb la circumstància que el seu significat en aquest idioma era el de plec, pit o badia. Els traductors Gerard de Cremona i Robert de Chester, en el segle XII, la van convertir en la paraula, de significat equivalent en llatí, *sinus*. Finalment, Edmund Gunter [1581–1621] professor d'astronomia a Londres li va assignar la notació *sin*.

A la trigonometria índia, també trobem les noves relacions

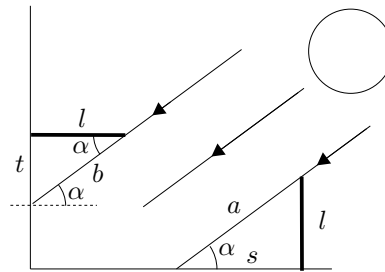
- *kojya* (α), equivalent a $R \cos \alpha$.
- *ukramajya* (α), equivalent a $R(1 - \cos \alpha)$.

Els matemàtics àrabs begueren de les fonts índies, —els *Siddantha* havien estat traduïts a l'àrab en el segle VIII—, i de les fonts gregues, —existien traduccions de l'*Almagest*, en el segle IX, i de les *Esfèriques* de Menelau—. Així, dels primers incorporaren les noves relacions trigonomètriques. La relació *kojya* (α) rebia el nom de “sinus del complement de l'arc”, i *ukramajya* (α) el de “sinus inclinat” en la direcció de la fletxa entre l'arc i la corda. La traducció llatina d'aquesta última era *sinus versus*, o sinus vers o inclinat. Moltes vegades per distingir-los clarament, escrivien *sinus rectus*, o sinus recte, per designar el sinus.



⁴⁷El breu apunt que presentem en aquesta secció pot ser ampliat a partir, entre d'altres, de BAG [1979], 229-285, BERGGREN [1986], 127-156, CAJORI [1928-29], 142-179, GHEVERGHESE [1991], 379-388 i 453-462 de l'edició de 1996, i YOUSCHKEVITCH [1976], 131-150.

Els àrabs adquiriren dels grecs tots els coneixements sobre triangles plans i esfèrics, i els ampliaren. També introduïren noves relacions trigonomètriques. En temps d'Al-Huwarizmi trobem l'“ombra” i l'“ombra invertida” d'un angle α , traduïdes al llatí com *umbra recta* i *umbra versa*. La primera era la longitud de l'ombra s d'un gnòmon l situat perpendicularment al terra horitzontal, i la segona era l'ombra t , sobre una paret vertical, d'un gnòmon l situat perpendicularment sobre aquesta. L'angle α era l'angle d'inclinació dels raigs del Sol respecte del pla horitzontal.



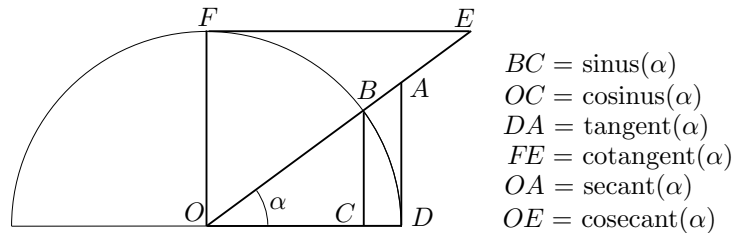
Es pot veure que aquestes eren les relacions equivalents a les nostres cotangent i tangent,

$$\begin{aligned}\text{umbra recta}(\alpha) &= s = l \cdot \cot \alpha \\ \text{umbra versa}(\alpha) &= t = l \cdot \tan \alpha.\end{aligned}$$

També s'introdueixen en el segle IX, el “diàmetre a de l'ombra” sobre el gnòmon vertical, equivalent a la cosecant, i el “diàmetre b de l'ombra invertida” sobre el gnòmon horitzontal, equivalent a la secant.

$$\begin{aligned}\text{diàmetre de l'ombra}(\alpha) &= a = l \cdot \csc \alpha \\ \text{diàmetre de l'ombra invertida}(\alpha) &= b = l \cdot \sec \alpha.\end{aligned}$$

Abu'l-Wafa, en el segle X defineix les línies trigonomètriques a partir del cercle, deixant de banda els gnòmons i, per exemple, presenta la tangent trigonomètrica sobre una recta tangent a la circumferència.⁴⁸ Si representéssim totes les línies trigonomètriques amb els noms actuals, sobre una circumferència de radi unitat, tenint en compte les definicions donades anteriorment, tindríem el gràfic,



$$\begin{aligned}BC &= \text{sinus}(\alpha) \\ OC &= \text{cosinus}(\alpha) \\ DA &= \text{tangent}(\alpha) \\ FE &= \text{cotangent}(\alpha) \\ OA &= \text{secant}(\alpha) \\ OE &= \text{cosecant}(\alpha)\end{aligned}$$

⁴⁸Vegeu YOUSCHKEVITCH [1976], 134.

Abu'l-Wafa també proporciona taules del sinus, cosinus i tangent per al radi igual a 1, les quals consegüentment proporcionen els valors per a les funcions trigonomètriques tal com es consideren actualment, sense necessitat d'un factor de correcció. Cal destacar la importància de l'existència de taules de tangents i cotangents de cara a la simplificació dels càlculs. Per exemple, recordem la relació, en la trigonometria esfèrica, entre l'inclinació ϵ de l'eclíptica, l'ascensió recta α , i la declinació δ d'un punt de l'eclíptica.⁴⁹ A partir d'aquest moment es podria calcular l'ascensió recta α , a partir de la consulta de taules i el càlcul d'un sol producte

$$\sin \alpha = \tan \delta \cdot \cot \epsilon,$$

mentre que, amb les eines de l'*Almagest*, calia fer més consultes i efectuar, a part dels productes, una divisió.

Per acabar aquesta secció citem que els noms tangent i secant són introduïts per Thomas Fincke el 1583, i el terme cotangent per Edmund Gunter el 1620. Quant a les representacions gràfiques d'aquestes línies com a funcions de l'angle, sembla que es troben per primera vegada en el treball de Roberval [1602–1675] sobre la determinació de l'àrea sota la cicloide. Allí utilitza una corba auxiliar que no es altra que el gràfic del cosinus, la qual no identifica, però si que identifica en el mateix treball la corba del sinus corresponent al primer quadrant.⁵⁰

Activitats 5.9

1. Una aplicació de la trigonometria àrab amb finalitats rituals consistia a a trobar la direcció en què es trobava La Meca per tal que els creients musulmans fessin oració amb el cos orientat cap a ella. Aquesta orientació, anomenada quibla o alquibla, era marcada en els rellotges de Sol mitjançant un senyal o construcció. B

Si sabeu que Tarragona es troba en el punt de coordenades geogràfiques $T(1^{\circ}17'E, 41^{\circ}5'N)$, i La Meca en el punt $M(39^{\circ}54'E, 21^{\circ}30'N)$, calculeu l'angle que forma, amb la direcció Sud, la direcció cap a La Meca des de Tarragona. S

2. Justifiqueu que les línies trigonomètriques definides sobre el cercle com en el gràfic del final d'aquesta secció compleixen S

⁴⁹Vegeu l'equació 5.7.

⁵⁰Vegeu KATZ [1993] 447-448.

$$\begin{aligned} \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} & \csc \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha} \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \cot \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & 1 + \tan^2 \alpha &= \sec^2 \alpha \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \csc^2 \alpha. \end{aligned}$$

\mathcal{S}

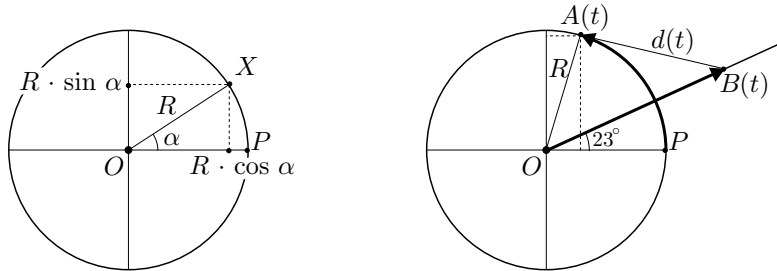
3. *Elaboreu amb el CABRI, a partir de les línies trigonomètriques corresponents sobre la circumferència, visualitzacions de les funcions $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ i $y = a \cdot \sin(bx + c)$, en què a , b , i c són paràmetres.*

□

5.6 Representació de corbes mitjançant funcions trigonomètriques

Pretenem mostrar algun exemple de l'ús de les funcions trigonomètriques en la presentació de corbes. Aquesta representació pot ser útil, en moltes ocasions, en el tractament analític dels problemes geomètrics. Pensem de sortida en un cas senzill, com el d'expressar analíticament una circumferència de radi R , mitjançant la parametrització trigonomètrica de les seves coordenades cartesianes, en una referència perpendicular d'origen en el seu centre. Si per a cada punt X de la circumferència considerem l'angle $\alpha = \widehat{POX}$, en què P és la intersecció de la circumferència amb l'eix d'abscisses, llavors les coordenades del punt X es poden trobar mitjançant

$$x = R \cdot \cos \alpha, \quad y = R \cdot \sin \alpha.$$



Observem, tot seguit, la bondat d'aquesta elecció de paràmetres en el problema següent.

Suposem que un mòbil A recorre la circumferència de radi $R = 40$ m en sentit antihorari, a una velocitat de $1/24$ voltes per segon, i que a l'instant $t = 0$ es troba en el punt P . Suposem que un altre mòbil B surt al mateix temps

del centre O , a una velocitat de 12 m/s, seguint una trajectòria rectilínia que forma un angle de 23° amb OP . Si ens plantegem de trobar la posició de cada mòbil a l'instant t , i la distància que els separa, podem triar un sistema de coordenades rectangulars amb origen a O i eix d'abscisses OP , i el treball amb funcions trigonomètriques fa la tasca molt simple. Efectivament, en ser l'arc $\widehat{PA} = 360^\circ t/24 = 15t$, tenim les posicions $A(t)$ i $B(t)$,

$$\begin{aligned} A(t) : \quad x_A(t) &= 40 \cos(15t^\circ) & y_A(t) &= 40 \sin(15t^\circ) \\ B(t) : \quad x_B(t) &= 12t \cos 23^\circ & y_B(t) &= 12t \sin 23^\circ. \end{aligned}$$

Finalment la distància $d(t)$ complirà,

$$d^2(t) = (40 \cos(15t^\circ) - 12t \cos 23^\circ)^2 + (40 \sin(15t^\circ) - 12t \sin 23^\circ)^2.$$

Elevant els binomis al quadrat, agrupant i utilitzant les identitats trigonomètriques,

$$d^2(t) = 1600 + 144t^2 - 960t \cos(15t^\circ - 23^\circ).$$

Passem a l'observació de dos exemples més complexos

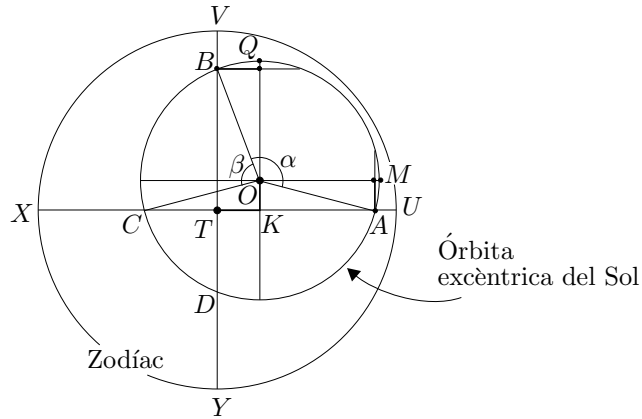
5.6.1 Els epicicles

Per explicar el moviment del Sol, la Lluna i els planetes s'introduïren els cercles excèntrics i els epicicles. En el capítol 4 del llibre III de l'*Almagest*,⁵¹ trobem un exemple de l'ús d'un cercle excèntric per explicar el fet que el Sol recorre arcs iguals de l'eclíptica en temps desiguals. Concretament es vol explicar perquè el Sol tardava 94.5 dies en el trajecte entre l'equinocci de primavera i el solstici d'estiu, i només en tardava 92.5 entre aquest últim i l'equinocci de tardor, suposant uniforme la seva velocitat sobre l'òrbita. De fet, si el centre de l'òrbita estigués en el centre T de la Terra i del zodíac, els equinoccis i solsticis estarien determinats —vegeu el gràfic de més avall— pels punts U , V , X i Y —a intervals d'un quart de cercle— del cercle del zodíac, i el temps invertit en anar de qualsevol d'ells al següent hauria de ser el mateix. En no ser així es desenvolupa la tècnica de considerar que el Sol recorre una òrbita circular $ABCD$ de centre O no situat en el centre de la Terra T . En aquest cas A representa l'equinocci de primavera, C el de tardor, i B i D els solsticis d'estiu i d'hivern respectivament. Si la velocitat del Sol és uniforme es veu clarament que tardarà més en anar de A fins a B que de B fins a C ; de la mateixa manera tardarà més en el trajecte ABC que en el CDA . Això estava d'acord amb les observacions de Ptolemeu i els seus predecessors. Llavors, li calia calcular, entre d'altres coses, la distància

⁵¹Vegeu PTOLEMEU [II], volum I, 183-188 de l'edició de 1988.

OT per ajustar el model a les observacions i seguir endavant en el seu treball. Ho féu, a partir del càlcul de KO i KT , els quals complien

$$KO = \frac{1}{2} \text{crd}(2\widehat{AM}), \quad KT = \frac{1}{2} \text{crd}(2\widehat{BQ}).$$



Es tractava, doncs, de calcular els arcs $2\widehat{AM}$ i $2\widehat{BQ}$, i les seves cordes. Presentem els resultats de Ptolemeu utilitzant les nostres notacions i indicant prèviament els resultats dels nostres càlculs. Si anomenem

$$\alpha = \widehat{AOB} = \widehat{AB}, \quad \beta = \widehat{BOC} = \widehat{BC},$$

obtenim

$$\begin{aligned} 2\widehat{AM} &= \widehat{AB} + \widehat{BC} - 180^\circ = \alpha + \beta - 180^\circ \\ 2\widehat{BQ} &= \widehat{AB} - \widehat{BC} = \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Per als seus càlculs Ptolemeu utilitza un any tròpic de 365; 14, 48 dies. Llavors,

Càlculs nostres	Resultats de Ptolemeu
$\alpha = \frac{360^\circ \cdot 94.5}{365; 14, 48} = 93^\circ 8' 33''$	$93^\circ 9'$.
$\beta = \frac{360^\circ \cdot 92.5}{365; 14, 48} = 91^\circ 10' 16''$	$91^\circ 11'$.
$KO = \frac{1}{2} \text{crd} (\alpha + \beta - 180^\circ) =$ $= \frac{1}{2} \text{crd} (4^\circ 18' 49'') = 2; 15, 29$	$\frac{1}{2} \text{crd} (4^\circ 20') = 2; 16.$
$KT = \frac{1}{2} \text{crd} (\alpha - \beta) =$ $= \frac{1}{2} \text{crd} (1^\circ 58' 17'') = 1; 1, 56$	$\frac{1}{2} \text{crd} (1^\circ 58') = 1; 2.$
$OT^2 = KO^2 + KT^2 = 6; 9, 52$	$6; 12, 20$
$OT = \sqrt{KO^2 + KT^2} = \sqrt{6; 9, 52} =$ $= 2; 28, 58$	$\sqrt{6; 12, 20} = 2; 29, 30.$

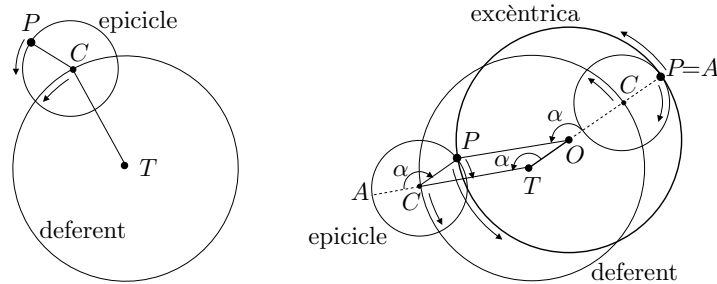
Així, diu que «l'interval entre els centres O de l'excèntrica i T del zodíac és aproximadament la vint-i-quatre part del radi del cercle excèntric». Efectivament,

$$\frac{2; 29, 30}{60} = \frac{1}{24; 4, 49} \approx \frac{1}{24}.$$

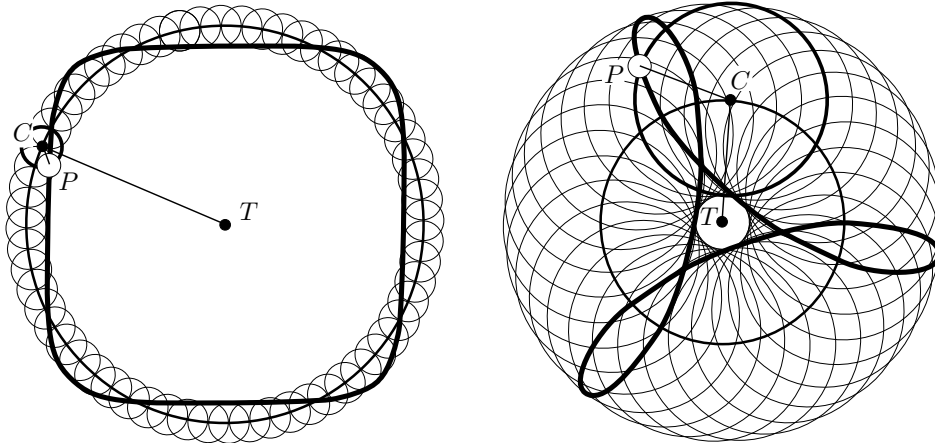
El sistema del cercle excèntric pot ser substituït, en el cas del Sol, la Lluna i els planetes Mercuri i Venus, pel sistema dels epicicles, el qual va ser àmpliament utilitzat fins que s'imposà la teoria heliocèntrica a partir de Copèrnic. En aquest sistema es considera, en una versió simplificada, que el cos celeste P estudiat es mou amb velocitat uniforme sobre un cercle —anomenat *epicycle*—, el qual es mou uniformement amb el seu centre C descrivint una trajectòria sobre un altre cercle —anomenat *deferent*—, el qual té el seu centre en el centre de la T de la Terra, i el seu radi major que el de l'epicicle.⁵² Evidentment, la trajectòria excèntrica del Sol es pot obtenir, com s'observa en el gràfic adjunt, a partir d'un

⁵²De fet, aquest sistema evoluciona i s'introdueixen nous elements per tal d'explicar millor les observacions. Per exemple s'introdueix un nou centre de velocitats anomenat *punt equant* K , de manera que C gira al voltant de T però no de manera uniforme, sinó que la uniformitat en la velocitat es manté al voltant de K . Per entrar amb una mica de detall en aquest sistema vegeu HANSON [1973], 115-162 de l'edició espanyola de 1985.

deferent igual a l'excèntric, i d'un epicicle tal que $OT = PC$, i amb els angles de gir α , de C al voltant de T , i de P al voltant de C , iguals en valor absolut i de sentit contrari.



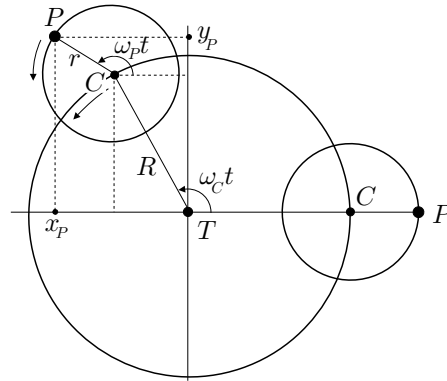
Podem observar també que es poden aproximar molts tipus d'òrbites. En els gràfics de més avall n'hem representat dues obtingudes de manera que P i C , giren en sentits contraris. En el primer, P dóna quatre voltes cada vegada que C en dóna una. En el segon, la relació és de tres a una.⁵³ Des de la Terra T , els punts de les òrbites més propers correspondrien als dies en què el planeta té més lluminositat; els llaços, a les èpoques en què el planeta es mou primer en un sentit i després en el sentit oposat. Per exemple el cas de Mercuri es pot simular amb C i P movent-se en el mateix sentit i amb la relació de velocitats 3 a 1, amb bastant aproximació.⁵⁴



⁵³ Aquestes relacions estan expressades suposant que l'epicicle sempre mostra la mateixa cara, en el gir de C al voltant de T , al punt T ; si quan gira el centre C l'epicicle manté cada radi paral·lel a la posició que ocupava inicialment, mentre P gira al voltant de C , les relacions 4 a 1, i 3 a 1, es transformen en 3 a 1, i 2 a 1. Si P i C gressin en el mateix sentit la relació és a l'inrevés: si la relació és de n voltes a una quan l'epicicle mostra la mateixa cara a T llavors, és de $n + 1$ voltes a una quan manté cada radi paral·lel a la posició que ocupava inicialment.

⁵⁴ Vegeu l'activitat 5.10.1, en què també podreu comprovar les matisacions de la nota anterior.

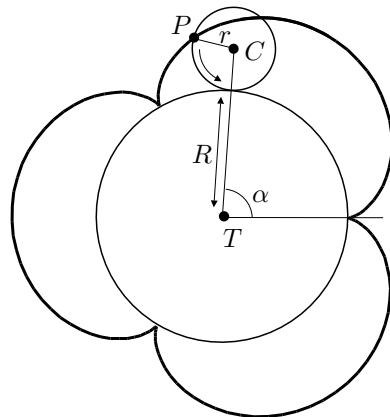
Vegem ara, de quina manera la trigonometria permet descriure qualsevol epicicle d'una manera força senzilla. Considerem una referència rectangular amb origen el centre T del deferent, i eix d'abscisses determinat per una de les posicions més allunyades de P respecte de T . Siguin R i r els radis del deferent i de l'epicicle. Siguin ω_C i ω_P les velocitats dels punts C i P , en què ω_P es computa com si l'epicicle estigués immòbil.



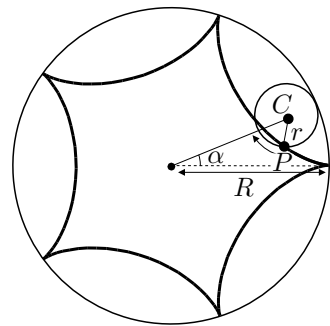
Llavors, si observem el gràfic les equacions que descriuen la trajectòria del punt P , són

$$\begin{aligned} x_P &= R \cos(\omega_C t) + r \cos(\omega_P t) \\ y_P &= R \sin(\omega_C t) + r \sin(\omega_P t) \end{aligned}$$

Aquestes equacions representen la generalització de les equacions de les corbes *epicicloides* i *hipocicloides*. Aquestes corbes estan generades per un punt P d'una circumferència de centre C i radi r , que roda sobre una altra circumferència de centre T i radi R , per fora o per dins, sense lliscar.



P descriu un epicicloide



P descriu un hipocicloide

És fàcil comprovar que les equacions de P , quan descriu l'epicicloide són:

$$\begin{aligned}x_P &= (r + R) \cos(\alpha) - r \cos\left(\frac{r + R}{r} \alpha\right) \\y_P &= (r + R) \sin(\alpha) - r \sin\left(\frac{r + R}{r} \alpha\right).\end{aligned}$$

Quan P descriu l'hipocicloide, les equacions són:

$$\begin{aligned}x_P &= (R - r) \cos(\alpha) + r \cos\left(\frac{R - r}{r} \alpha\right) \\y_P &= (R - r) \sin(\alpha) - r \sin\left(\frac{R - r}{r} \alpha\right).\end{aligned}$$

La generalització que representen els epicicles consisteix en que aquests es poden obtenir, o bé com alguna d'aquestes corbes, o bé considerant sobre la recta que passa pels punts P i C de les circumferències que roden, la trajectòria d'un punt Q tal que $\overrightarrow{QC} = \lambda \overrightarrow{PC}$. Aquestes noves corbes també reben el nom d'epicicloides i hipocicloides “allargats” o “escurçats”, segons sigui $\lambda > 1$ o $\lambda < 1$.⁵⁵

Activitats 5.10

1. Considereu l'òrbita de Mercuri P descrita amb la tècnica dels epicicles, tal com hem dit a la secció 5.6.1, en què la relació de velocitats de P a C era de 3 a 1.

\overline{E}_2 i) Representeu amb regla i compàs setze posicions d'aquesta òrbita, de manera que la distància entre dos epicicles consecutius sigui sempre la mateixa.

\overline{B} ii) Elaboreu un fitxer amb el CABRI i un amb el DERIVE, en què es visualitzin les òrbites per a parelles de velocitats de P sobre l'epicicle i del centre de l'epicicle C en la relació n a 1. Comproveu en particular la construcció de l'apartat anterior i l'òrbita que en resulta. (També podeu incloure l'estudi del cas en què l'epicicle estigui inclinat respecte del deferent, amb una visualització de la trajectòria des del centre del deferent.)

\overline{S} 2. Representeu amb el DERIVE les funcions

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \sec t \\ y = 2 \tan t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \cos^2 t \sin^3 t \\ y = \cos^2 t (3 - 2 \cos^2 t) \end{cases}.$$

□

⁵⁵Vegeu HIRSCH-EGUETHER [1993], 58–61.

5.7 Apèndix 1

La visió cosmològica dels astrònoms grecs del temps de Ptolemeu, podria coincidir, amb petites variacions, amb la d'un observador actual situat en latituds properes a la nostra, i que mira el cel suposant la Terra com una esfera fixa en el centre de l'Univers. Així observant el cel de nit s'estableixen les següents hipòtesis:⁵⁶

i) Els astres nocturns, amb excepció de la Lluna i els cinc planetes que s'observen a ull nu, es mouen de manera que les seves distàncies mútues es mantenen constants. Aquests astres es troben situats sobre una esfera, anomenada *esfera celeste* o esfera dels estels fixos.

ii) Aquesta esfera té el seu centre en el centre T de la Terra, i té un moviment de rotació uniforme al voltant d'un eix que passa per T , el qual anomenem *eix del món*.

iii) La intersecció de l'eix del món amb l'esfera celeste és un punt P_N fix⁵⁷ d'aquesta que rep el nom de *pol nord celeste* —o pol boreal—. Actualment aquest pol es troba molt a la vora de l'estrella Polar o última estrella de la cua de la constel·lació de l'Ossa Menor. En temps de Ptolemeu es trobava, més o menys, a una tercera part de camí entre la Polar i l'estrella α de la constel·lació de l'Ossa Major. Anomenem *pol nord geogràfic* a l'intersecció P de l'eix del món amb la superfície de la Terra.

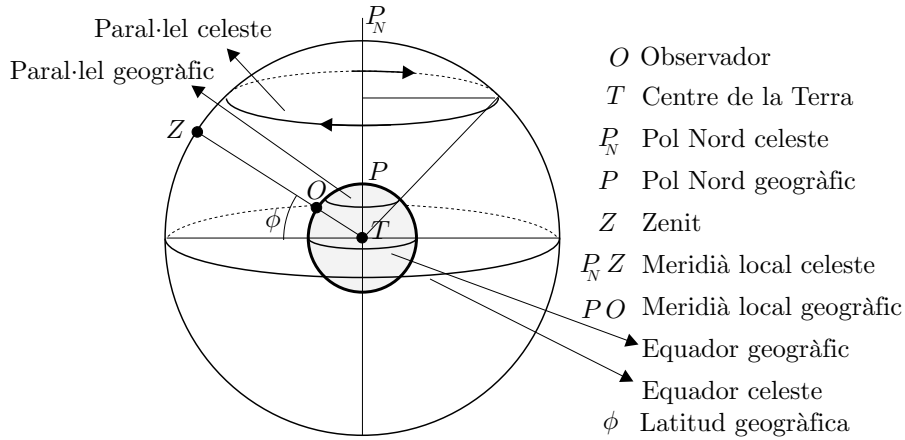
iv) Anomenem *zenit* d'un punt O de la Terra, —el qual es pot interpretar com el punt des del qual observem el cel—, el punt Z d'intersecció de l'esfera celeste amb la recta que passa pel centre T de la Terra i el punt O .

v) El *meridià local celeste* del punt de l'observador O , és el cercle màxim de l'esfera celeste que passa pel pol Nord P_N celeste i el zenit Z de l'observador O . El *meridià local geogràfic* serà la intersecció del pla que conté el meridià local celeste amb l'esfera de la Terra.

vi) Una volta sencera de l'esfera celeste, entorn de l'eix del món, té una durada una mica inferior —al voltant de 4 minuts— que dos passos consecutius del Sol pel meridià local.

⁵⁶Per obtenir una informació més completa podeu consultar, entre d'altres, BAKULIN–KONONOVICH–MOROZ [1987], FABREGAT–GARCÍA–SENDRA [1997] i MASIP [2000].

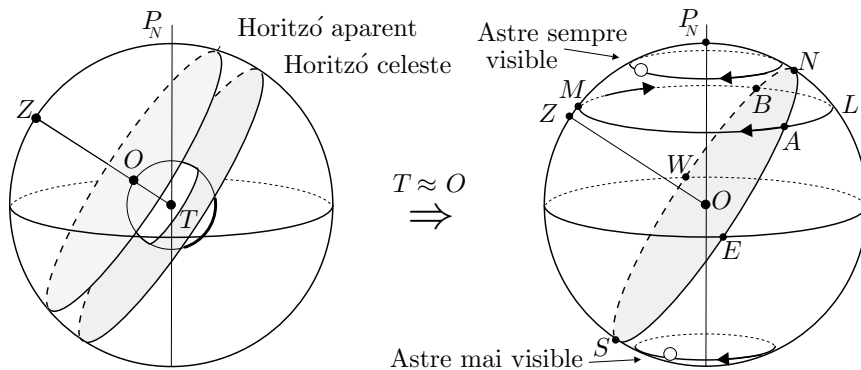
⁵⁷Aquest punt té un moviment imperceptible en intervals no massa grans de temps.



vii) Els plans perpendiculars, pel centre T de la Terra, a l'eix del món, tallen l'esfera de la Terra i l'esfera celeste en dos cercles màxims anomenats respectivament *equador geogràfic* i *equador celeste*.

viii) Els plans paral·lels als equadors, tallen l'esfera de la Terra i l'esfera celeste en uns cercles anomenats *paral·lels geogràfics* i *celestes* respectivament.

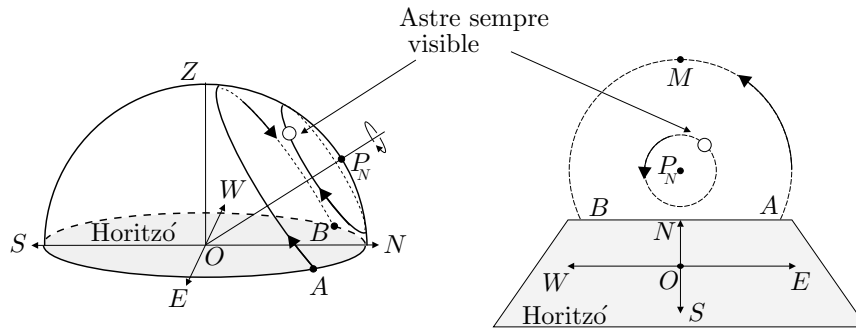
ix) Els plans perpendiculars, pel centre T de la Terra, i pel punt O de l'observador, a l'eix zenital ZOT , determinen dos cercles sobre l'esfera celeste, dels quals el primer és màxim. El primer rep el nom d'*horitzó celeste* del punt O , i el segon *horitzó aparent* del punt O . En ser les distàncies als astres molt grans en relació al radi de la Terra, de cara a les observacions i càlculs astronòmics aquests dos horitzons s'identifiquen, igual que el punt O de l'observador i el centre de la Terra T . [A partir d'ara farem $T = O$].



x) L'equador i l'horitzó celeste es tallen en dos punts que anomenem Est E , i Oest W . La línia que els uneix passa pel centre O . El meridià local celeste i l'horitzó es tallen en dos punts que anomenem Nord N —el més proper al pol

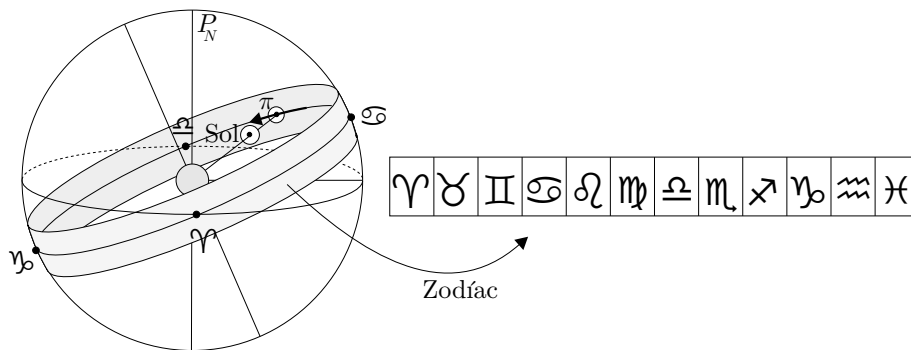
Nord P_N , i Sud S . La línia que els uneix passa per O i es perpendicular a la línia EW .

En les figures adjuntes s'observa que alguns astres sempre giren, al voltant del pol P_N celeste per sobre de l'horitzó; d'altres surten —punt A — per l'Est i es ponen —punt B — per l'Oest; i d'altres no són mai visibles.



xi) El Sol \odot es troba a l'interior de l'esfera celeste, comparteix el seu moviment i en té un altre de propi. Aquest fa que veiem la seva projecció π_{\odot} sobre el fons de l'esfera celeste canviant, dia a dia, la seva posició respecte dels estels fixos.

xii) La trajectòria que descriu el Sol és un cercle màxim de l'esfera celeste que anomenem *eclíptica*. En una franja d'una amplitud aproximada de 16° , al seu voltant, es mouen la Lluna i els planetes. Aquesta franja rep el nom *zodiàc* —del grec *zoos* “vida”— o cercle de la vida que flueix del Sol. El zodiàc s'ha dividit en 12 regions de 30° graus cada una, que han adoptat el nom de la constel·lació que contenia fa una mica més de 2000 anys. Aquestes són per ordre, i amb els símbols del gràfic adjunt, Àries, Taure, Bessons, Cranc, Lleó, Verge, Balança, Escorpí, Sagitari, Capricorn, Aquari i Peixos.



xiii) El cercle de l'eclíptica forma un angle aproximat de $23^\circ 27'$ amb l'equador celeste, anomenat *angle d'obliquïtat de l'eclíptica*. Aquest angle varia de manera molt feble amb el temps. Ptolemeu donava un valor de $23^\circ 51' 20''$.

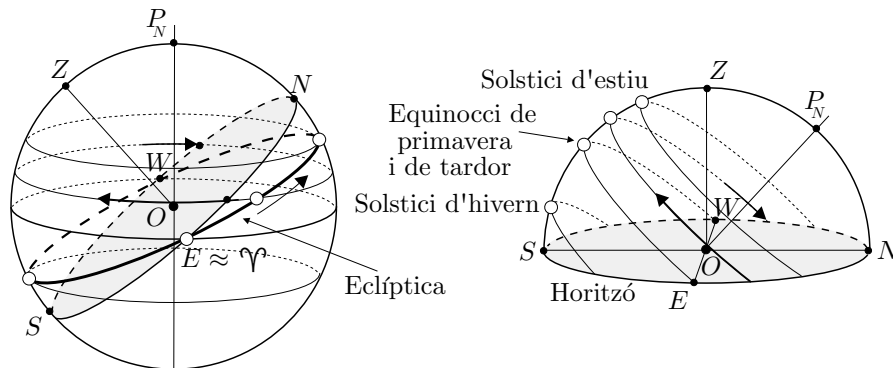
xiv) Les interseccions de l'eclíptica amb l'equador celeste reben el nom de punts *vernal* o Àries i punt Balança, els quals s'oposen diametralment. Els extrems del diàmetre perpendicular reben els noms de punt Cranc i punt Capricorn, essent el primer el més proper al pol Nord P_N celeste.

xv) El desplaçament del Sol sobre l'eclíptica es manté una mica inferior a 1° per dia, i no és uniforme. Ptolemeu calculà que, partint del punt Àries, el Sol tardava 365;14;48 dies a tornar sobre aquest punt.⁵⁸ Aquest interval de temps s'anomena *any tròpic*. Si s'observa des de la regió de l'espai determinada pel pla de l'eclíptica i el pol Nord celeste, el Sol es mou sobre aquesta en sentit antihorari, és a dir d'Àries a Cranc, Balança i Capricorn.

xvi) Quant a la durada del temps de claror durant el dia, observem el quadre següent:

Posició del Sol	Denominació	Hores de claror	Data
0° d'Àries	equinocci de primavera	Igual a les de foscor	21 de març
0° de Cranc	solstici d'estiu	Màximes	22 de juny
0° de Balança	equinocci de tardor	Igual a les de foscor	23 de setembre
0° de Capricorn	solstici d'hivern	Mínimes	22 de desembre

En els solsticis, quan el Sol passa pel meridià local, agafa les seves altures extremes de l'any sobre l'horitzó. El començament de les estacions, primavera, estiu, tardor i hivern, ve determinat per les quatre posicions del Sol en els punts citats.



Representació de l'eclíptica en el moment que el punt vernal surt per l'horitzó. $[E \approx \gamma]$

xvii) Per determinar la posició dels astres a l'esfera celeste s'utilitzen diversos tipus de coordenades:

⁵⁸ Això equival a 365 dies 5 hores 55 minuts i 15 segons. Actualment es calcula aquest temps en 365 dies 5 hores 48 minuts i 45 segons.

Horitzontals. Utilitzen l'horitzó com a referència. Cada punt A ve determinat per les coordenades:

Altura: $h \in [-90^\circ, 90^\circ]$.

Arc del cercle màxim, que passa pel zenit de l'observador i pel punt A , determinat per la seva intersecció amb l'horitzó i pel punt A . És positiva en direcció al zenit i negativa cap al pol oposat o *nadir*.

Azimut: $a \in [0^\circ, 360^\circ]$.

Arc de l'horitzó mesurat des del punt Sud S , fins la intersecció anterior del cercle d'altura. Es mesura en sentit horari, mirant des del zenit.

Equatorials locals. Utilitzen l'equador com a referència. Cada punt A ve determinat per les coordenades:

Declinació: $\delta \in [-90^\circ, 90^\circ]$.

Arc del cercle, —*cercle horari*—, que passa pel pol nord P_N i pel punt A , determinat per la seva intersecció amb l'equador i el punt A . És positiva en direcció a P_N i negativa cap al pol sud.

Angle horari: $H \in [0\text{h}, 24\text{h}]$.

Arc de l'equador mesurat des de la seva intersecció superior amb el meridià local, fins la intersecció anterior del cercle horari. Es mesura en sentit horari, mirant des del pol Nord.

Equatorials absolutes. Utilitzen l'equador com a referència. Cada punt A ve determinat per les coordenades:

Declinació: Igual que abans

Ascensió recta: $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ]$.

Arc de l'equador mesurat des del punt vernal, fins la intersecció de l'equador amb el cercle horari. Es mesura en sentit antihorari, mirant des del pol Nord.

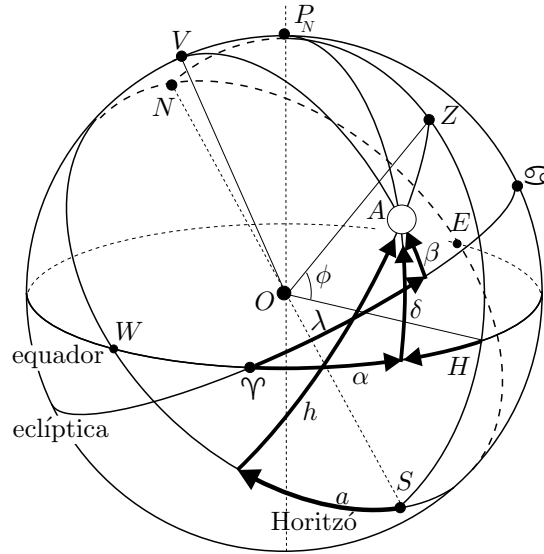
Eclíptiques. Utilitzen l'eclíptica com a referència. Cada punt A ve determinat per les coordenades:

Latitud eclíptica: $\beta \in [-90^\circ, 90^\circ]$.

Arc del cercle que passa pel pol V de l'eclíptica i pel punt A , determinat per la seva intersecció amb l'eclíptica i el punt A . És positiva en direcció al pol més proper a P_N de l'eclíptica, i negativa cap al pol oposat.

Longitud eclíptica: $\lambda \in [0^\circ, 360^\circ]$.

Arc de l'eclíptica mesurat des del punt vernal, fins la intersecció de l'eclíptica amb el cercle de latitud anterior. Es mesura en sentit antihorari, mirant des del pol de l'eclíptica.



Coordenades de l'astre A

Horizontals:

a : azimuth

h : altura

Equatorials locals:

H : angle horari

δ : declinació

Equatorials absolutes:

α : ascensió recta

Eclíptiques:

β : longitud eclíptica

λ : latitud eclíptica

Latitud geogràfica de

l'observador: ϕ

5.8 Apèndix 2

Suposem m, n, p i q nombres naturals i a, b, c, d, e i f magnituds. Llavors la transcripció algebraica dels vint-i-cinc teoremes del llibre V dels *Elements* d'Euclides podria presentar-se així:

V.1. $m \cdot a + m \cdot b + m \cdot c + \dots = m \cdot (a + b + c + \dots).$

V.2. $m \cdot a + n \cdot a + p \cdot a + \dots = (m + n + p + \dots) \cdot a.$

V.3. $m \cdot a, m \cdot b$ equimúltiples $\implies (q \cdot p \dots n \cdot m) \cdot a, (q \cdot p \dots n \cdot m) \cdot b$ equimúltiples.

V.4. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{m \cdot a}{n \cdot b} = \frac{m \cdot c}{n \cdot d}.$

V.5. $m \cdot a - m \cdot b = m \cdot (a - b).$

V.6. $n < m \implies m \cdot a - n \cdot a$ i $m \cdot b - n \cdot b$ són equimúltiples de a i b .

V.7. $a = b \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ i $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}.$

V.8. $a > b \implies \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ i $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}.$

V.9. $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \implies a = b,$ $\frac{c}{a} = \frac{c}{b} \implies a = b.$

V.10. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \implies a > b,$ $\frac{c}{a} > \frac{c}{b} \implies a < b.$

- V.11. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ i $\frac{c}{d} = \frac{e}{f} \implies \frac{a}{b} = \frac{e}{f}$.
- V.12. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$.
- V.13. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ i $\frac{c}{d} > \frac{e}{f} \implies \frac{a}{b} > \frac{e}{f}$.
- V.14. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \left(a \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} c \implies b \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} d \right)$.
- V.15. $\frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{m \cdot b}$.
- V.16. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
- V.17. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.
- V.18. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
- V.19. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $c < a$ i $d < b \implies \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$.
- V.20. $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ i $\frac{b}{c} = \frac{e}{f} \implies \left(a \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b \implies d \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} f \right)$.
- V.21. $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ i $\frac{b}{c} = \frac{d}{e} \implies \left(a \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b \implies d \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} f \right)$.
- V.22. $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ i $\frac{b}{c} = \frac{e}{f} \implies \frac{a}{c} = \frac{d}{f}$.
- V.23. $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ i $\frac{b}{c} = \frac{d}{e} \implies \frac{a}{c} = \frac{d}{f}$.
- V.24. $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$ i $\frac{b}{c} = \frac{e}{f} \implies \frac{a+b}{c} = \frac{d+e}{f}$.
- V.25. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies a+d > b+c$.

Capítol 6

Els problemes clàssics

Els estudis fets sobre la recerca i desenvolupament de la geometria grega permeten conjecturar que es caracteritzava principalment per:

- Tenir una motivació clara en la resolució de problemes.
- Seguir, en aquesta resolució, l'estratègia de reducció a d'altres problemes ja resolts o bé reductibles successivament a qüestions conegudes.
- Presentar els resultats obtinguts sistemàticament ordenats de manera deductiva, i classificats en diferents tipus segons els objectes geomètrics estudiats.

En referència a aquest últim punt, Pappos, en el llibre III de la *Col·lecció Matemàtica*, classifica els problemes de la geometria de la manera següent:¹

Els Antics han admès que els problemes pertanyen a tres gèneres en geometria: els uns són anomenats plans, els altres sòlids i d'altres encara lineals. S'anomenen, d'una manera justa, plans aquells que poden ser resolts mitjançant línies rectes i circumferències de cercles; perquè les línies que permeten la resolució d'aquests problemes es troben en el pla. Quant als problemes, la solució dels quals requereix una o més seccions del con, són anomenats sòlids; perquè cal fer ús de superfícies de figures sòlides per a la seva construcció, concretament superfícies còniques. Resta el tercer gènere de problemes anomenats lineals, perquè més enllà de les línies que hem citat, n'admeten d'altres per a la seva construcció, l'origen de les quals és més variat i més complex, tals com les espirals, les quadratrius, les concoides, i les cissoïdes que tenen propietats nombroses

¹Vegeu EECHE [1933], volum I, 38-39 de l'edició de 1982.

i sorprenents.²

Tot i que són molts els problemes que han impulsat aquest desenvolupament, n'hi ha tres que han esdevingut clàssics:

La duplicació del cub. Donat un cub de costat AB , construir un cub de costat XY , tal que el volum del segon cub dupliqui el del primer. [De fet el que es demana és la construcció del costat XY a partir del costat AB .]

La quadratura del cercle. Donat un cercle, construir un quadrat que tingui la mateixa superfície que el cercle. [En aquest cas es tracta de construir el costat del quadrat, a partir del radi conegut del cercle.]

La trisecció de l'angle. Dividir una angle donat en tres parts iguals.

Aquí gosaríem afegir el problema de la construcció de polígons regulars, per l'impuls que també va proporcionar a la recerca i desenvolupament de la geometria i a la seva relació posterior amb l'àlgebra.

Quan es vol esbrinar en els orígens de l'interès dels grecs en aquests problemes i, consegüentment, amb tota la infinitat de qüestions associades, existeixen punts de vista diversos i de cap manera excloents.

Interpretació intrínseca

Aquesta interpretació defensaria que la mateixa naturalesa de les matemàtiques comporta la creació d'estímuls interns de cara a la generació de noves qüestions i problemes, sigui per resoldre les qüestions inicials, sigui per estendre l'abast d'un resultat obtingut, sigui per analogia entre dominis diferents de la pròpia matemàtica, entre d'altres motius. Alguns exemples en podrien ser:

– La interpretació de l'aparició del problema de la duplicació del cub com una extensió del problema de duplicar un quadrat. O bé, en la seva reducció al problema d'inserir dues mitjanes proporcionals entre un segment a i el seu duplicat $2a$,³ com una extensió del problema de construir la mitjana proporcional de dos segments.

²Aquesta classificació dels problemes a partir de les línies utilitzades en la seva resolució és força ambigua pel que fa als problemes lineals. Descartes en fa la crítica al començament del llibre II de la *Geometria* i proposa la seva classificació de les corbes lineals en geomètriques i mecàniques segons vinguin «descrites per un moviment continu, o per diversos moviments successius de tal naturalesa que els darrers siguin determinats completament pels que els precedeixen», o bé siguin «generades per dos moviments separats que no tenen entre si cap vinculació que puguem amidar amb precisió». Llavors assimila les primeres a aquelles en què la posició dels seus punts pot ser expressada mitjançant una equació polinòmica $P(x, y) = 0$, mentre les segones escapen a aquesta representació. Per a una discussió d'aquest tema vegeu PLA, VIADER [1999], xlv-liii, i RASHED-VAHABZADEH [1999], 12-29.

³Vegeu la secció 3.1.

– La interpretació de l'interès inicial en l'estudi de les seccions còniques, no considerant-les com a tals seccions, sinó com a línies generades punt a punt, amb tècniques d'aplicació d'àrees, en l'intent de resoldre el problema de la inserció de dues mitjanes proporcionals entre dos segments.

– L'interès en la quadratura de certes llunes de cara a assolir la quadratura del cercle.

Interpretació extrínseca des de les ciències de la naturalesa i aplicades, i de les arts

Aquesta perspectiva atribueix la generació dels problemes matemàtics a les ciències que estudien el món material amb l'ús del llenguatge de les matemàtiques, com l'òptica i l'astronomia, a les disciplines tècniques com l'enginyeria, l'arquitectura o la topografia, o a les arts com la decoració o la pintura. Aquesta interpretació ve reforçada per alguns testimonis de l'antiguitat com el que presenta Eutoci en la presumpta carta d'Eratostenes a Ptolemeu.⁴ Allí explica, referint-se a les implicacions de la resolució del problema de la duplicació del cub, que

[...] podem, llavors, constituir en cubs les mesures de les matèries seques i humides, [...], i mesurar mitjançant el costat d'aquests cubs la capacitat dels recipients susceptibles de contenir aquestes matèries. La nostra invenció serà igualment útil per als que volen engrandir les catapultes i les màquines de llançar pedres, perquè si es desitja que el seu abast sigui més gran d'una manera proporcional, s'hauran d'engrandir proporcionalment tots els seus elements, gruixos, grandàries, [...] Ara bé, totes aquestes coses no es poden obtenir sense la descoberta de les mitjanes, [...]

Alguns exemples d'interpretació sota aquest punt de vista podrien ser:

– Conjecturar que l'interès en l'estudi de les seccions còniques, com a interseccions de superfícies, vingués originat per la recerca en les representacions artístiques, —en què es tractava de representar figures circulars des de qualsevol punt de vista—, o en els estudis d'òptica relacionats.⁵ O, alternativament, cercar el seu origen en l'astronomia, o en l'estudi de les ombres projectades en els rellotges de sol.⁶

⁴Vegeu EECKE [1960] 609-615.

⁵Vegeu KNORR [1992].

⁶Vegeu KNORR [1986], 111 de l'edició de 1993, en què cita l'article de Otto Neugebauer, «On the Astronomical Origin of the Theory of Conic Sections», *Proceedings of the American Philosophical Society*, 92, 1948, 136-138. Vegeu a HEATH [1949], 262-263 de l'edició de 1998,

– Pensar el problema de la trisecció de l'angle, no com una extensió del problema de partir l'angle en dues parts iguals, sinó originat en les necessitats pràctiques de partir la circumferència en 360 parts iguals. Hem vist anteriorment que es podien construir, amb eines euclidianes, els angles de 72° , 60° i, consegüentment, la seva diferència 12° . També, amb el traçat de bisectrius successives, els de 6° , 3° , $1\frac{1}{2}^\circ$ i $\frac{3}{4}^\circ$. Per construir l'angle de 1° seria útil un procediment per trisecar angles, el qual es podria aplicar al de 3° .

Interpretació extrínseca des de la filosofia i la religió

Una última interpretació no lligada a interessos estrictament matemàtics és la de generació de problemes a partir de motivacions de la filosofia i la simbologia associada a l'experiència i tradicions religioses. Per exemple, problemes sorgits de la necessitat d'evitar o resoldre alguna paradoxa creada per l'acceptació explícita o implícita de certs tipus de postulats, o d'altres sorgits de la representació i transmissió de símbols. En podrien ser alguns exemples concrets:

– L'interès de presentar les corbes com a interseccions de superfícies o generades per moviments, de manera alternativa a presentar-les mitjançant una propietat (*symptōma*) que caracteritzés els seus punts. El *symptōma* d'una línia era útil per a una construcció punt a punt, però no tant per a la seva concepció o representació ideal a la ment. Amb la generació a partir de superfícies o mitjançant moviments, la línia es presenta a la ment com a tal línia, no com un conglomerat de punts que pot facilitar el plantejament de problemes filosòfics en què intervé l'infinit. A més, la concepció de la línia a partir de la seva “propietat” queda sotmesa a una certa dependència del mètode de construcció que s'associa a aquesta “propietat”. Els mètodes de construcció i la línia construïda tenen més a veure amb el món de les aparences, que no amb el món dels conceptes i idees que transcendeixen les aparences. Des d'aquest punt de vista es podria interpretar que, amb les concepcions de les línies com a interseccions de superfícies o generades per moviments, s'intentaria evitar la paradoxa de fer dependre la concepció dels objectes geomètrics, —els quals transcendien el món de les aparences—, de procediments i imatges d'aquest món.

L'única cita atribuïda a Aristòtil referent a les seccions d'un con:

i quan el cercle [de la lluna] se situa així en relació a la nostra vista, esdevé semblant a la secció d'un con.

Vegeu també la introducció dels *Fenòmens* d'EUCLIDES [ca.300 aC c], 267, en què en el context d'una demostració sobre l'esfericitat del cosmos, escriu:

Perquè si es talla un cilindre mitjançant un pla que no és paral·lel a la base, resulta una secció d'un con acutangle, que és semblant a un escut oblong.

Un cas especial, en què ni tant sols la concepció de generació mitjançant moviments és satisfactòria i que estudiarem més endavant, és el de la línia quadratriu, concebuda per trisecar l'angle i quadrar el cercle. D'ella es fa una primera presentació com a generada a partir del moviment de dos segments. Per dur-la a terme es necessitava conèixer la raó $\frac{\pi}{2}$ entre un quart de cercle i el seu radi, la qual cosa era equivalent a suposar conegut el resultat del problema de quadrar el cercle que es volia resoldre amb ella. Pappos expressà la situació dient que la línia era “massa mecànica”, i proposà una concepció alternativa utilitzant interseccions de superfícies. Una interpretació des del punt de vista de la filosofia, podria ser que la necessitat de la nova concepció prové de que la generació de la quadratriu a partir de moviments s'ha de basar en una “aproximació” a la idea de π , —un mecanisme que approximi π —. Llavors això no pot ser satisfactori, en ser la concepció d'aquesta línia dependent de moviments “poc geomètrics” (com equivalent a “massa mecànics”), en estar concebuts sobre una aproximació de l'objecte ideal, —la raó π —. ⁷

– La presentació del problema de la duplicació del cub com una ordre de l'oracle als ciutadans de Delos, per tal de lliurar-los de la pesta que els assolava, així com la interpretació atribuïda a Plató segons la qual els déus no volien la construcció efectiva de l'altar, sinó retreure als delians la seva negligència en l'estudi de les matemàtiques i el seu menyspreu de la geometria.

Llegenda o realitat, aquesta història té un rerefons en el que queden lligades les dues cares de la moneda de la recerca del coneixement. Una d'elles mostra la faceta més directa i intuïtiva, aquella que té més a veure amb l'experiència individual del que és transcendent, —en aquest cas la resposta de Plató té més a veure amb una penetració profunda i directa sobre el significat de la qüestió que no amb un discurs raonat segons el patró deductiu—; l'altra cara intenta assegurar l'adquisició del coneixement sotmetent les intuïcions als dictats de la raó que funciona amb els mecanismes del sistema deductiu, i està representada pel tipus de recerca que fa la filosofia entesa segons la interpretació estàndard en el model occidental. Els problemes de la matemàtica vindrien generats en un primer intent de casar aquestes dues facetes en el món dels objectes matemàtics, la qual cosa seria un primer pas per accedir al coneixement.

– La interpretació de la introducció del problema de la quadratura del cercle, com una traducció al llenguatge de les matemàtiques del problema de la conjunció de l'home espiritual i l'home material. Aquesta opinió estaria basada en el simbolisme de les dues figures. Segons Jung, el cercle representa una imatge

⁷Ho podríem expressar dient que els moviments que originen la concepció d'una línia —per tal que aquesta participés de l'estatus geomètric— s'haurien de concebre a partir dels objectes ideals de la geometria i no d'aproximacions que no deixen de ser imatges aparents de la seva realitat.

arquetípica de la totalitat de la psique, i el quadrat del cos material.⁸ Altres autors els expressen com a representacions del celestial transcendent i el terrenal.⁹ Robert Lawlor ho manifesta així:¹⁰

Tanmateix, la quadratura del cercle és de gran importància per al geomètra-cosmòleg, perquè per a ell el cercle representa l'esperit-espai pur i no manifest, mentre que el quadrat representa el món manifest i comprensible. Quan s'assoleix una igualtat quasi completa entre el cercle i el quadrat, l'infinit és capaç d'expressar les seves dimensions o qualitats mitjançant el finit.

La interpretació que explica la introducció d'aquest problema per motius de transmissió simbòlica d'una manifestació de l'esperit, es reforçaria de ser certes les conjectures fetes amb motiu de les recerques sobre les dimensions de la piràmide de Keops. Aquesta fou construïda pels voltants del 2600 aC, en temps de l'Imperi Antic a Egipte, la qual cosa proporcionaria una antiguitat considerable a l'aparició del problema, molt més enllà de la tradició grega. Concretament, Ghyka cita les mesures preses per Piazzzi-Smith, les quals deixarien al descobert la gran aproximació del nombre π que proporciona la raó entre l'altura de la piràmide i el semiperímetre de la base.¹¹ Això proporciona la igualtat del perímetre de la circumferència de radi l'altura de la piràmide, amb el perímetre de la seva base quadrada. Aquesta pot ser entesa com una quadratura en la vessant de les línies, de la qual també es podria obtenir de manera bastant immediata una quadratura de l'àrea del cercle. Les mesures que trobem en la cita esmentada són:

$$\text{costat de la base} = a = 232.805, \quad \text{altura} = h = 148.208.$$

D'on resulta l'aproximació,

$$\frac{2a}{h} = 3.1415983 \dots \approx \pi.$$

D'aquesta manera, la piràmide, concretament les seves dimensions, seria una manifestació, entre d'altres coses, del misteri de la conjunció matèria-esperit mitjançant la representació arquitectònica de la quadratura del cercle.¹²

⁸Vegeu JUNG [1964].

⁹Vegeu CHEVALIER-GHEERBRANT [1969], 300-305 i 370-378 de l'edició espanyola de 1995.

¹⁰Vegeu LAWLOR [1982], 74 de l'edició espanyola de 1996.

¹¹Vegeu GHYKA [1983] 238-239.

¹²Citem, finalment, per reforçar la vessant simbòlica del problema, el monjo benedictí Dom PERNETY [1758], 108-109 i 185, quan diu que els Filòsofs, els quals presenta com «amants de la sabiduria, instruïts en les operacions secretes de la naturalesa, imitant els seus procediments per aconseguir produir coses més perfectes que les de la mateixa Naturalesa», anomenen també la Gran Obra, Quadratura del Cercle Físic.

Acabem aquesta introducció en la creença de la compatibilitat de totes aquestes perspectives sobre els orígens dels problemes clàssics. Pensem, a més, que són complementàries, i que constitueixen visions filtrades d'una realitat velada per les diferents cares del prisma de la percepció, les quals cal encaixar. Aquesta és una empresa que supera les nostres expectatives actuals. La finalitat d'aquest capítol era la de fer-ne la presentació per concentrar-nos, tot seguit, en el camp d'interès intern de les matemàtiques. Concretament, estudiarem algunes de les construccions dirigides o relacionades amb la resolució dels dos primers problemes, i ens introduïrem en un dels camps que obra aquest estudi, el dels orígens de les seccions còniques.

6.1 La quadratriu de Hípias

Hípias d'Elis fou un sofista de la segona meitat del segle V aC, del qual trobem les primeres referències en els diàlegs de Plató, *Hípias Menor* i *Hípias Major*. El primer el presenta com un expert en aritmètica, geometria i astronomia, mentre que el segon el tracta de professor de càlcul, astronomia, geometria i música. Molts historiadors defensen que introduí la corba coneguda com a trisectriu o quadratriu de Hípias.¹³ Procle té dues cites al respecte:¹⁴

- 1) D'altres han obtingut les mateixes coses [la trisecció de l'angle] mitjançant la quadratriu de Hípias i Nicomedes.
- 2) Aquesta és la manera com d'altres autors també acostumen a diferenciar les línies, donant la propietat de cada espècie. Apol·loni, per exemple, mostra per a cadascuna de les seves corbes còniques quina és la seva propietat, i Nicomedes ho fa igualment per a les conoides, Hípias per a les quadratrius, i Perseu per a les corbes "espíriques".¹⁵

Aquesta opinió no ha sigut, ni és, compartida per tothom. Molts interrogants planen al seu voltant. Per exemple, Knorr planteja que «la sofisticació tècnica d'aquesta [corba] prefiguraria tan intensament els descobriments d'Éudox i d'Arquimedes que un es posa immediatament en guàrdia». Aquest, junt amb d'altres arguments, i el fet de ser el nom de Hípias bastant corrent, el fa preguntar-se «com podríem excloure que aquest Hípias de la quadratriu no fos el sofista del segle V, sinó un geòmetra posterior del segle III o II que ampliés el treball de Nicomedes [III aC]?». ¹⁶ El mateix Pappos, que fa una descripció detallada de la

¹³Per exemple, vegeu HEATH [1921], volum I, 182 de l'edició de 1981.

¹⁴Vegeu MORROW [1970], 212 i 277.

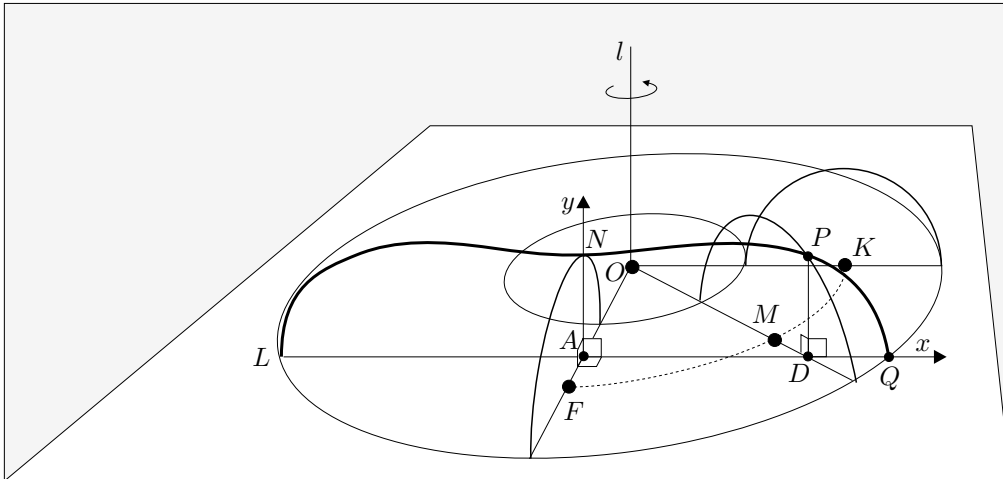
¹⁵Les corbes "espíriques" es conceben com les seccions d'un tor mitjançant plans paral·lels al pla d'una circumferència generatriu. Vegeu l'activitat 6.1.1, inspirada en el treball de KNORR [1986], 267-272 de l'edició de 1993.

¹⁶Vegeu KNORR [1986], 80-86 de l'edició de 1993.

generació de la corba i la seva aplicació, quan introdueix la corba diu, «una línia que pren la seva denominació de la seva propietat [quadrar el cercle] ha sigut adoptada per Dinostrat, Nicomedes i alguns altres autors recents», sense citar en cap moment Hípias. Una posició intermèdia seria la que atribuiria la seva introducció a Hípias per tal de resoldre la trisecció de l'angle, —és a dir com a corba trisectriu—, però que aquest no hagués descobert mai la seva propietat més sofisticada de línia que quadra el cercle. A continuació estudiarem la corba i la seva aplicació, seguint Pappos, incidint sobre algunes de les qüestions que hem avançat fins aquest moment. Primerament presenta la corba, de manera un pèl embolicada, a partir de dos moviments sincronitzats. Ell mateix farà notar que en aquesta sincronització rau la dificultat de la seva acceptació per part de Esporos de Nicea [III aC]. Això provocarà, després d'haver demostrat que pot quadrar el cercle, la seva presentació mitjançant llocs sobre superfícies de tres maneres diferents de les quals estudiarem la primera.¹⁷

Activitats 6.1

1. Sigui el tor generat per la rotació de la circumferència (F, FN) de centre F i radi $r = FN$, al voltant d'una recta l , tal que distància $(F, l) = \text{distància}(F, O) = R$, en què O és el peu de la perpendicular per F a l'eix l de rotació. [Vegeu en el gràfic adjunt tres posicions d'aquesta circumferència, amb centres F , M i K , i les dues circumferències descrites pels extrems dels seus diàmetres perpendiculars a l'eix de rotació.]



B i) Trobeu l'equació de les seves seccions $LNPQ$ paral·leles a un pla que conté

¹⁷Vegeu EECHE [1933], 191-206, 222-223 de l'edició de 1982.

l'eix de rotació. [Aquestes són les corbes “espíriques”.]

Indicació: Utilitzeu la referència en el pla AQN tal que

- *AN és la recta intersecció del pla de secció amb el pla que li és perpendicular i que conté l'eix de rotació, tal que A pertany a la recta FO.*
- *AQ és la recta perpendicular, per A, al pla OFN.*

D'aquesta manera les coordenades del punt P de la corba secció seran $x = AD$, $y = DP$, i cada corba de la família vindrà determinada pel paràmetre $\lambda = OA$.

ii) Feu una representació en perspectiva cònica, amb el CABRI, de la família de seccions resultants. [Utilitzeu les macros del capítol 7.]

iii) Feu dues representacions amb el DERIVE:

- *Una en què es visualitzi la família de corbes projectada ortogonalment sobre el pla paral·lel a la família que conté l'eix de rotació.*
- *Una altra en què es visualitzin les seccions en perspectiva cavallera.*

S

P

□

6.1.1 La quadratriu generada per moviments sincronitzats. La quadratura del cercle

Sigui el quadrat $ABCD$. Si un segment $MN = BC$ es mou des de BC a AD , amb moviment uniforme i paral·lelament a AD , amb l'extrem M sobre AB , i un segment $AE = AB$ gira amb centre en A , des de AB a AD , de manera que els dos moviments comencen i acaben al mateix temps, els dos segments «es tallaran mútuament en un punt que és contínuament transportat amb ells»; la línia descrita per aquest punt Z és la línia quadratriu.

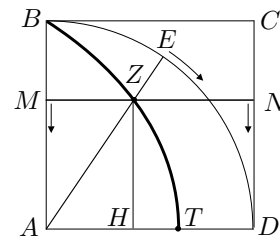
La propietat que la caracteritza és la igualtat de raons

$$\frac{AB}{HZ} = \frac{\widehat{BD}}{\widehat{ED}},$$

en què H és el peu de la perpendicular, pel punt Z , al segment AD .

Si observem bé la manera de generar la corba, no trobem estranyes les crítiques de Pappos:

Si dos punts comencen a moure's a partir d'un punt B , com podran arribar al mateix temps l'un al punt A , seguint una recta, l'altre al punt D seguint un arc, sense conèixer abans la raó entre la recta AB i l'arc BED ? Perquè cal necessàriament que les velocitats dels moviments siguin en la mateixa raó [...] D'altra banda, l'extrem de la línia de la qual alguns es serveixen per a la quadratura del cercle, és a dir el punt



T on la línia talla la recta AD , no s'ha, ni molt menys, trobat [...] Quan les rectes AE i MN posades en moviment s'estabilitzin simultàniament, s'aplicaran sobre la recta AD i no hi haurà secció entre elles, perquè la secció —la qual hagués esdevingut el punt extrem en què la línia troba AD — s'interromp abans de l'aplicació sobre la recta AD , a no ser que es digui d'imaginar la línia prolongada fins la recta AD de la manera que ho establím per a les rectes. Ara bé, això no refuta allò que hem suposat al principi, que el punt T s'ha obtingut considerant coneguda prèviament la raó de l'arc a la recta.

O sigui que la crítica és de la impossibilitat d'efectuar els dos moviments, perquè per efectuar-los li cal determinar la raó entre la circumferència i el radi, la qual cosa és, al mateix temps, el que es vol aconseguir mitjançant la corba. Per un altre costat ha de suposar que “l'últim” punt T es pot construir. Un cop presentada la seva crítica aconsella la no admissió de la corba, però segueix estudiant-la, i deixa una exposició “més geomètrica” per a una mica més endavant:

A menys que aquesta raó no sigui donada, no convé que, confiant en la reputació dels homes que l'han inventat, s'admeti una línia que sigui d'alguna manera massa mecànica. Però exposem primerament el problema que es demostra mitjançant aquesta línia.

Tot seguit, demostra que el punt T serà útil per quadrar el cercle. Per aconseguir-ho, utilitza la definició d'igualtat de raons de la teoria de la proporció per provar que

$$\frac{\widehat{BD}}{AB} = \frac{AB}{AT}, \quad \text{—en el nostre llenguatge} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{AB}{AT} \text{—}.$$

No entrarem en l'anàlisi de la seva demostració, sinó que utilitzarem els nostres coneixements sobre el cercle, el càlcul amb proporcions i la teoria de límits, per fer-ne una comprovació. Si partim del fet que $\frac{AB}{HZ} = \frac{\widehat{BD}}{\widehat{ED}}$, obtenim

$$\frac{AB}{\widehat{BD}} = \frac{HZ}{\widehat{ED}} = \frac{AZ \cdot \sin(\widehat{DAE})}{AB \cdot \widehat{DAE}}.$$

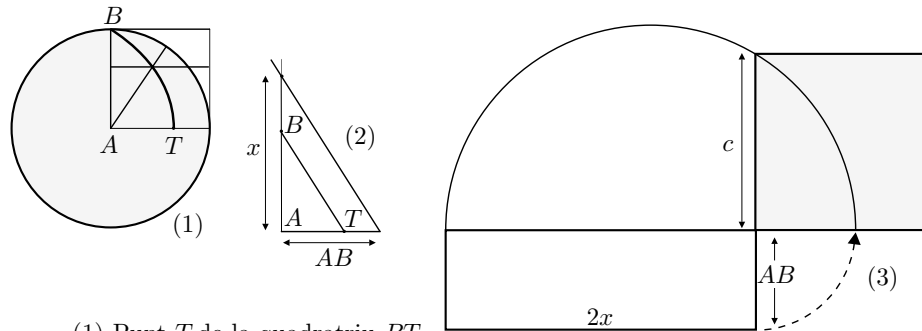
Si passem al límit quan $\widehat{DAE} \rightarrow 0$, tenim $Z \rightarrow T$, $B \rightarrow D$, $\sin(\widehat{DAE})/\widehat{DAE} \rightarrow 1$ i, per tant,

$$\frac{AB}{\widehat{BD}} = \frac{AT}{AD} = \frac{AT}{AB}$$

A partir d'aquí Pappos passa a establir la quadratura. Ha provat que la tercera proporcional x dels segments AT i AB és igual al quart de cercle \widehat{BD} . Llavors, diu que amb la construcció de x serà fàcil quadrar el cercle. Efectivament, a

partir de la proposició 1 del tractat *Sobre la mesura del cercle* d'Arquimedes,¹⁸ manifesta que el rectangle que té per costats $2 \cdot x$ i el radi AB del cercle, té la mateixa àrea que el cercle. Llavors, si es fa la construcció de la mitjana proporcional, —II.14 o bé VI.11 dels *Elements* d'Euclides—, dels costats d'aquest rectangle s'obtindrà el costat c del quadrat cercat.

Procediment per quadrar el cercle



- (1) Punt T de la quadratriu BT .
 (2) Segment x , tercera proporcional de AT i AB .
 (3) Quadrat de costat c , mitjana proporcional de $2x$ i AB .

6.1.2 Quadratriu concebuda mitjançant intersecció de superfícies

Per tal d'evitar la concepció “massa mecànica” de la corba, Pappos diu que la corba «pot ser analitzada geomètricament mitjançant llocs de superfície». Fa una anàlisi per a un cas més general de corbes en què la raó constant ZH/\widehat{ED} , sigui qualsevol. En presentem una adaptació concreta al cas de la quadratriu.

Suposem-la construïda. Si conservem la notació anterior es compleix

$$\frac{ZH}{\widehat{ED}} = \frac{BA}{\widehat{BD}}.$$

Pappos considera un quart de volta DC d'una hèlice circular continguda en el cilindre recte sobre l'arc \widehat{BD} . Aquesta corba està caracteritzada per la propietat de ser la raó PE/\widehat{ED} una constant qualsevol fixada prèviament, per a tot P de

¹⁸Aquest tractat consta de tres proposicions. La primera l'enuncia així:

Un cercle és equivalent a un triangle rectangle, del qual els catets siguin iguals al radi i a la circumferència del cercle.

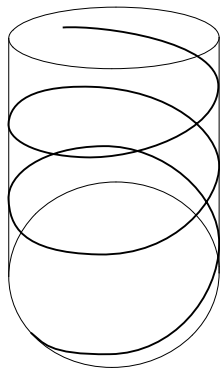
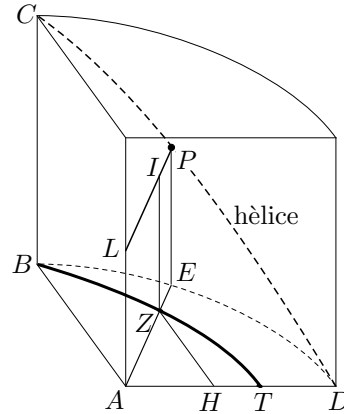
A les altres dues estableix les aproximacions

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{11}{14} \quad \text{i} \quad 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

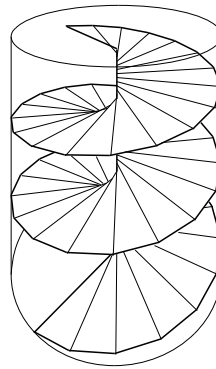
Per als detalls vegeu VERA [1970], volum 2, 94-100.

l'hèlice, en què E és el peu de la perpendicular per P sobre l'arc \widehat{BD} .¹⁹ Seguem l'anàlisi i considerem:

- El punt Z sobre la quadratriu.
- El segment ZH perpendicular a AD , en què H pertany a AD .
- El segment AZ prolongat fins que talla l'arc \widehat{BD} en el punt E .
- El segment EP perpendicular al pla de l'arc \widehat{BD} , en què P pertany a l'hèlice.
- El segment PL paral·lel per P al segment AE , en què L pertany a l'eix del cilindre recte per \widehat{BD} .
- El segment ZI paral·lel per Z al segment EP , en què I pertany a LP .



Hèlice



Plectoide

Llavors, podem observar que:

- 1) Per a qualsevol punt Z de la quadratriu, el punt I corresponent pertany al *plectoide*²⁰ generat per LP , quan P es mou sobre l'hèlice.

¹⁹Vegeu l'activitat sobre l'hèlice circular.

²⁰Aquesta és la traducció proposada per Eecke, amb l'observació que l'original és il·legible. Aquest està contingut en la superfície que anomenem *helicoides rectes* generat per una recta perpendicular a l'eix d'un cilindre que es mou recolzant-se sobre una hèlice fixa de la superfície del cilindre.

2) Per a tot punt Z de la quadratriu es compleix:

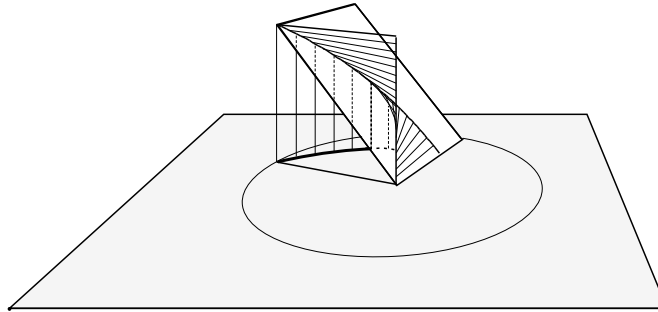
$$\frac{ZH}{\widehat{ED}} = \frac{BA}{\widehat{BD}}$$

$$\frac{IZ}{\widehat{ED}} = \frac{PE}{\widehat{ED}} = \frac{BC}{\widehat{BD}}$$

O sigui que $\frac{ZH}{IZ} = \frac{BA}{BC}$, i això implica que I pertany al pla que conté els punts ACD .

Consegüentment, per a tot Z de la quadratriu el punt I corresponent pertany a la intersecció de dues superfícies, —el plectoide i el pla ACD —, és a dir Z pertany a una línia l . Ara, el punt Z és la projecció perpendicular de I sobre el quart de cercle ABD . És a dir Z està sobre la línia determinada per dues superfícies, el pla ABD i la generada per les rectes perpendiculars al pla ABD que es recolzen sobre la línia l que conté I . Amb això queda vist que tots els punts de la quadratriu estan sobre una línia resultant de tallar dues superfícies. Demostrar que tots els punts d'aquesta línia tenen la propietat de la quadratriu és immediat seguint enrere els passos fets.²¹

Quadratriu com a projecció de la intersecció de dues superfícies



□

Amb aquesta presentació Pappos aconseguix una visió “menys mecànica”, en desfer-se de la necessitat de conèixer la raó BA/\widehat{BD} per generar la quadratriu. Es pot plantejar si el moviment necessari per generar el plectoide és “massa mecànic”. Opinem que no, al menys en el sentit que ho era el del moviment de les dues rectes, perquè la raó PE/\widehat{ED} necessària per generar l'hèlice és una constant no predeterminada i, per tant, pot ser racional. Això fa que sigui possible idear,

²¹De fet, la intersecció de les dues superfícies dóna la quadratriu i el segment AD . És a dir que hem d'excloure de la intersecció aquest últim segment amb excepció del punt T . Aquesta última qüestió segueix plantejant un problema de continuïtat.

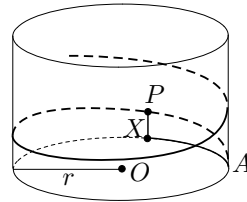
un mecanisme dentat amb dues col·leccions enteres de dents que generin els moviments necessaris per descriure l'hèlice, la qual cosa no es podia fer en la primera construcció de la quadratriu. Més encara, per poder construir les rodes dentades adequades es pot agafar el racional que representa la raó PE/\widehat{ED} amb numerador i denominador iguals als costats de dos polígons regulars construïbles. Tot i això la corba no deixa de ser mecànica en el sentit indicat, —vegeu la nota 2 de la pàgina 278—, per Descartes a la *Geometria*.

Activitats 6.2

S 1. Elaboreu una visualització, pas a pas, amb el CABRI, de la quadratura del cercle presentada a la pàgina 287.

P 2. Sigui una secció circular $\mathcal{C}(O, r)$ d'un cilindre circular recte, un punt $A \in \mathcal{C}$ i una constant $K > 0$.

Podem definir l'hèlice circular com el lloc geomètric dels punts P de la superfície del cilindre tals que la raó $PX/\widehat{XA} = K$, en què X és la intersecció de la circumferència \mathcal{C} amb la recta generatriu del cilindre que passa per P , i l'arc \widehat{XA} sempre té la mateixa orientació. [Per a cada constant $K > 0$ existeixen dues hèlices, una per a cada orientació.]



El conjunt de punts P de l'hèlice tals que $0 \leq \widehat{XA} \leq 2n\pi r$, $n \in \mathbb{N}$ constitueixen n voltes de l'hèlice.

i) Trobeu les línies més curtes entre dos punts A i B de la superfície d'un cilindre recte.

S ii) Representeu, en perspectiva cònica, utilitzant el CABRI i les macros del capítol 7:

- Una hèlice de paràmetre K , controlat pel nombre de voltes representat.
- Un plectoide, a partir de l'hèlice anterior.
- La quadratriu com a projecció de la intersecció del plectoide amb el pla indicat a la secció 6.1.2, pàgina 289.
- Una escala de cargol amb una volta d'hèlice.

□

6.2 La quadratura de llunes

Eudem de Rodes [IV aC], deixeble d'Aristòtil, va redactar una Història de la Geometria, avui desapareguda, de la qual el grec Simplicí [VI] va reproduir alguns

fragments que s'han conservat. En un d'aquests es presenten les quadratures de tres llunes i una quadratura d'una lluna més un cercle, fetes per Hipòcrates de Quios [v aC]. És molt possible que aquests resultats estiguessin directament relacionats amb les recerques sobre la quadratura del cercle. En el seu escrit, Simplicí utilitza també la font d'Alexandre d'Àfrodísia [II-III]. Aquest últim presenta la quadratura de la primera lluna que es troba en el fragment d'Eudem, i l'últim resultat d'aquest, d'una manera alternativa. Segons Alexandre, Hipòcrates pensava que, amb aquest segon resultat, havia quadrat el cercle. Possiblement estigués influït per l'opinió d'Aristòtil, quan parla en els *Sofismes: Refutació*, 171b 15 de «les fal·làcies d'Hipòcrates o de les quadratures de llunes».²² Tanmateix, les paraules finals del fragment d'Eudem són:

Llavors, si es poden quadrar les figures rectilínies tractades [un triangle i un hexàgon], també es podrà quadrar el cercle amb la lluna.

Així, sembla inferir-se que Hipòcrates tenia clar que no havia quadrat el cercle, sinó que era conscient de que havia reduït el problema de quadrar el cercle al de quadrar una lluna que després presentarem.

Ara, pretenem donar una mostra de la seva actuació presentant la primera de les tres llunes que quadra Hipòcrates, segons la versió d'Eudem, i fer una proposta de reducció del problema de la quadratura del cercle que condueixi al quart resultat del fragment.²³

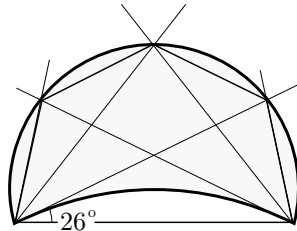
6.2.1 Les llunes del fragment d'Eudem

Una concepció general d'una lluna podria venir representada per una figura plana limitada per dos arcs de dos cercles de diferent radi. Les llunes estudiades per Hipòcrates compleixen, a més, una altra propietat. L'arc més gran o exterior es pot descompondre en un nombre enter p d'arcs iguals, i l'arc interior es pot descompondre en un altre nombre enter q d'arcs iguals, tals que els segments circulars determinats pels primers són semblants als segments determinats pels segons.²⁴ És a dir que els arcs de la primera i la segona descomposició subteneixen el mateix angle central en les seves respectives circumferències. Es diu que les llunes així definides són de tipus (p, q) .

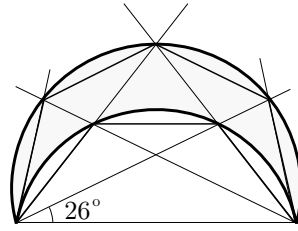
²²Vegeu HEATH [1949], 34 de l'edició de 1998.

²³Per al fragment d'Eudem referit a Hipòcrates, vegeu VERA [1970], 680-685. Per a exposicions comentades d'aquest fragment juntament amb el d'Alexandre, vegeu HEATH [1921], volum I, 183-201 de l'edició de 1981, KNORR [1986], 29-39 de l'edició de 1993, i MONTESINOS [2000], 38-47.

²⁴Recordeu la definició 11 del llibre III dels *Elements* d'Euclides que podeu trobar a la pàgina 107 del present treball.



Lluna (4,1)



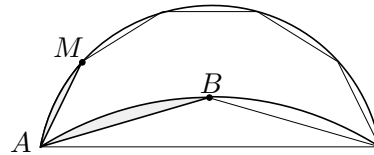
Lluna (4,3)

Des del punt de vista de la recerca de llunes quadrables, la tria de les construïdes a partir de segments semblants, està relacionada amb el següent resultat conegut d'Hipòcrates, el qual és presentat en el relat d'Eudem:

Com a proposició inicial útil per a aquestes quadratures, Hipòcrates establí que els segments semblants de cercle són entre si com els quadrats de les seves bases. Ho va demostrar recolzant-se en allò que ja havia demostrat: els cercles són entre si com els quadrats dels seus diàmetres.²⁵

Així, amb aquest resultat a la seva disposició, Hipòcrates podia relacionar les raons entre àrees de segments circulars amb les raons entre àrees de quadrats.²⁶

$$\frac{\text{seg}(AB)}{\text{seg}(AM)} = \frac{AB^2}{AM^2}. \quad (6.1)$$



Llavors, el tipus de quadratura que es planteja Hipòcrates és el de trobar, entre la infinitat de llunes de cada tipus que es poden construir, aquelles que tenen l'àrea igual al polígon determinat per les cordes dels $p+q$ segments circulars que defineixen la lluna. De la imposició d'aquesta condició s'obté,

$$p \cdot \text{seg}(AM) = q \cdot \text{seg}(AB).$$

Llavors, a partir de la igualtat (6.1)

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{seg}(AB)}{\text{seg}(AM)} = \frac{AB^2}{AM^2} \implies \boxed{p \cdot AM^2 = q \cdot AB^2}. \quad (6.2)$$

Amb aquesta condició aconseguim quadrar:

²⁵No és probable que Hipòcrates tingués una demostració rigorosa d'aquest resultat. Aquesta hagués necessitat d'una teoria de la proporció que en aquells moments no hi ha indicis que estigués desenvolupada. La primera demostració d'aquest resultat podria haver estat obra d'Èudox, i seria com la que es troba en el teorema XII.2 dels *Elements* d'Euclides.

²⁶Representarem els segments de cercle amb la notació $\text{seg}(PQ)$, en què P i Q són els extrems de la base PQ .

- Una lluna de tipus (2, 1), amb arc exterior constituït per un semicercle. La quadratura ve proporcionada per un triangle, en ser determinada per $2 + 1 = 3$ segments.
- Una lluna de tipus (3, 1), amb arc exterior major que un semicercle. La quadratura ve proporcionada per un quadrilàter [trapezi], en ser determinada per $3 + 1 = 4$ segments.
- Una lluna de tipus (3, 2), amb arc exterior menor que un semicercle. La quadratura ve proporcionada per un pentàgon, en ser determinada per $3 + 2 = 5$ segments.

Les tres es poden construir amb regla i compàs, encara que ell construeix l'última utilitzant una *neusi*.

Quant a quadrar el cercle, no ho aconseguim i es queda amb una reducció del problema al de la quadratura d'una lluna de tipus (2, 1). Presentarem la primera quadratura per tal de veure la seva manera d'actuar, i mostrarem com la recerca sobre la quadratura del cercle, dirigida a trobar una lluna que el quadrés, podria haver propiciat l'obtenció del quart resultat de l'exposició d'Eudem.

Primera quadratura del fragment d'Eudem

Si cerquem la construcció d'una lluna del tipus (2, 1), s'ha de construir un triangle isòsceles ABC tal que, per la igualtat (6.2), la suma $2 \cdot AB^2$ dels quadrats dels dos costats iguals AB i BC , sigui el quadrat AC^2 de l'altre costat. Aquest serà, pel recíproc del teorema de Pitàgores, un triangle rectangle isòsceles. Llavors, la lluna resulta de la circumscripció d'un semicercle al triangle ABC , i del traçat, sobre la hipotenusa AC , d'un segment de cercle semblant als segments separats pels catets. Això és el que explica Eudem amb les paraules següents:

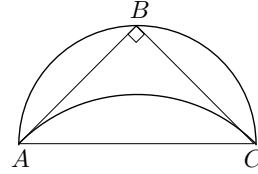
Ho va fer [quadrar la lluna] circumscriuint un semicercle en un triangle rectangle isòsceles i descrivint sobre la base un segment de cercle semblant al separat pels costats. Llavors, en ser el segment [seg (AC)] descrit sobre la base [AC] igual a la suma dels [seg (AB) i seg (BC)] separats pels costats, si s'afegeix a aquell [seg (AC)] i a aquests [seg (AB) i seg (BC)] la part del triangle que està per damunt del del segment [seg (AC)] descrit sobre la base, la lluna serà igual al triangle.

Observem que la seva presentació és sintètica, i que no entra en detalls sobre l'afirmació relativa a la suma de segments. Aquesta es demostra immediatament fent marxa enrera en la nostra anàlisi anterior. Efectivament:

- Pel teorema de Pitàgores, $2 \cdot AB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$.

- Llavors, per la semblança dels segments circulars construïts,

$$\frac{\text{seg}(AB)}{\text{seg}(AC)} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB^2}{2 \cdot AB^2} = \frac{1}{2}$$



- Per tant, $\text{seg}(AC) = 2 \cdot \text{seg}(AB) = \text{seg}(AB) + \text{seg}(AC)$.

A partir d'aquí, l'última part és tal com ell diu:

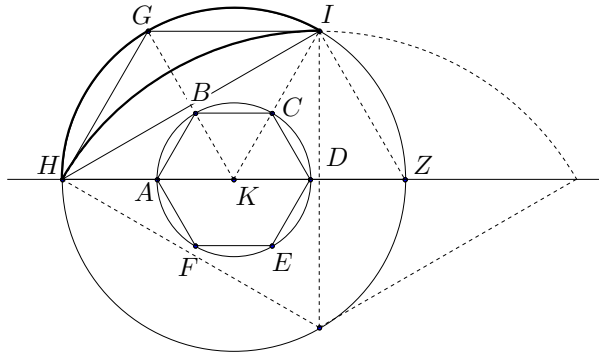
$$\begin{aligned} \text{Lluna} &= \text{semicercle}(ABC) - \text{seg}(AC) = \\ &= \text{semicercle}(ABC) - \text{seg}(AB) - \text{seg}(BC) = \text{triangle}(ABC). \end{aligned}$$

Quadratura d'una lluna amb un cercle

Transcrivim el text d'Eudem, per tal de presentar, després, una possible reducció del problema de la quadratura del cercle que hagués pogut donar lloc a aquest resultat.

També quadrà la suma d'una lluna i un cercle així: Sigui K el centre comú de dos cercles tal que el quadrat sobre el diàmetre de l'exterior sigui sis vegades el quadrat sobre el diàmetre de l'interior. Sigui inscrit en aquest l'hexàgon $ABCDEF$; siguin prolongats fins la perifèria del cercle exterior els radis KA , KB i KC ; siguin traçades les rectes HG , GI i IH , i sigui inscrit sobre d'aquesta un segment semblant $[HI]$ al separat per la recta HG . En ser necessàriament el quadrat sobre la recta HI el triple del quadrat sobre la recta GH , costat de l'hexàgon, perquè la que subtendeix $[HI]$ els costats de l'hexàgon $[HG$ i $GI]$, forma amb un tercer $[IZ]$ un angle recte inscrit en un semicercle de manera que la suma dels seus quadrats $[HI^2 + IZ^2]$ val el quadrat $[HZ^2]$ del diàmetre, i el quadrat del diàmetre $[HZ^2]$ és quatre vegades el quadrat $[GH^2]$ del costat de l'hexàgon perquè aquest és igual al radi i el doble en longitud és el quàdruple en quadrat; i, en ser el quadrat sobre la recta GH sis vegades el quadrat sobre la recta AB , resulta que el segment descrit sobre HI és igual a la suma dels separats en el cercle exterior per les rectes HG i GI i dels separats en el [cercle] interior per tots els costats de l'hexàgon. Consegüentment, la lluna HGI serà menor que el triangle indicat per les mateixes lletres. Per tant, la suma de la lluna i dels segments separats per l'hexàgon serà igual al triangle, i sumant a una part i a l'altra aquest hexàgon, la suma del triangle i l'hexàgon serà igual a la de la lluna i el cercle interior.

Llavors, si es poden quadrar les figures rectilínies tractades, també es pot quadrar la suma del cercle i la lluna.



La transcripció simbòlica més explicitada dels resultats intermedis seria,

- (1) $HI^2 + IZ^2 = HZ^2 = (2 \cdot GH)^2 \implies HI^2 = 4 \cdot GH^2 - GH^2 = 3 \cdot GH^2$
- (2) $GH^2 = HK^2 = 6 \cdot AK^2 = 6 \cdot AB^2 \implies HI^2 = 3 \cdot GH^2 =$
 $= GH^2 + GI^2 + 6 \cdot AB^2$
- (3) $\frac{\text{seg}(GH)}{\text{seg}(HI)} = \frac{GH^2}{HI^2}$, $\frac{\text{seg}(GH)}{\text{seg}(AB)} = \frac{GH^2}{AB^2}$ i (2) \implies
 $\text{seg}(HI) = 3 \cdot \text{seg}(GH) = \text{seg}(GH) + \text{seg}(GI) + 6 \cdot \text{seg}(AB)$
- (4) lluna $(HGI) = \text{seg}(GH) + \text{seg}(GI) + \text{triangle}(HGI) - \text{seg}(HI) \implies$
 $\implies \text{lluna}(HGI) + 6 \cdot \text{seg}(AB) = \text{triangle}(HGI) \implies$
 $\implies \text{lluna}(HGI) + 6 \cdot \text{seg}(AB) + \text{hexàgon}(ABCDEF) =$
 $= \text{triangle}(HGI) + \text{hexàgon}(ABCDEF) \implies$

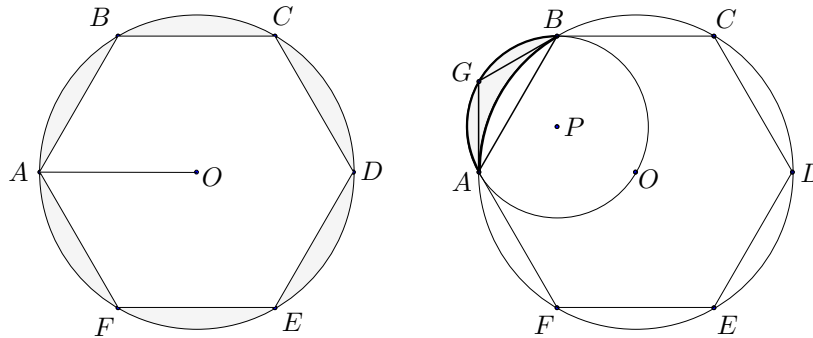
$$\boxed{\text{lluna}(HGI) + \text{cercle}(K, AK) = \text{triangle}(HGI) + \text{hexàgon}(ABCDEF)}$$

□

En el desenvolupament d'Hipòcrates, observem que les figures implicades s'introdueixen sense cap mena d'explicació, i comprovem que finalment són útils per a relacionar la quadratura del cercle amb la d'una lluna. Veurem que en un intent de reducció del problema de quadrar el cercle al de quadrar llunes del tipus (2, 1), apareixen, d'una manera natural, les condicions que s'imposen a les figures implicades i el resultat d'Hipòcrates.

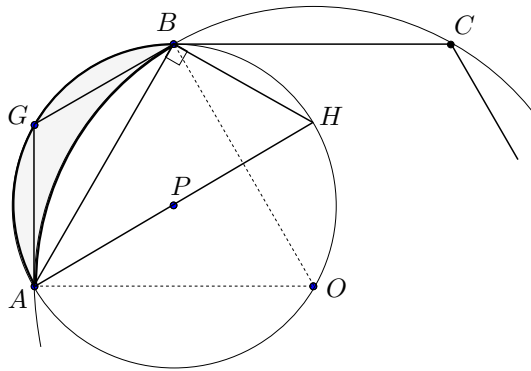
Sigui el cercle (O, OA) que volem quadrar.²⁷ Fem una primera aproximació a la seva quadratura mitjançant l'hexàgon inscrit $ABCDEF$. Llavors, resta per quadrar la superfície $6 \text{seg}(AB)$. Ens proposem de trobar una lluna a la qual reduir el problema de quadrar $\text{seg}(AB)$. És evident que podem provar amb molts tipus de llunes, i per a cadascuna d'elles trobaríem alguna reducció. Treballarem amb una del tipus (2, 1), i veurem que ens condueix al resultat d'Hipòcrates.

²⁷Les notacions d'ara no tenen res a veure amb les de l'exposició d'Eudem que hem fet més amunt.



Siguin AGB la lluna considerada, i la circumferència de centre P que conté l'arc AGB . Llavors,

- La circumferència AGB conté el punt O , i els segments AG i GB són costats de l'hexàgon regular inscrit en ella, en ser $\widehat{APB} = \widehat{APG} + \widehat{GPB} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ i $\widehat{AOB} = 60^\circ$.



- Si tracem el diàmetre AH , el triangle ABH és rectangle i, per tant,

$$(2 \cdot AG)^2 = AH^2 = AB^2 + BH^2 = AB^2 + AG^2 \implies AB^2 = 3 \cdot AG^2.$$

Consegüentment,

$$\frac{\text{seg}(AG)}{\text{seg}(AB)} = \frac{AG^2}{AB^2} = \frac{1}{3} \implies \text{seg}(AG) = \frac{1}{3} \text{seg}(AB)$$

i, llavors

$$\begin{aligned} \text{lluna}(AGB) &= \text{seg}(AGB) - \text{seg}(AB) = \\ &= \text{seg}(AG) + \text{seg}(GB) + \text{triangle}(AGB) - \text{seg}(AB). \end{aligned}$$

D'aquí s'obté finalment,

$$\text{lluna}(AGB) = \text{triangle}(AGB) - \frac{1}{3} \text{seg}(AB). \quad (6.3)$$

O sigui que hem reduït el problema de quadrar el cercle inicial (O, OA) , primerament al de quadrar el segment circular seg (AB) , i aquest al de quadrar la lluna AGB . Podem, doncs, afirmar que, en ser el triangle quadrable, el cercle és quadrable si ho és la lluna. El problema és que, amb el regle i el compàs, la lluna no és quadrable. Aquesta és la dificultat amb que es troba Hipòcrates, i llavors el que fa es limitar-se a transmetre el resultat generat per la seva investigació. Aquest es desprèn de la igualtat (6.3). Efectivament,

$$\text{lluna}(AGB) = \text{triangle}(AGB) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \overbrace{(\text{cercle}(O, OA) - \text{hex}(ABCDEF))}^{\mathcal{R}} \right).$$

Mirarem de transformar $\frac{1}{18} \mathcal{R}$ en un domini d'igual àrea, semblant a \mathcal{R} , utilitzant la raó de semblança entre àrees igual a 18, o entre línies igual a $\sqrt{18}$. És a dir que, en ser el radi del cercle (O, OA) igual a AB , cal construir un cercle de radi x tal que

$$18 \cdot x^2 = OA^2 = AB^2 = 3 \cdot (AG)^2 \quad \text{o bé} \quad 6 \cdot x^2 = AG^2.$$

Aquesta és la condició de la construcció de les dues circumferències inicials d'Hipòcrates. Ara, si centrem el cercle de radi x determinat, en el centre P del cercle AGB obtenim el seu resultat:

$$\text{lluna}(AGB) = \text{triangle}(AGB) - \text{cercle}(P, x) + \text{hexàgon inscrit en}(P, x).$$

Expressat tal com ho fa en el fragment quedaria:

Donats els dos cercles (P, x) i (P, AG) tals que $6x^2 = AG^2$, es compleix

$$\text{lluna}(AGB) + \text{cercle}(P, x) = \text{triangle}(AGB) + \text{hexàgon inscrit en}(P, x)$$

Activitats 6.3

1. Per quadrar la lluna del tipus (3, 1) a la manera d'Hipòcrates, caldrà inscriure un polígon $MABN$ de 3 + 1 costats en un cercle de manera que $MA = AB = BN$ i $MN^2 = 3 \cdot AB^2$. És a dir que $MABN$ serà un trapezi isòsceles de base major MN , els altres costats iguals, i complint la relació esmentada entre els quadrats. B

i) Utilitzeu el CABRI per:

- Construir el trapezi sense l'ajut d'eines de mesura, edició numèrica o calculadora.

- Construir la lluna que té la mateixa àrea que el trapezi.
- Trobar el valor de l'angle central subtendit per cadascun dels quatre arcs que determinen la lluna, amb l'eina **Angle** del quadre d'eines **Mesura**.

ii) Utilitzeu la trigonometria i l'àlgebra per calcular el valor de l'angle esmentat al final de l'apartat anterior. S

S **2.** Creeu un fitxer de CABRI en què es puguin visualitzar totes les llunes possibles dels tipus $(5, x)$, per a tots els angles possibles dels segments circulars implicats. □

6.3 La duplicació del cub

Per duplicar el cub de costat a , cal trobar un segment x tal que $x^3 = 2a^3$. Havíem explicat que aquest problema va ser reduït per Hipòcrates,²⁸ al de la inserció de dues mitjanes proporcionals x i y entre els segments a i $2a$. Una manera alternativa de pensar la reducció presentada en aquella secció seria la següent:

$$x^3 = 2a^3 \implies x^2 \cdot x = 2a \cdot a^2 \implies \frac{x^2}{a^2} = \frac{2a}{x}. \quad (6.4)$$

Llavors, si construïm un segment y tal que $x^2 = a \cdot y$ tindrem

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad \text{i, per tant,} \quad \frac{2a}{x} = \frac{x^2}{a^2} = \frac{a \cdot y}{a^2} = \frac{y}{a}.$$

O sigui que,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Llavors, si se sap construir x i y , la síntesi és immediata. Efectivament,

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = a \cdot y \\ x \cdot y = 2a \cdot a \end{array} \right\} \implies x^3 = x^2 \cdot x = a \cdot y \cdot x = a \cdot 2a \cdot a = 2a^3.$$

Queda doncs pendent el problema d'inserir les dues mitjanes proporcionals entre dos segments donats. Un gran nombre de geòmetres van dirigir els seus esforços a la seva resolució. Això comportà l'ampliació dels tipus de línies i superfícies que estudiava la geometria i, consegüentment un fort desenvolupament d'aquesta. La influència de les noves incorporacions al món dels objectes geomètrics va durar molts segles. Per exemple, la classificació de línies citada per Pappos, la qual hem presentat al principi del capítol, no va poder ser superada fins que es

²⁸Vegeu la secció 3.1.

va aconseguir tractar la geometria amb el llenguatge de l'àlgebra, moment en què Descartes va encetar una nova etapa. El mateix llenguatge de l'àlgebra fou utilitzat, a partir del segle XIX, per determinar les construccions geomètriques possibles amb tipus diferents d'instruments.

6.3.1 Origen del problema

Existeixen dues narracions atribuïdes a Eratòstenes de Cirene [III aC] que proporcionen informació sobre l'origen del problema. Una d'elles la trobem recollida per Teó d'Esmirna²⁹:

Eratòstenes, en el llibre que té per títol *Platònic*, relata que els delians, havent interrogat l'oracle sobre la manera de deslliurar-se de la pesta, van rebre l'ordre de déu de construir un altar doble del que ja existia. Aquest problema abocà els arquitectes contra un obstacle singular. Es preguntaven de quina manera es podia fer un sòlid doble d'un altre. Interrogaren Plató sobre la dificultat. Aquest els respongué que déu s'havia dirigit així a l'oracle, no perquè ell tingués necessitat d'un altar doble, sinó per retreure els grecs la seva negligència en l'estudi de les matemàtiques i per fer poc cas de la geometria.

L'altra narració és recollida per Eutoci [VI] sota la forma de l'inici d'una carta d'Eratòstenes al rei Ptolemeu III Euergetes:³⁰

Eratòstenes al rei Ptolemeu, salut!

Es diu que un dels poetes tràgics antics havia representat Minos fent preparar una tomba a Glaucó [el seu fill], i havent insistit que tingués cent peus d'allargada en tots els seus costats, digué: "Has triat la cambra sepulcral del rei petita, que sigui doblada; no et confonguis sobre el que convé, i dobla el més aviat possible cada part de la tomba." Sembla que Minos s'equivoqui, perquè quan es doblen els costats, un pla esdevé quàdruple i un sòlid vuit vegades més gran. Entre els geòmetres també s'ha cercat la manera de doblar un sòlid donat de manera que conservi la forma, i el problema d'aquesta classe s'anomenà la duplicació del cub, perquè havent-se proposat un cub, aquests geòmetres s'esforçaren en doblar-lo. Després de molt temps de confusió, fou Hipòcrates de Quios el primer a adonar-se que un cub seria doblat si s'arribaven a trobar dues mitjanes proporcionals en proporció contínua entre dues línies rectes de les quals la més gran és el doble de la més petita; de manera que canvià

²⁹Vegeu TEÓ D'ESMIRNA [II], 5. A PLUTARC [I-II] i a la *Vida de Marcel* del mateix autor trobem Plató referint-se a la qüestió en termes similars; vegeu els dos fragments de la secció 8.9.

³⁰Vegeu EECKE [1960] 609-615.

la dificultat en una altra dificultat no més petita. Es diu que més tard uns delians, encarregats per un oracle de doblar un dels seus altars, i abocats a la mateixa dificultat, foren enviats a veure Plató, i demanaren als geomètres de l'Acadèmia que trobessin allò que cercaven.

D'aquests relats es poden treure tantes interpretacions com les que hem discutit al principi del capítol, tan internes com externes a les matemàtiques, i no pretenem prendre posició, favorable ni contrària, per cap d'elles. Quedin doncs els documents escrits com a testimonis d'una situació a interpretar.

6.3.2 Sobre la resolució del problema

Molts geomètres es dedicaren a la resolució del problema, com demostren els documents existents. Per un cantó tenim Eutoci que en el comentari de la primera proposició del llibre II del *Sobre l'esfera i el cilindre* d'Arquimedes se sent obligat a comentar la solució del problema de la inserció de les dues mitjanes perquè l'autor la dona per coneguda. En aquesta proposició es planteja la construcció d'una esfera que tingui el mateix volum que un cilindre donat. L'anàlisi d'Arquimedes es pot traduir en el nostre llenguatge algebraic, utilitzant les fórmules dels volums, així:

Sigui el cilindre de diàmetre a i altura b . Suposem l'esfera de diàmetre x construïda. Llavors,

$$\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot b = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3. \quad (6.5)$$

Considerem el cilindre de diàmetre p i altura q , tal que el seu volum és una vegada i mitja el volum primitiu,

$$\pi \left(\frac{p}{2}\right)^2 \cdot q = \frac{3}{2} \left(\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot b\right). \quad (6.6)$$

Llavors, de (6.5) i (6.6),

$$\pi \left(\frac{p}{2}\right)^2 \cdot q = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3\right) = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot x \implies \frac{x^2}{p^2} = \frac{q}{x}.$$

Notem que aquest resultat és del tot igual que l'obtingut en la reducció, que hem fet, en les equacions (6.4), de la duplicació del cub. Llavors, si construïm un segment y tal que $x^2 = p \cdot y$ tindrem

$$\frac{p}{x} = \frac{x}{y} \quad \text{i, per tant,} \quad \frac{q}{x} = \frac{x^2}{p^2} = \frac{p \cdot y}{p^2} = \frac{y}{p}.$$

Consegüentment,

$$\frac{p}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{q}.$$

La síntesi és immediata, i el problema queda resolt amb la inserció de dues mitjanes proporcionals entre el diàmetre p i l'altura q d'un cilindre que sigui una vegada i mitja el cilindre inicial, la construcció de les quals no es proporcionada per Arquimedes. Eutoci diu referint-se a aquest punt:

Tanmateix, no hem trobat en cap lloc que la invenció d'aquestes mitjanes hagi sigut descrita per Arquimedes, però hem trobat aquest problema en els escrits d'alguns homes cèlebres.

Llavors, decideix presentar aquestes solucions excepte la d'Èudox que rebutja i que no ens ha arribat per cap altre conducte. En total dóna onze resolucions corresponents a Plató, Heró, Philon de Bizanci, Apol·loni, Diocles, Pappos, Sporus, Menecm, Arquites, Eratostenes i Nicomedes.

L'altra font que ens proporciona algunes resolucions d'aquest problema és la de Pappos en el llibre III de la seva *Col·lecció*,³¹ en què presenta les solucions d'Eratostenes, Nicomedes, Heró i la seva pròpia:

Els antics geòmetres no han pogut construir el problema relatiu a les dues rectes, sòlid per naturalesa, d'una manera conforme al raonament geomètric, perquè no és fàcil traçar seccions còniques en el pla; però ho aconseguen d'una manera admirable utilitzant instruments propis per executar les construccions manualment i còmodament, com es pot constatar en el *Mesolabi* d'Eratostenes i a les *Mecàniques* de Philon i Heró. Efectivament, havent admès aquests últims que el problema és sòlid, han efectuat la construcció d'una manera instrumental, mentre que Nicomedes ha resolt el problema utilitzant la línia conoide, mitjançant la qual ha realitzat també la tripartició de l'angle. Exposarem, llavors, quatre construccions del problema que inclouen un perfeccionament que és personal.

De totes les solucions proposades que hem citat les més antigues són les d'Arquites, Èudox i Menecm, en el segle IV aC, a les quals es refereix Eratostenes a la seva carta de la manera següent, fent notar la seva visió "pràctica" de la qüestió:

Aquests [els geòmetres de l'Acadèmia] es dedicaren laboriosament a la qüestió, i esforçats en la consideració de les dues mitjanes proporcionals entre dues rectes donades, es diu que fou Arquites de Tarent qui les trobà mitjançant dos cilindres, i Èudox mitjançant línies corbes. Però tots aquests geòmetres han descrit aquestes mitjanes de manera demostrativa sense poder-les obtenir manualment ni dur-les a la pràctica, excepte Menecm que ho aconseguí en part, però tanmateix encara de manera incòmoda.

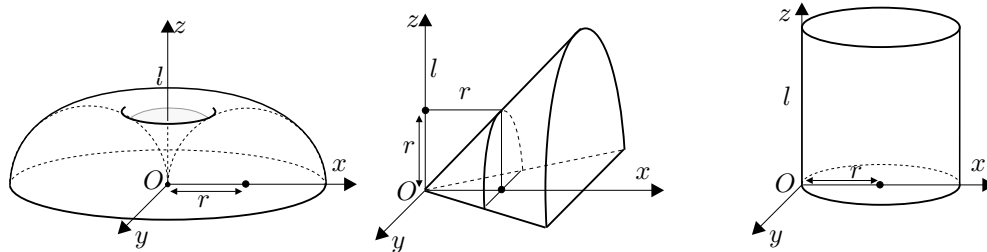
³¹Vegeu EECHE [1933], volum 1, 38-50.

Tractarem breument amb llenguatge algebraic la solució d'Arquites, pel seu enginy. Quant a la solució d'Èudox només comentem que Eutoci no la transcriu perquè la considera absurda. Fins i tot arriba a comparar Èudox amb els "geòmetres mediocres", la qual cosa no pot ser res més que un malentès; el resultat d'aquesta decisió d'Eutoci és que avui no coneixem la solució d'Èudox tot i que se n'han fet conjectures.³² Finalment dedicarem tota una secció a la solució de Menecm i la seva possible relació amb els orígens de l'estudi de les seccions còniques.

6.3.3 Solució d'Arquites interpretada algebraicament

La solució d'Arquites mostra un interès estrictament matemàtic en la qüestió, perquè intenta una resolució a partir de superfícies generades pel moviment de rectes i circumferències, no practicable però conceptualment clara. No és la nostra intenció entrar en els detalls de la seva resolució, sinó fer-ne una interpretació en llenguatge algebraic. Aquesta no aclareix els camins de la seva recerca, però proporciona una visió de les superfícies utilitzades i permet comprovar l'exactitud del resultat. A la vegada, ens sensibilitza davant l'enginy que representa assolir aquesta resolució sense l'ajut de les eines algebraiques.

Les superfícies implicades a la resolució són un cilindre circular recte de radi r , un con rectangle i un tor generat per una circumferència de radi r que gira al voltant d'una tangent l . El vèrtex del con es situa en el centre de simetria del tor, i el seu eix és perpendicular a l'eix de rotació l . El cilindre té una generatriu a l'eix l , i un diàmetre en la direcció de l'eix del con.



Si situem una referència amb l'origen O al vèrtex del con, l'eix OX en la direcció de l'eix del con, l'eix OY perpendicular al pla que conté OX i l'eix l , i l'eix OZ en la direcció de l'eix l , obtenim les equacions de les superfícies:³³

$$\text{Con : } x^2 = y^2 + z^2. \quad (6.7)$$

$$\text{Cilindre : } x^2 + y^2 = 2rx. \quad (6.8)$$

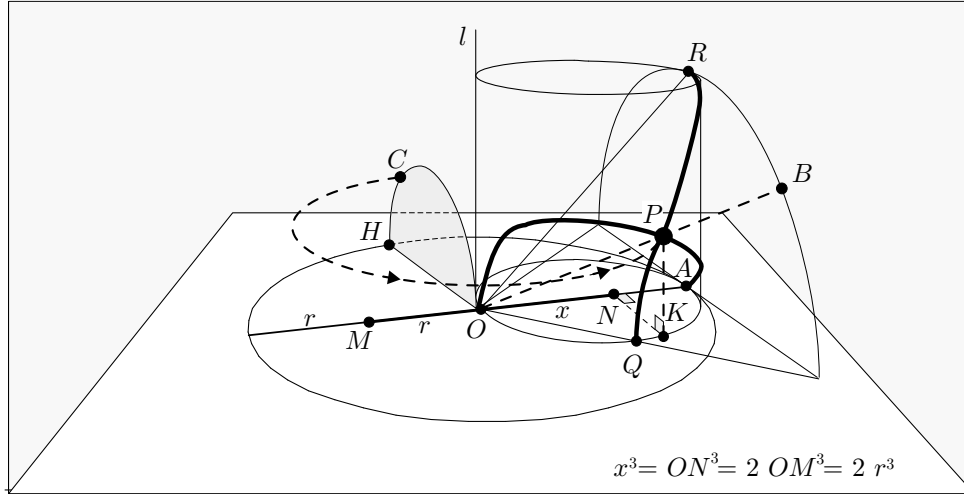
$$\text{Tor : } (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4r^2(x^2 + y^2) \quad (6.9)$$

³²Vegeu KNORR [1986], 53–60 de l'edició de 1993.

³³Vegeu l'activitat 6.4.1.

Llavors, la solució $x = ON$ d'aquest sistema serà el costat del cub de doble volum que el cub $r^3 = OM^3$. Efectivament, si substituïm (6.7) i (6.8) a l'equació (6.9) obtenim

$$(x^2 + x^2)^2 = 4r^2(2rx) \implies 4x^4 = 8r^3x \implies x^3 = 2r^3.$$



Activitats 6.4

1. Considereu les superfícies que generen la solució d'Arquites.

i) Demostreu que les seves equacions són (6.7), (6.8) i (6.9). B

ii) Representeu en perspectiva cònica, amb el CABRI, utilitzant les macros del capítol 7, P

– Un tor, un con i un cilindre per separat.

– La intersecció del tor i el cilindre de la duplicació d'Arquites

– La intersecció del con i el cilindre de la duplicació d'Arquites. S

– La intersecció de les tres superfícies anteriors.

□

6.4 Les tríades de Menecm i els orígens de les seccions còniques

Al final de la carta d'Eratòstenes presentada per Eutoci, trobem la referència a la resolució del problema de les dues rectes mitjançant les "tríades de Menecm". A la llum de l'exposició d'Eutoci de les dues solucions atribuïdes a Menecm, en

què s'utilitzen dues paràboles i una hipèrbola que analitzarem més endavant, el significat de l'expressió “tríades de Menecm” presenta dues interpretacions:³⁴

- Una interpretació estàndard, segons la qual Menecm seria l'introduïdor de les corbes còniques com a seccions d'un con. Una de les suposicions en què es basaria aquesta interpretació, seria que si s'utilitzava el terme “tríades” per referir-se a la paràbola i a la hipèrbola, era perquè Menecm tenia consciència que aquests dos tipus de corbes formaven part d'una família més general de tres tipus de corbes. Aquestes serien les que resultaven de la secció d'un con amb un pla i eren diferents de la circumferència. Aquest grup el constituïen les seccions utilitzades en la solució de Menecm, juntament amb les el·lipses.
- Una altra visió de la qüestió portaria a interpretar el terme “tríades” com a representant de les tres corbes realment utilitzades per Menecm, dues paràboles i una hipèrbola. Així no cal suposar que Menecm conegués la relació d'aquestes amb l'el·lipse i el con. Malgrat tot, encara que Eutoci es refereixi realment als tres tipus de seccions del con en la seva descripció, ho podria haver fet a títol d'incorporació personal usant els coneixements que ell tenia però que no tenia Menecm. A favor d'aquesta interpretació tenim que utilitza els termes “hipèrbola” i “paràbola”,³⁵ quan és quasi bé segur que aquests noms per a designar les còniques no apareixen de manera sistemàtica més que amb Apol·loni, —encara que el de paràbola ja es troba a Arquimedes [III aC]—, bastant més tard que a l'època de Menecm.

Conseqüentment, la qüestió del descobriment de les còniques resta oberta a possibilitats diverses, per exemple:

- (a) Menecm hagués pogut descobrir les dues corbes còniques com a corbes descrites a partir del seu *symptōma*, la qual cosa en permetria una construcció punt a punt per mètodes plans. Posteriorment ell mateix o algun altre investigador, moguts per l'interès de presentar les línies com a interseccions de superfícies, hagués pogut concebre'n alguna com a secció d'un con. Llavors, hagués pogut aparèixer l'interès en l'estudi de totes les seccions possibles.
- (b) Les seccions d'un con haguessin pogut ser estudiades amb independència del problema de les dues rectes, prèviament o no, en relació als problemes de l'òptica i les representacions artístiques, de l'astronomia, o de les ombres en

³⁴Vegeu KNORR [1986], 61-66 de l'edició de 1993. Per a la interpretació estàndard vegeu HEATH [1921], volum I 251-255, volum II 110-116 de l'edició de 1981, i BOYER [1968], 132-135.

³⁵El seu significat es pot relacionar amb el del terme “el·lipse”. Ho veurem una mica més endavant.

rellotges de Sol.³⁶ Llavors, les propietats dels seus punts s'haguessin pogut estudiar directament sobre el con. Un cop descobertes aquestes propietats s'obriria el camí a dues interpretacions més:

- Les propietats s'haguessin pogut utilitzar per descobrir la manera de generar les còniques punt a punt, i la resolució del problema de les dues rectes n'hagués sigut un subproducte.
- O bé, el descobriment de les seccions com a corbes construïdes punt a punt per mètodes plans, hagués pogut ser previ o independent a l'estudi sobre el con. La motivació hagués pogut provenir del problema de les dues rectes o algun de similar. Llavors s'hagués comprovat la coincidència d'aquests dos tipus de corbes.

El que és clar és que les dues concepcions, la de generació punt a punt o plana, i la de seccions del con o sòlida, van conviure en la recerca i les presentacions, des d'algun moment abans d'Euclides fins a molts segles després. Per exemple:

- Apol·loni, a les seves *Còniques*, utilitzà el con —la via sòlida— per a la seva presentació de les seccions, però l'estudi de les seves propietats les feu per mètodes plans.
- A partir dels lemes de Pappos per a l'estudi de les *Còniques* i els *Porismes* d'Euclides,³⁷ ambdues desaparegudes, s'especula amb la possibilitat d'una recerca, per part d'aquest últim autor i d'Aristeu el Vell —el seu predecessor en aquest estudi—, de les propietats d'aquestes corbes directament sobre el con, amb mètodes que podrien avançar en forma primitiva el mètode projectiu de Desargues en el segle XVII.³⁸
- El mateix Desargues conjuga el mètode projectiu amb els mètodes plans en el seu estudi de les còniques.³⁹

Per il·lustrar-ho breument pensem que el mètode projectiu guarda relació amb la concepció de l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola, com a seccions d'un con, i es basa, en una primera aproximació, en la invariància d'algunes propietats geomètriques a través de les projeccions. Per exemple, per un punt P exterior a una el·lipse sempre es pot traçar una tangent, perquè:

- 1) La mateixa propietat és vàlida per a les circumferències, com es demostra amb mètodes plans.
- 2) Existeix algun con que conté l'el·lipse i una circumferència. Així, si l'el·lipse es troba sobre el pla π_1 , la circumferència sobre el pla π_2 , i el punt O

³⁶Vegeu les notes 5 i 6 de la pàgina 279.

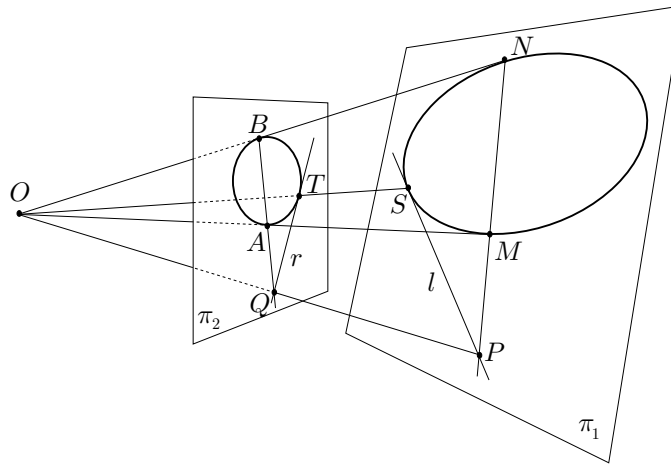
³⁷Per a una reconstrucció d'aquesta última obra vegeu CHASLES [1860].

³⁸Vegeu KNORR [1986], 132-137 de l'edició de 1993.

³⁹Vegeu DESARGUES [1639].

—exterior als dos plans— és el vèrtex del con que les conté, les dues corbes resulten de la projecció d'un pla sobre l'altre des del punt O .

- 3) Llavors la recta OP talla el pla π_2 en Q des del qual es pot traçar la tangent r a la circumferència. En mantenir-se els contactes entre línies en la projecció, des de O , de π_2 sobre π_1 , la recta l de π_1 , —projectada de r —, passarà per P i serà tangent a l'el·lipse.



Per il·lustrar els límits del domini de propietats que es poden estudiar amb aquest mètode observem que sobre la circumferència, es compleix —vegeu la figura superior—

$$\frac{QA}{QT} = \frac{QT}{QB}.$$

Però no és cert que a l'el·lipse es compleixi en general,

$$\frac{PM}{PS} = \frac{PS}{PN},$$

perquè les raons entre magnituds no es conserven per projecció.

6.4.1 Anàlisi de Menecm. Construcció punt a punt de les seccions còniques

Partint de l'anàlisi de Menecm, aprofundirem en les tècniques implicades en les possibilitats presentades sobre l'origen de les seccions còniques.

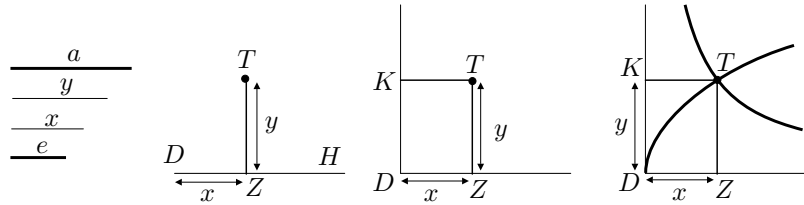
Eutoci, en la seva exposició de la solució de Menecm, considera dos segments y i x , mitjanes proporcionals entre dos segments a i e donats. És a dir, x i y compleixen

$$\frac{a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{e}.$$

Suposa x i y construïts. Construeix un punt Z sobre una recta DH de manera que $DZ = x$, i sobre Z aixeca una perpendicular $ZT = y$. Llavors,

$$\frac{a}{y} = \frac{y}{x} \implies a \cdot DZ = a \cdot x = y^2 = ZT^2. \quad (6.10)$$

Per tant, conclou que T es troba sobre una paràbola.



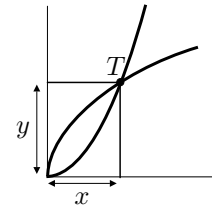
Després construeix el rectangle $DZTK$. Llavors,

$$\frac{a}{y} = \frac{x}{e} \implies a \cdot e = x \cdot y = KT \cdot ZT.$$

Per tant, conclou que T pertany a una hipèrbola descrita sobre les asímptotes KD i DZ .

En aquest punt l'anàlisi s'ha acabat perquè per a Eutoci les dues corbes se sabien construir.⁴⁰ La síntesi, en què es demostra que la intersecció T de les dues línies determina els segments solució $ZT = y$ i $DZ = x$, és immediata.

A continuació, i d'una manera semblant que no presentem, fa l'anàlisi i la síntesi corresponents a la demostració que el punt T es troba sobre la paràbola anterior i la paràbola determinada per la condició $x^2 = e \cdot y$.



Recordem que un cop construïdes les dues mitjanes el problema de la duplicació del cub queda resolt. Efectivament, si c és el costat del cub inicial, només cal considerar $a = 2c$ i $e = c$, llavors

$$\frac{2c}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{c} \implies x^3 = x^2 \cdot x = c \cdot y \cdot x = c \cdot 2c \cdot c = 2c^3.$$

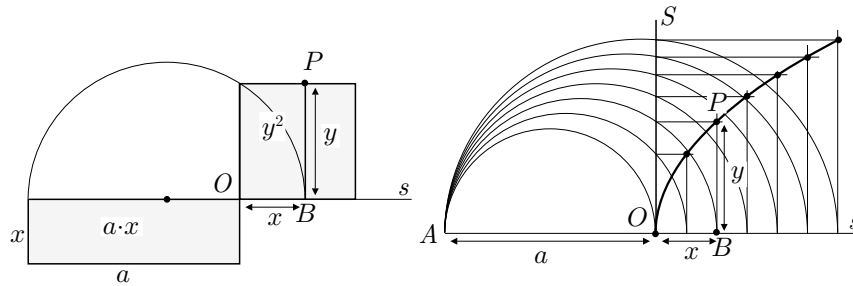
És a dir, el cub de volum $2c^3$ té el seu costat igual al segment x determinat pel punt T d'intersecció de les corbes.

Ara bé, el que no trobem enlloc és de quina manera construïa Menecm les tres corbes. Com ja hem dit una de les possibilitats, consistiria en idear una

⁴⁰Eutoci no diu mai que Menecm sabés que aquestes corbes es podien concebre com a seccions del con.

construcció punt a punt per mètodes plans, no suggerits de cap consideració sòlida. Això era força factible a partir dels resultats obtinguts pels mètodes de comparació i aplicació d'àrees.

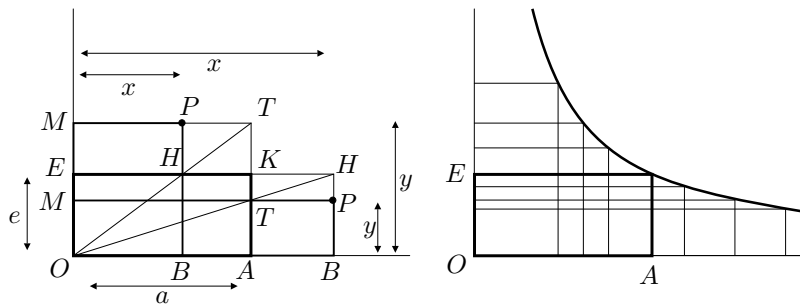
- Construcció de la paràbola $a \cdot x = y^2$: Donat el segment a , per a cada valor del segment $x = OB$ cal construir un segment $y = BP$ perpendicular a OB , tal que el quadrat sobre y tingui la mateixa àrea que el rectangle de costats a i x . Això s'aconsegueix a partir de la construcció que Euclides presenta a II.14 de la manera que podem observar a la figura adjunta:



- El segment $x = OB$ se situa amb un extrem O fixat a l'extrem d'una semirecta s , i l'altre extrem variable sobre aquesta.
- El segment $y = BP$ se situa perpendicularment a x pel punt B .
- La construcció punt a punt de la paràbola proporciona el conjunt de punts P que resulten d'aplicar els passos anteriors un nombre indeterminat de vegades.

La construcció per a $x^2 = e \cdot y$ es faria igual, considerant e en el lloc de a , sobre un eix vertical.

- Construcció de la hipèrbola $a \cdot e = x \cdot y$: Donats el segments a i e , per a cada valor del segment $x = OB$ cal construir un segment $y = BP$ perpendicular a OB , tal que el rectangle de costats x i y tingui la mateixa àrea que el rectangle de costats a i e . Això s'aconsegueix seguint les observacions següents:

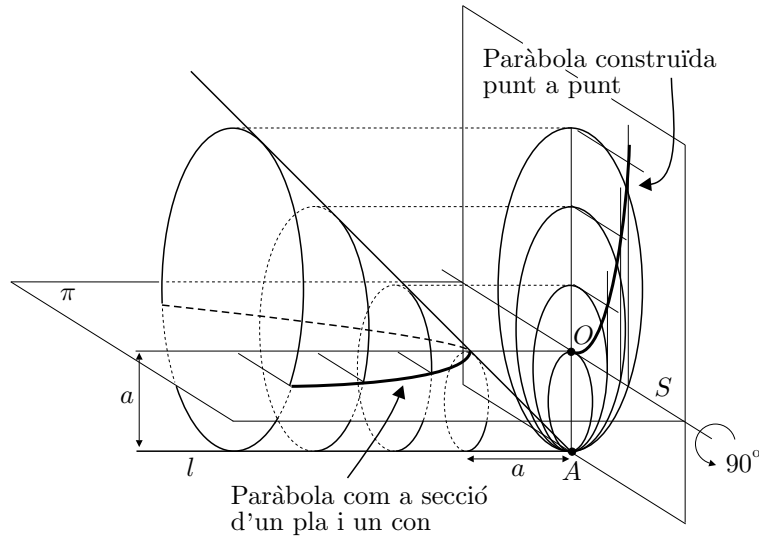


- Situem sobre una semirecta d'origen O el rectangle $OAKE$ de costats $OA = a$ i $OE = e$, i el segment $x = OB > OA$.
- Construïm el rectangle $OBHE$ i tracem la diagonal OH , la qual talla la recta AK en el punt T .
- Tracem, pel punt T , la paral·lela MP a OA .
- Si observem el gnòmon $OBPTKE$ és immediat comprovar que el rectangle $OBPM$ té la mateixa àrea que el $OAKE$ i, per tant, $BP = y$.
- Si $OB < OA$, el segment $y = BP$ es construeix d'una manera similar amb la diferència que el gnòmon considerat és el $OAKHPM$.

6.4.2 De la construcció per punts a la concepció com a seccions del con

Al principi de la secció comentàvem l'interès en la concepció de les corbes com a interseccions de superfícies. La imatge proporcionada per la generació punt a punt de la paràbola a partir d'una família de circumferències auxiliars, permet conjecturar una possible via de la seva concepció com a intersecció du pla i un con, en l'intent de donar una visió alternativa a la d'aglomerat de punts.⁴¹ Amb aquesta finalitat podem imaginar la família de circumferències de la construcció punt a punt, com la projecció d'una altra família disposada en plans paral·lels. Els punts corresponents a l'extrem comú A dels diàmetres, se situen sobre una recta l perpendicular al pla d'aquestes. La distància entre dos d'aquests plans l'agafem igual a la diferència dels diàmetres de les circumferències que contenen. Llavors, si girem 90° la paràbola construïda per punts, respecte la recta OS , i la desplaçem una distància a , cadascun dels seus punts pertany a una de les circumferències paral·leles.

⁴¹Vegeu KNORR [1986], 112-113 de l'edició de 1993. A PLA [1998] trobem una presentació de la paràbola com a lloc sòlid d'aquest tipus.



Finalment s'observa que:

- Les circumferències determinen un con oblic, del qual són les seccions perpendiculars a la generatriu l que es troben a distància del vèrtex A major o igual que a .
- La paràbola és la intersecció d'aquest con amb un pla π , paral·lel a la generatriu l , a distància a d'aquesta i perpendicular al pla inicial.

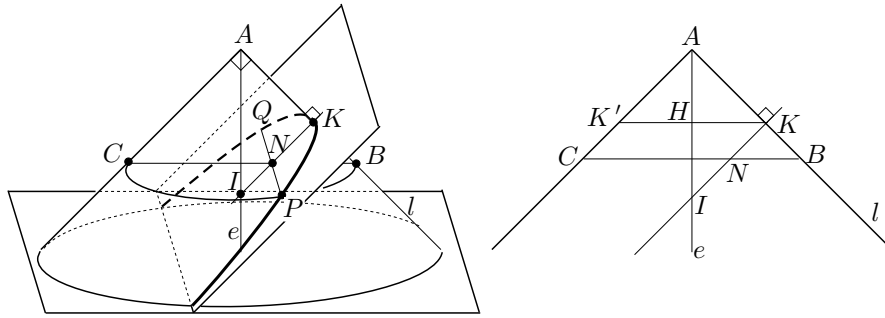
6.4.3 Recerca, sobre el con, del *symptōma* de les còniques

Una altra de les opcions del descobriment de les còniques la relacionàvem amb l'estudi de les seccions del con. Les interpretacions estàndard atribueixen al mateix Menecm el descobriment d'aquestes corbes en les recerques sobre el con. Abans d'Apol·loni les seccions es presentaven amb els noms de “secció d'un con rectangle” per a la paràbola, “secció d'un con acutangle” per a l'el·lipse, i “secció d'un con obtusangle” per a la hipèrbola. Aquests noms s'entenen si es té en compte que els plans de secció es consideraven perpendiculars a la generatriu d'un con circular recte, tal que l'angle de dues generatrius compreses en un pla per l'eix fos, respectivament, recte, agut o obtús. El motiu de no considerar les diferents seccions en un mateix con no és clar. Tampoc se sap que els primers estudis es fessin en els tres tipus de cons per separat. Més aviat aquesta presentació no unitària, podria obeir a d'altres motius; per exemple, s'ha dit que un d'ells seria el d'excloure la circumferència d'entre les seccions còniques.⁴² Presentarem un tipus de raonament sobre el con, per esbrinar la

⁴²Està clar que les seccions esmentades mai produeixen circumferències, sobre cons circulars rectes.

propietat característica dels punts d'una secció d'un con rectangle, i deixarem per a l'activitat 6.5.1 la proposta de fer el mateix per als altres dos tipus de seccions.⁴³

Siguin el con rectangle de vèrtex A , i el pla de secció perpendicular a la generatriu l . Sigui la secció KPQ , en què K pertany a la generatriu l . Sigui I el punt del pla de secció que pertany a l'eix e del con. Volem trobar una propietat característica dels punts P de la secció, relacionant els segments variables PN i KN perpendiculars, en què N pertany a la recta KI . Llavors:



Secció del con rectangle

- El punt P pertany a una secció circular del con, i el punt N pertany al diàmetre BC d'aquesta que toca la generatriu l en el punt B . Per tant,

$$PN^2 = BN \cdot NC. \quad (6.11)$$

- Considerem el segment KK' paral·lel a BC , amb K' sobre el con, i sigui H la intersecció de KK' amb l'eix e del con. Es compleix que els triangles BKN i IHK són semblants, i s'obté

$$CN = KK' = 2KH \quad \text{i} \quad \frac{BN}{KN} = \frac{KI}{HK}. \quad (6.12)$$

- De les igualtats (6.11) i (6.12) s'obté,

$$\begin{aligned} PN^2 &= BN \cdot NC = BN \cdot 2KH = \frac{2KH}{KH} KI \cdot KN = \\ &= 2KI \cdot KN = 2KA \cdot KN. \end{aligned}$$

⁴³BOYER [1968], 133 de l'edició de 1986, i HEATH [1921], 110-116 de l'edició de 1981, presenten dues formes alternatives de portar el raonament. Les dues es basen, també, en la teoria de la proporció; el primer ho fa a terme amb la paràbola, mentre que el segon ho fa, a més, amb la hipèrbola. Els dos autors segueixen la interpretació estàndard sobre l'origen de les còniques i conjecturen que Menecm hagués pogut actuar d'una manera semblant.

Conclusió: Per a qualsevol punt P de la secció, si N és la seva projecció perpendicular sobre la recta en el pla de la paràbola que passa pels punts K i I , es compleix

$$PN^2 = 2KI \cdot KN. \quad (6.13)$$

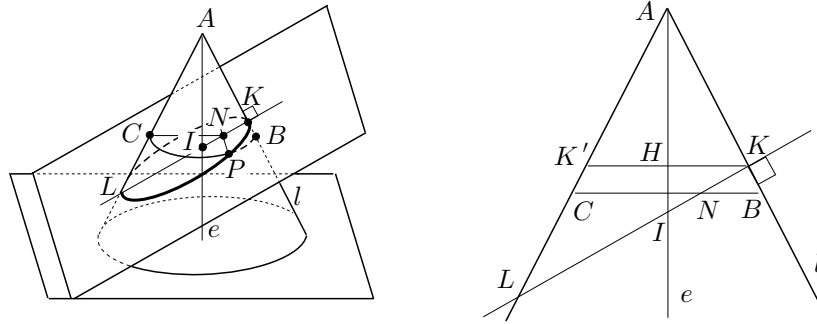
D'aquesta manera hem obtingut la propietat d'una de les corbes del problema de les dues rectes, concretament la presentada a l'equació (6.10).

Per a les seccions del con acutangle i obtusangle es poden fer estudis semblants. Amb la notació dels gràfics adjunts i utilitzant les semblances de triangles⁴⁴

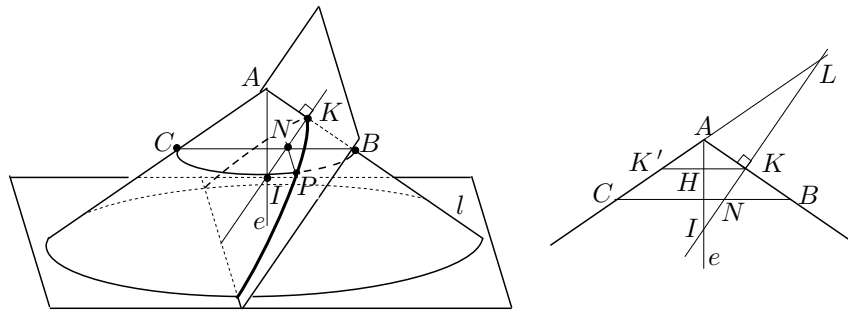
$$KBN \sim HIK \quad LNC \sim LKK',$$

s'obté, que per a tot punt P d'aquestes seccions, es compleix

$$PN^2 = \frac{2KI}{KL} KN \cdot LN. \quad (6.14)$$



Secció del con acutangle



Secció del con obtusangle

L'expressió (6.14) determina la posició de P en funció de dos segments variables, KN i LN . La transformarem de manera que només depengui de KN ,

⁴⁴Vegeu l'activitat 6.5.1.

així obtindrem una representació diferent per a cadascuna de les tres seccions còniques. Per aconseguir-ho cal tenir en compte que

$$\begin{aligned} LN &= KL - KN, && \text{per a la secció del con acutangle.} \\ LN &= KL + KN, && \text{per a la secció del con obtusangle.} \end{aligned}$$

Llavors, si substituïm a (6.14), obtenim:

P pertany a la	<i>symptōma</i>
Secció del con rectangle	$PN^2 = p_1 \cdot KN$
Secció del con acutangle	$PN^2 = p_2 \cdot KN - \frac{p_2}{KL} KN \cdot KN$
Secció del con obtusangle	$PN^2 = p_3 \cdot KN + \frac{p_3}{KL} KN \cdot KN,$

(6.15)

en què $p_i = 2KI$. Una interpretació geomètrica en el llenguatge d'aplicació d'àrees, de les equacions (6.15), ens porta a l'origen dels noms que Apol·loni adoptà per a les tres seccions, dels quals Procle fa la menció següent:⁴⁵

Eudem i la seva escola ens diuen que aquestes coses, —l'aplicació [juxtaposició] (*παραβολή* —“parabolé”—) d'àrees, el seu excés (*υπερβολή* —“hiperbolé”—) i el seu defecte (*ελλειψις* —“el·leipsis”—), són antics descobriments de la musa pitagòrica. D'aquests procediments els geomètres posteriors van agafar els termes i els van aplicar a les anomenades línies còniques, denominant una d'elles paràbola, l'altra hipèrbola, i la tercera el·lipse, encara que aquells homes divins de l'antiguitat posaven el significat d'aquests termes en la descripció de les àrees planes sobre un segment.

Efectivament, la lectura geomètrica plana d'aquestes equacions es pot fer en els següents termes:

- Els punts P de la secció de la paràbola resulten de la coincidència (*parabolé*) d'àrees entre el quadrat PN^2 i el rectangle $p_1 \cdot KN$. Dit en d'altres paraules, l'àrea del quadrat PN^2 ha de ser igual al “rectangle aplicat” sobre p_1 , de costat KN . Llavors, si aixequem PN perpendicular a KN —sempre en un mateix pla—, P recorre la paràbola.
- Els punts P de l'el·lipse resulten de la coincidència d'àrees entre el quadrat PN^2 i el rectangle $p_2 \cdot KN$, amb defecte (*el·leipsis*) del rectangle $\frac{p_2}{KL} KN \cdot$

⁴⁵Vegeu MORROW [1970], 332.

KN . És a dir, el quadrat PN^2 és igual al “rectangle aplicat” sobre p_2 , de costat KN , “amb defecte” d’un rectangle de costat KN , semblant al rectangle $p_2 \cdot KL$. Si aixequem PN igual que en el cas anterior, P recorre l’el·lipse.

- Els punts P de la hipèrbola resulten de la coincidència d’àrees entre el quadrat PN^2 i el rectangle $p_3 \cdot KN$, amb excés (*hiperbolé*) del rectangle $\frac{p_3}{KL} KN \cdot KN$. És a dir, el quadrat PN^2 és igual al “rectangle aplicat” sobre p_3 , de costat KN , “amb excés” d’un rectangle de costat KN , semblant al rectangle $p_3 \cdot KL$. Llavors, si actuem com en els altres casos, P recorre la hipèrbola.

Els segments p_i constituïen el *paràmetre* —“igual mesura”— de les còniques. Aquest nom venia del cas de la paràbola, en què el rectangle aplicat tenia la mateixa àrea que el quadrat. Apol·loni representava els paràmetres, perpendiculars al pla en què es feia la representació de la cònica, i els donava el nom de “costat aixecat”, que es convertí en *latus rectum* o “costat recte” en el Renaixement. El segment KL rebia el nom de “costat transversal” o *latus transversum*. Els segments PN eren les línies traçades ordenadament —*ordenades*— sobre el costat transversal. Els segments AN eren els segments interceptats o tallats —actualment *abscisses*⁴⁶— per les ordenades sobre el costat transversal.

De tot el que hem dit, es conclou que es poden representar les seccions còniques per punts, utilitzant mètodes plans, amb les dades inicials següents:

Paràbola: Un segment p_1 que faci de paràmetre, i una semirecta.

El·lipse: El paràmetre p_2 i el costat transversal KL .

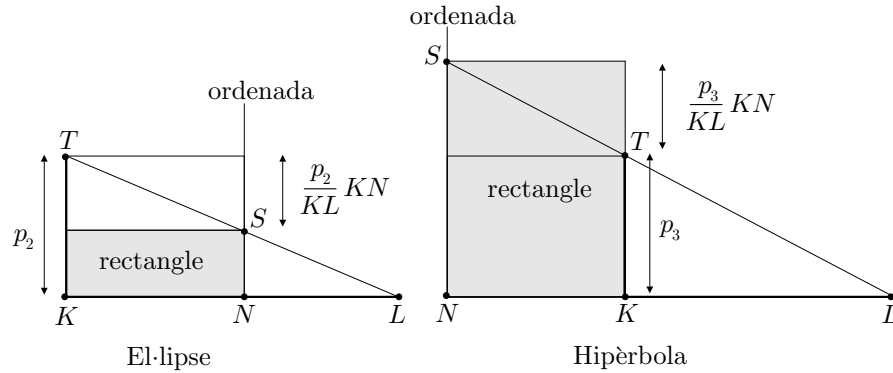
Hipèrbola: El paràmetre p_3 i el costat transversal KL .

Per dur a terme la construcció, primerament cal traçar per a cada línia ordenada el rectangle aplicat sobre p_i . El costat KN queda ben determinat per la ordenada, en què N és interior al costat transversal KL en el cas de l’el·lipse, i exterior en el cas de la hipèrbola. En el cas de la paràbola, N pertany a la semirecta. L’altre costat del rectangle és per a la:

- Paràbola: El paràmetre p_2 donat.
- El·lipse: El segment $p_2 - \frac{p_2}{KL} KN$. Per a la seva construcció cal restar de p_2 , la quarta proporcional dels segments KL , p_2 i KN . Si $p_2 = KT$ és perpendicular a KL , podem assolir l’objectiu tallant el segment LT amb la perpendicular a KL per N . Si S és el punt resultant tenim

$$NS = p_2 - \frac{p_2}{KL} KN.$$

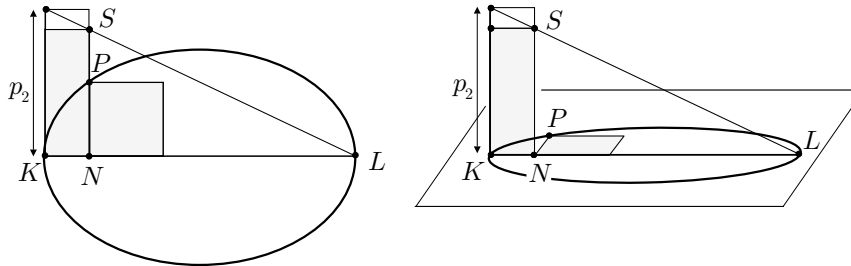
⁴⁶Del llatí *abscidere*, tallar.



- Hipèrbola: El segment $p_3 + \frac{p_3}{KL} KN$. O sigui que cal sumar a p_3 , la quarta proporcional dels segments KL , p_3 i KN . Si $p_3 = KT$ és perpendicular a KL , considerem la intersecció S de la prolongació de LT amb la perpendicular a KL per N . Llavors,

$$NS = p_3 + \frac{p_3}{KL} KN.$$

Un cop construït el rectangle cal construir el quadrat d'igual àrea que el rectangle aplicat sobre p_i . Un dels seus costats ha d'estar sobre el costat transversal KL amb extrem a N . Llavors l'extrem P del costat PN perpendicular a KL determina el lloc geomètric de P . En els gràfics adjunts representem el resultat final en el cas de l'el·lipse. A l'esquerra es mostra tota la construcció sobre el mateix pla, i al dreta se situa el paràmetre p_i en el pla perpendicular al pla de la cònica, a la manera d'Apol·loni.



Activitats 6.5

1. Demostreu la propietat (6.14) dels punts P de les seccions del con acutangle i obtusangle, utilitzant els triangles semblants allí esmentats. B
2. Representeu amb el CABRI les tres seccions còniques, en tres fitxers diferents, d'acord amb les equacions (6.15), i de manera que es puguin variar els paràmetre p_i i el costat transversal. S

□

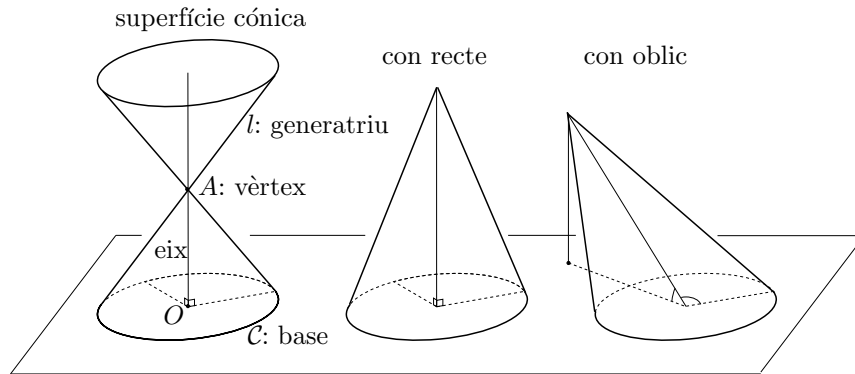
6.5 Introducció al tractament de les còniques per Apol·loni

A finals del segle III aC, Apol·loni composà els vuit llibres de les *Còniques*, dels quals els quatre primers contenen resultats coneguts d'altres autors anteriors com Aristeu i Euclides. Una de les novetats de la presentació és la d'utilitzar un sol con no necessàriament recte per definir les seccions com a interseccions amb plans de diferents inclinacions. Presentem algunes definicions i teoremes del primer llibre que donaran una idea de la marxa i estil d'aquesta obra. Alguns d'aquests seran utilitzats per el tractament del traçat de tangents amb el programa CABRI.

Primeres definicions

1) Una *superfície cònica* és la superfície descrita per una recta l —*descriptora* o *generatriu*—, la qual passa per un punt fix A i recorre una circumferència \mathcal{C} . El punt A és exterior al pla de \mathcal{C} i s'anomena *vèrtex* de la superfície, i la recta que passa per A i pel centre O de \mathcal{C} s'anomena *eix*.

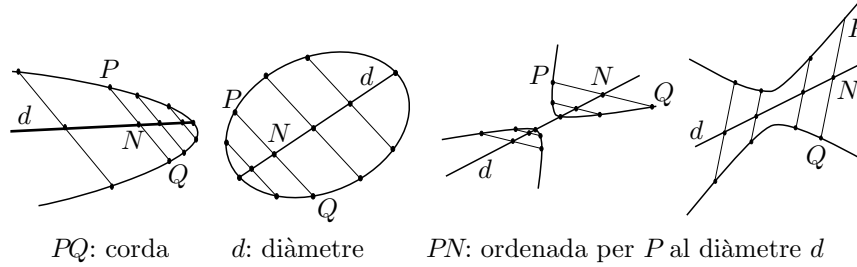
2) Aquesta superfície es compon de dues superfícies, oposades pel vèrtex, i cadascuna d'elles s'anomena *con*. La circumferència \mathcal{C} és la *base* d'un dels cons.



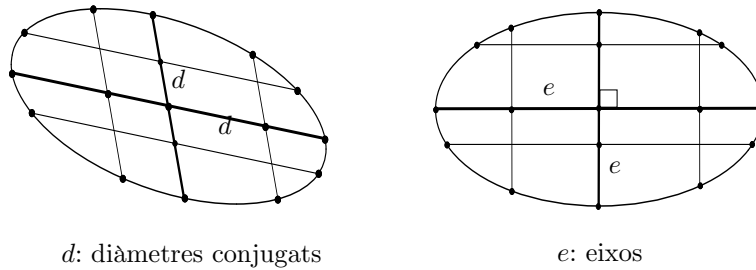
3) Si l'eix AO és perpendicular al pla de la base \mathcal{C} , el con és *recte*, i en el cas contrari és *oblic*.

4) Si anomenem *corda* el segment PQ d'extrems sobre una o dues corbes,⁴⁷ s'anomena *diàmetre* d d'una o dues corbes situades en un pla, la recta que parteix les cordes PQ d'una mateixa direcció pel seu punt mitjà N . El punt de tall del diàmetre i la corba s'anomena *vèrtex*. Els segments partits PN i QN , reben el nom d'*ordenades* traçades respectivament per P i Q al diàmetre.

⁴⁷Cada branca de la hipèrbola és per a Apol·loni una hipèrbola. Així quan tracta d'una paràbola, d'una el·lipse o d'una branca d'hipèrbola, utilitza el terme "una corba"; mentre que quan es refereix a les dues branques d'una hipèrbola ho fa amb el terme "dues corbes".



5) Dos diàmetres són *conjugats* si cadascun d'ells parteix en dues parts iguals les cordes paral·leles a l'altre.



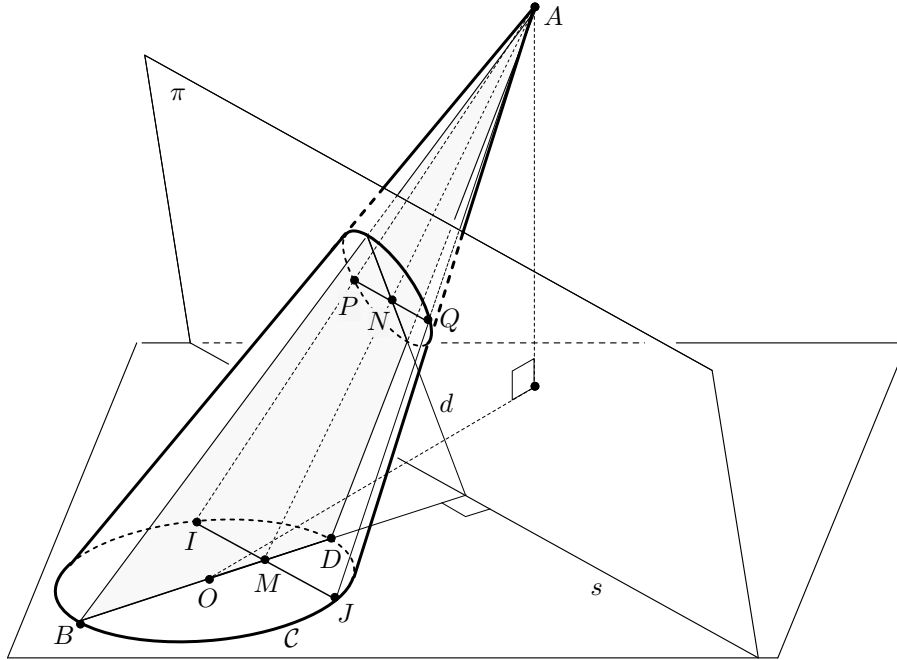
6) Un *eix* e d'una o dues corbes és el diàmetre que forma un angle recte amb les seves ordenades.

Sobre les definicions de les còniques i la recerca d'un diàmetre

1) Un element important de la seva exposició és el *triangle segons l'eix* ABD , el qual està determinat per la secció del con amb un pla que conté l'eix i un diàmetre del cercle base \mathcal{C} .

2) En el teorema I.7 demostra l'existència d'un diàmetre d'una secció del con per un pla π . Per trobar-lo considera:

- La recta s d'intersecció entre el pla π i el pla de la base \mathcal{C} .
- El triangle ABD segons l'eix determinat pel diàmetre de \mathcal{C} perpendicular a la recta s .



Llavors, el diàmetre d trobat per Apol·loni és la recta intersecció del pla π amb aquest triangle per l'eix. Aquest diàmetre parteix en dues parts iguals totes les cordes PQ paral·leles a la recta s , les quals determinen les ordenades de cada punt.⁴⁸

Efectivament, siguin

- Una corda qualsevol PQ , de la secció, paral·lela a la recta s .
- El punt I d'intersecció de la recta AP amb la base C .
- El punt J d'intersecció de la recta AQ amb la base C .

Llavors, IJ és paral·lela a s . Perquè si no ho fos, tallaria s en un punt que pertanyeria a la intersecció del pla AIJ amb el pla π , és a dir a la recta PQ ; però això no pot ser, perquè PQ i s són paral·leles. Per tant, IJ és perpendicular al diàmetre BD . Això implica $IM = MJ$, en què M és la intersecció de BD amb IJ . Ara bé, si considerem la intersecció N de PQ i d , els punts A , N i M estan alineats. Consegüentment,

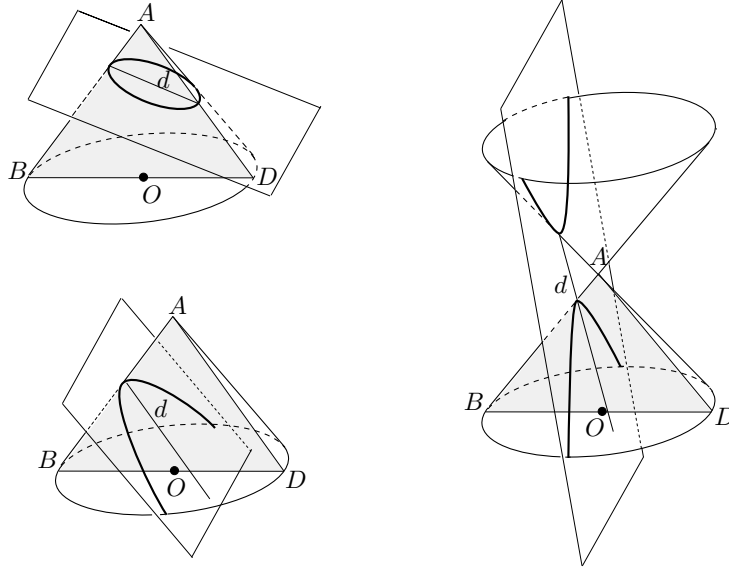
$$APN \sim AIM \quad \text{i} \quad AQN \sim AJM \implies \frac{PN}{IM} = \frac{AN}{AM} = \frac{QN}{JM}.$$

Per tant, finalment, $PN = QN$.

⁴⁸Notem que aquest diàmetre no és, en general, un eix. Per tant les ordenades PN no són perpendiculars, en general, al diàmetre d . Això només passaria quan el triangle segons l'eix fos perpendicular a la base C del con. Vegeu la discussió sobre un fragment de Chasles relatiu a aquest tema a la pàgina 321.

3) En els teoremes I.11 a I.13 defineix les tres seccions còniques corbes, diferents d'una circumferència, resultants d'un sol con. És a dir la paràbola, una branca d'hipèrbola i l'el·lipse. El teorema I.14 introdueix les dues branques de la hipèrbola, a partir dels dos cons oposats pel vèrtex.

En els tres primers teoremes utilitza seccions arbitràries del con, per un pla π , i el triangle segons l'eix ABD determinat, —com en el teorema I.7—, pel diàmetre BD de la base perpendicular a la recta s , intersecció de π i el pla de la base. Llavors, cadascuna de les seccions queda definida segons la posició relativa del triangle segons l'eix i el diàmetre de la secció trobat a I.7:



- La secció serà una *paràbola*, si el diàmetre d és paral·lel a un costat del triangle segons l'eix ABD , i talla l'altre costat.⁴⁹
- La secció serà una *hipèrbola* (una branca), si el diàmetre d talla un dels costats del triangle segons l'eix ABD , i la prolongació de l'altre més enllà del vèrtex A .
- La secció serà una *el·lipse*, si el diàmetre d talla el triangle segons l'eix ABD en els dos costats.

El teorema I.14 demostra que si es tallen, amb el mateix pla, els dos cons oposats pel vèrtex, s'obtenen dues hipèrboles (les dues branques d'una hipèrbola), amb el mateix diàmetre i el mateix *symptomā* per als punts de les dues corbes.

⁴⁹Aquí i a les altres dues definicions, es refereix als costats del triangle segons l'eix ABD , diferents del costat BD contingut en el cercle C base.

4) En els teoremes I.11-I.14, també proporciona el *symptōma* de cadascuna de les seccions a a partir del diàmetre trobat a I.7, i un paràmetre p_i per a cada corba. Així si P és un punt de la secció, PN la seva ordenada respecte el diàmetre, R un vèrtex de la secció, i S l'altre vèrtex en el cas de la hipèrbola i l'el·lipse, es compleix una condició com la donada en el quadre d'equacions (6.15):

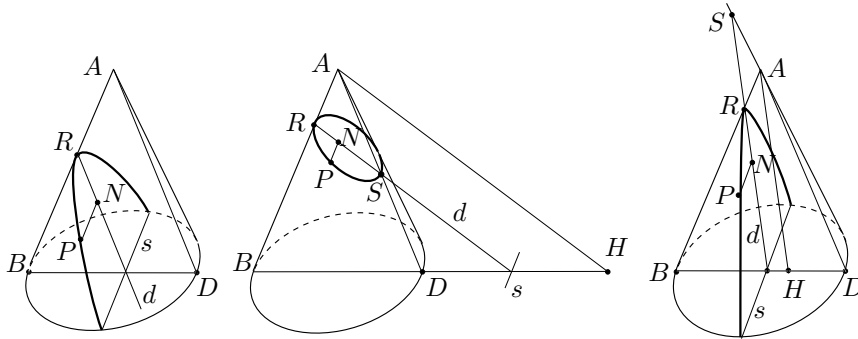
P pertany a la	<i>symptōma</i>
Paràbola	$PN^2 = p_1 \cdot RN$
El·lipse	$PN^2 = p_2 \cdot RN - \frac{p_2}{RS} RN \cdot RN$
Hipèrbola	$PN^2 = p_3 \cdot RN + \frac{p_3}{RS} RN \cdot RN,$

(6.16)

en què p_i és un segment (paràmetre o *latus rectum*) que depèn del con i del pla de la secció. Concretament, si ABD és el triangle segons l'eix emprat a I.7:

$$\frac{p_1}{RA} = \frac{BD^2}{AB \cdot AD}, \quad \frac{RS}{p_2} = \frac{HA^2}{HB \cdot HD}, \quad \frac{RS}{p_3} = \frac{HA^2}{HB \cdot HD}, \quad (6.17)$$

en què H és la intersecció de la recta BD amb la paral·lela, pel punt A , al diàmetre RS .⁵⁰



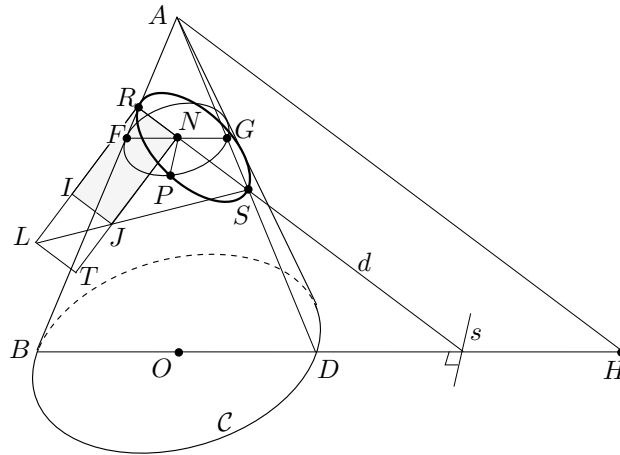
Resumirem la demostració d'Apol·loni per al cas de l'el·lipse en què considera:

- El segment $RL = p_2$ situat perpendicularment al pla de la secció, del qual recordem que compleix la segona condició de les igualtats (6.17).
- El punt J d'intersecció de SL amb la paral·lela NT a RL .

⁵⁰Un cop trobat el *symptōma* de les seccions enfronta tots els teoremes amb mètodes plans, oblidant-se del con. Això no significa que forçosament en el procés de recerca no s'hagin utilitzat mètodes que impliquin la consideració de sòlids o projeccions a l'espai. Recordem el comentari fet a la pàgina 309 i, més concretament la referència bibliogràfica de la nota 41 d'aquella pàgina.

- El diàmetre FG de la secció circular paral·lela a la base \mathcal{C} , que conté el punt N , de manera que F i G estan sobre els costats del triangle segons l'eix ABD .
- Les parelles de triangles semblants,

$$HAB \sim NRF \quad \text{i} \quad HAD \sim NSG.$$



Llavors, en ser

$$PN^2 = FN \cdot GN, \quad \frac{HA}{HB} = \frac{RN}{FN} \quad \text{i} \quad \frac{HA}{HD} = \frac{SN}{GN},$$

es compleix,

$$\frac{RS}{RL} = \frac{RS}{p_2} = \frac{HA^2}{HB \cdot HD} = \frac{RN \cdot SN}{FN \cdot GN} = \frac{RN \cdot SN}{PN^2}.$$

Consegüentment,

$$PN^2 = \frac{p_2 \cdot SN}{RS} RN = \frac{p_2 \cdot (RS - RN)}{RS} RN = p_2 \cdot RN - \frac{p_2}{RS} RN \cdot RN.$$

□

Construcció per mètodes plans i comentari de Chasles

El geòmetra i historiador francès Michel Chasles (1793-1880) fa una bonica i breu introducció a l'obra d'Apol·loni, la qual presenta dues cares. Una d'excel·lent perquè ens introdueix de manera senzilla i entenedora a la novetat que representa la presentació d'Apol·loni sobre cons oblics, i per la seva explicació sobre

«la propietat única de les seccions còniques en què quasi bé reposa el tractat».⁵¹ L'altra cara de la moneda pot conduir a una confusió, perquè diu que el triangle segons l'eix és perpendicular a la base del con. Això fa que s'interpreti que Apol·loni no considera totes les seccions possibles d'un con per un pla. Només consideraria aquelles en què la projecció del vèrtex, sobre el pla de la base, cau sobre el diàmetre de la base, perpendicular a la recta d'intersecció del pla de la cònica amb el pla de la base. Això condueix Chasles a afirmar que per traçar una cònica és suficient el “diàmetre” i el paràmetre. Això només és correcte si s'interpreta el diàmetre com l'eix de la corba. Però aquest no és el cas, perquè en el desenvolupament d'Apol·loni el diàmetre no té perquè ser, en general, l'eix. És a dir que del tractament d'Apol·loni es pot treure la construcció de Chasles, —que no és altra que la mostrada al final de la secció 6.4.3 a partir de la pàgina 314—, però també es pot treure una construcció a partir del paràmetre, un diàmetre i la direcció de les seves ordenades. De fet els teoremes I.49 i I.50 estableixen que qualsevol diàmetre serveix per referenciar el *symptōma* dels punts de les seccions. És a dir que, per a qualsevol diàmetre de vèrtex R i, en el cas de la hipèrbola i l'el·lipse, segon vèrtex S , es poden trobar uns paràmetres p_i adequats de manera que les ordenades PN dels punts P de la cònica respecte del diàmetre RS compleixen les igualtats (6.16).

En definitiva es podrà construir una cònica per mètodes plans a partir de les dades següents:⁵²

- Paràbola:** Un segment p_1 que faci de paràmetre, una semirecta que farà de diàmetre i una direcció per a les ordenades.
- El·lipse i hipèrbola :** Un segment p que faci de paràmetre. un segment per al diàmetre i una direcció per a les ordenades. D'aquí surt una altra construcció a partir de dos diàmetres conjugats donats en extensió i posició.⁵³

Diàmetres conjugats i tangents

1) A I.15 i I.16 demostra, entre d'altres coses, l'existència del diàmetre conjugat al diàmetre trobat a I.7 per a l'el·lipse i la hipèrbola. Concretament, si RS és el diàmetre construït a I.7, el seu diàmetre conjugat passa pel punt mitjà de RS i és paral·lel a les ordenades traçades respecte RS .

2) El teorema I.17 estableix que la paral·lela, pel vèrtex d'una secció cònica, a les ordenades, és tangent a la secció. El teorema I.32 en demostra la unicitat.

⁵¹Vegeu CHASLES [1837], 17-20 de l'edició de 1989, i un fragment d'aquestes pàgines a la secció 8.2.1.

⁵²Vegeu l'activitat 6.6.2.

⁵³Vegeu l'activitat 6.6.3.

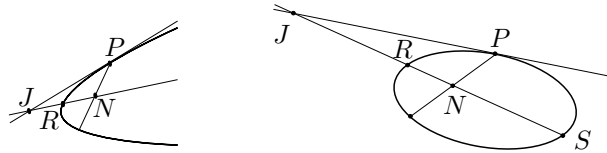
3) En els teoremes I.33 i I.35 es construeix una tangent a una paràbola, per un punt qualsevol d'aquesta, i se'n demostra la unicitat. Els teoremes I.34 i I.36 fan el mateix per a les altres seccions còniques. En traducció totalment lliure l'existència queda fixada així:

I.33: Si des d'un punt P d'una paràbola es traça l'ordenada PN sobre el diàmetre de vèrtex R , i es considera el punt $J \neq N$ sobre el diàmetre tal que $JR = RN$, llavors la recta PJ és tangent a la paràbola.

I.34: Si des d'un punt P d'una el·lipse o una hipèrbola es traça l'ordenada PN sobre el diàmetre RS , i es considera el punt $J \neq N$ sobre RS tal que

$$\frac{JR}{JS} = \frac{NR}{NS},$$

llavors la recta PJ és tangent a la corba.



4) En el teorema I.46 demostra que totes les paral·leles r al diàmetre d d'una paràbola són diàmetres. Les ordenades PN respecte de r són paral·leles a la tangent pel punt en què r talla la corba. En el teorema I.47 demostra que totes les rectes r pel centre C d'una el·lipse, i les rectes r pel centre C d'una branca d'hipèrbola que la tallen, són diàmetres. Les ordenades PN respecte de r són paral·leles a la tangent pels punts T en què r talla la corba. A la proposició I.48, ho generalitza a les dues branques de la hipèrbola.

De I.47 i I.48 es desprèn que qualsevol tangent a una el·lipse o a una hipèrbola és paral·lela al diàmetre conjugat del diàmetre pel punt de contacte.

5) Hem dit anteriorment que I.49 i I.50 estableixen que es podia triar qualsevol diàmetre per referenciar el *symptōma* dels punts de les seccions. El teorema I.51 és l'extensió d'aquesta propietat, exposada a I.50 per a una el·lipse i una branca d'una hipèrbola, a les dues branques de la hipèrbola. Al final de I.51 apunta que:

Totes aquestes coses demostrades, és clar que en la paràbola les paral·leles a l'eix són diàmetres, mentre que en la hipèrbola, l'el·lipse i les seccions oposades ho són les rectes que passen pel centre; a la paràbola, els quadrats de les paral·leles a les tangents sobre els diàmetres respectivament equivalen a rectangles aplicats a una mateixa recta; però aquests quadrats equivalen a àrees àrees aplicades a una recta i augmentades en una figura a la hipèrbola i en les seccions oposades, i disminuïdes en aquesta figura a l'el·lipse. Finalment, és clar que totes les coses demostrades per

a les seccions referides als diàmetres principals [els diàmetres trobats a I.7] també són certes si s'adopten d'altres diàmetres.

Una traducció al nostre llenguatge algebraic del *symptōma* dels punts de la cònica, mostra la importància del paper que juga qualsevol parella de diàmetres conjugats en el cas de l'el·lipse i la hipèrbola, i un diàmetre i la tangent pel seu vèrtex en el cas de la paràbola, de cara a proporcionar una bona referència per obtenir l'equació reduïda d'una cònica.⁵⁴

6) Finalment, a partir del teorema I.52, demostra que totes les còniques tenen un eix, i que aquestes es poden obtenir com la intersecció d'un con recte sobre el pla de la cònica.

Activitats 6.6

- \overline{P} 1. Dissenyeu una presentació, amb el CABRI, de les tres corbes còniques com a seccions del con.
- \overline{S}
- \overline{B} 2. Representeu amb el CABRI les tres seccions còniques, en tres fitxers diferents, d'acord amb les equacions (6.16), i de manera que es puguin variar els paràmetre p_i , el diàmetre i la direcció de les ordenades. Elaboreu una macro de cadascuna de les tres construccions amb aquests tres objectes inicials.
- \overline{S}
3. Donats dos diàmetres conjugats d'una el·lipse, coneguts en extensió i posició:
- i) Elaboreu un procediment per construir el paràmetre.
- \overline{S} ii) Construïu una macro amb el CABRI tal que a partir dels dos diàmetres, i utilitzant el paràmetre trobat, torni l'el·lipse.
4. Tradueix a llenguatge algebraic el *symptōma* de cadascuna de les còniques, utilitzant les referències següents per obtenir les equacions reduïdes:
- \overline{S}
- Per a la paràbola, un diàmetre qualsevol com a eix d'abscisses i , com a eix d'ordenades, la recta tangent pel vèrtex que aquest diàmetre determina.
 - Per a les altres dues seccions, dos diàmetres conjugats.
5. Es tracta d'idear un procediment de construcció de la tangent en un punt P d'una el·lipse o d'una hipèrbola construïda. Aquest serà útil quan treballem amb el programa CABRI, perquè aquest proporciona còniques construïdes.
- i) Construïu la tangent de dues maneres: Utilitzeu, primerament, el teorema I.34 i, després, el teorema I.47.

S **ii)** *Elaboreu una macro amb el CABRI que donada una el·lipse o una hipèrbola i un punt d'ella, construeixi la tangent per aquest punt.*

6. *Elaboreu una macro amb el CABRI que, a partir del resultat del teorema I.33, proporcioni la tangent a una paràbola donada per un punt donat d'aquesta.* S

7. *Suposem que tenim una cònica construïda.*

i) *Feu una anàlisi que us permeti elaborar un procediment per construir els seus eixos, en cadascun dels tres casos.*

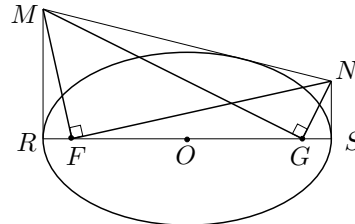
ii) *Elaboreu dues macros que si es considera, en un cas, una el·lipse o una hipèrbola com a elements inicials i, en un altre cas, una paràbola, construeixi els seus eixos.* S

8. *La primera vegada que apareixen els focus de l'el·lipse i de la hipèrbola a l'obra d'Apol·loni, és a la proposició III.45, encara que mai els anomena d'aquesta manera. Allí diu que si es determinen dos punts F i G , sobre l'eix RS tals que*

$$RG \cdot GS = SF \cdot FR = \frac{1}{4} p \cdot RS, \quad (6.18)$$

—en què p és el paràmetre corresponent al diàmetre RS —, i si es consideren RM i SN perpendiculars a l'eix, i MN tangent a l'el·lipse, llavors es compleix

$$\widehat{MFN} = \widehat{NGM} = \frac{\pi}{2}.$$



Més endavant demostra,

- III.51: *La diferència de distàncies des d'un punt qualsevol P de la hipèrbola a F i G és igual a l'eix.*
- III.52: *La suma de distàncies des d'un punt qualsevol P de la hipèrbola a F i G és igual a l'eix.*

Treballarem sobre aquests teoremes, en què acceptarem sense demostració que F i G , quan existeixen, equidisten del centre O .⁵⁵

i) *Elaboreu un procediment per determinar els focus F i G de l'el·lipse, a partir de III.52, sobre l'eix major.*

⁵⁴Vegeu l'activitat 6.6.4.

⁵⁵Aquest resultat es pot demostrar a partir del resultat del teorema III.45, si considerem el cas en què la tangent MN és paral·lela a l'eix.

ii) Elaboreu una macro amb el CABRI que, donats els eixos d'una el·lipse en extensió, els situï en posició juntament amb els focus.

iii) Elaboreu una macro que donada una el·lipse construeixi els focus.

S iv) Dibuixeu una el·lipse amb la macro `Ellipso.MAC` creada a l'activitat 6.6.2, prenent la direcció de les ordenades perpendicular al diàmetre. Construïu els seus focus amb la macro de l'apartat anterior, i comproveu que es compleixen la hipòtesi i la tesi del teorema III.45 amb les eines de mesura del CABRI.

9. Sobre l'el·lipse, els seus focus i una propietat de les tangents.

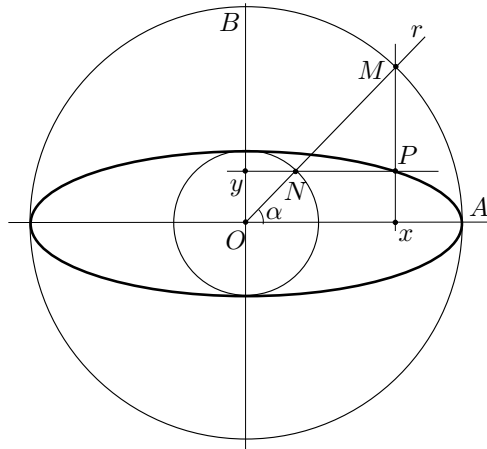
i) Feu una anàlisi que permeti elaborar un procediment i una macro per construir una el·lipse coneguts l'eix major RS i el seu focus F i G . Tingueu present el resultat del teorema III.52 i considereu la circumferència (F, RS) .

ii) Demostreu que per a qualsevol punt P de l'el·lipse la bisectriu exterior de \widehat{FPG} és tangent a l'el·lipse.

iii) Feu una visualització amb el CABRI del moviment d'un punt que es desplaça en línia recta per l'interior d'una el·lipse, i que estigui sotmès a la llei de reflexió. És a dir, rebota contra el perímetre de l'el·lipse complint que l'angle d'incidència de la trajectòria amb la recta normal, és igual a l'angle entre aquesta i la trajectòria reflectida. Què passa si un segment de la trajectòria poligonal resultant passa per un focus?

S

10. Observeu la figura adjunta en què:



- Les rectes OA i OB són perpendiculars.
- Les circumferències són concèntriques en O , de radis $OA = a$ i $OB = b$, ($a > b$).
- La recta r , per O , talla les circumferències en els punts M i N .

- El punt P és la intersecció de les paral·leles per N a OA , i per M a OB .

Recordeu, de l'activitat 6.6.4 que una equació del tipus

$$\frac{x^2}{OA^2} + \frac{y^2}{OB^2} = 1,$$

caracteritzava els punts d'una el·lipse. Aquesta era referenciada respecte dels eixos conjugats per que contenen OA i OB , en què el paràmetre era $p = \frac{2OB^2}{OA}$.

i) Demostreu que el lloc geomètric dels punts P quan fem girar la recta r , amb el punt fix O , té en la referència d'origen O i eixos les rectes que contenen OA i OB , l'equació

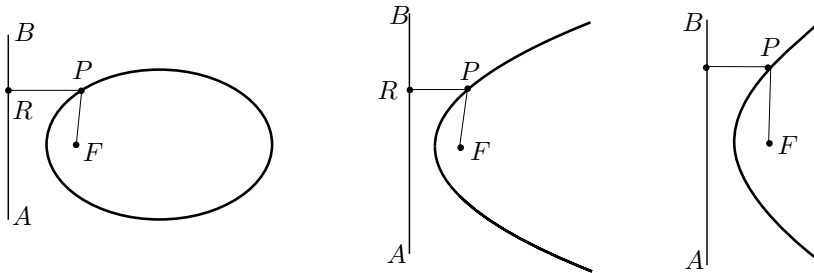
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

És a dir, que P descriu una el·lipse de diàmetres conjugats les rectes per OA i OB , els quals, en ser perpendiculars, són els seus eixos. S

ii) Visualitzeu la construcció en un fitxer CABRI.

11. Pappos presenta en el llibre VII de la Col·lecció Matemàtica les propietats focus-directriu de les còniques.⁵⁶ Concretament a la proposició 238 hi llegim: P

Sigui la recta AB de posició donada; sigui un punt F donat en el mateix pla; tracem la recta PF i la perpendicular PR [a la recta AB], i que la raó [constant donada $\frac{a}{b}$] sigui la de la recta PF a la recta PR . Dic que el punt P està lligat a una secció del con, i que aquesta és un paràbola quan la raó és la d'extensió igual a extensió igual, una el·lipse quan és d'extensió més petita a més gran, i una hipèrbola quan és d'extensió més gran a més petita.



És a dir el lloc geomètric dels punts P és una paràbola, una el·lipse o una hipèrbola segons $\frac{PF}{PR} = 1$, o $\frac{PF}{PR} < 1$, o $\frac{PF}{PR} > 1$.

⁵⁶Vegeu a EECHE [1933], les proposicions 236-238 a les pàgines 793-802 de l'edició de 1982.

No se sap qui fou el descobridor d'aquestes propietats. No es troben a les Còniques d'Apol·loni. El cas de la paràbola es troba a l'obra Sobre miralls ardents de Diocles, la qual composà en una època propera a la d'Apol·loni encara que hi ha divergències sobre la data. El fet que aquestes propietats apareguin com a lemes a l'obra desapareguda d'Euclides, Sobre llocs en superfícies, permet d'establir la conjectura que aquest les coneixia.

i) Trieu una referència que tingui l'origen O sobre la recta r , pel focus F , perpendicular a la directriu AB . Considereu aquesta recta r com a eix d'abscisses, i la seva perpendicular per O com a eix d'ordenades. Trebal·leu amb el llenguatge algebraic que proporciona aquesta referència, sobre les propietats focus-directriu de les còniques. Feu una elecció de l'origen O que us permeti associar les equacions següents als tres casos exposats:

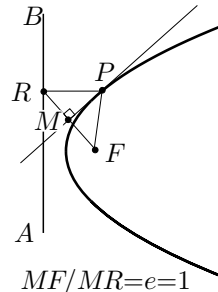
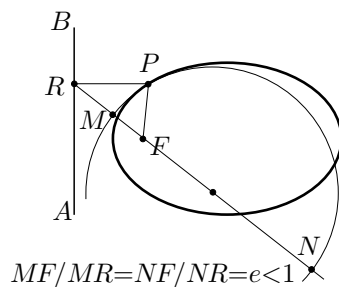
$$y^2 = px, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Trobeu els valors del paràmetre de cada cònica, així com el de l'eix principal $2a$ en els casos de la el·lipse i de la hipèrbola, en funció de $d = d(F, AB)$ i de la constant $e = \frac{PF}{PR}$, en què P és qualsevol punt de la cònica i R la seva projecció perpendicular sobre la directriu AB .

S

ii) Feu una representació amb el CABRI de les tres còniques mitjançant la propietat focus-directriu, de manera que el valor de e es determini per dos segments variables i d es pugui variar. Tingueu en compte que:

- Per a la paràbola, $e = 1$ implica que els seus punts P queden determinats per la intersecció de la recta que conté PR amb la mediatriu de FR .
- Per a l'el·lipse i la hipèrbola, $e \neq 1$ implica que els seus punts P queden determinats per la intersecció de la recta que conté PR amb la circumferència d'Apol·loni dels punts F i R per a la raó e .



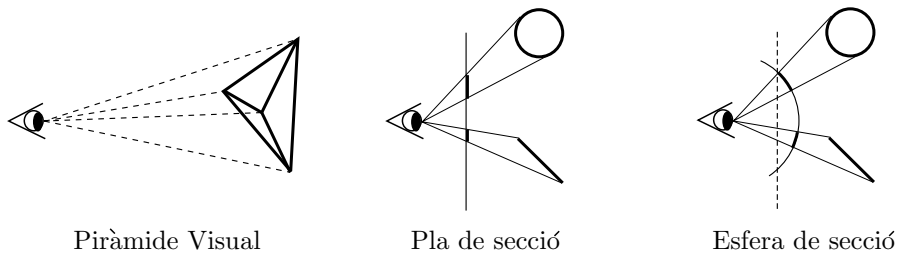
□

Capítol 7

La perspectiva lineal i els orígens de la Geometria projectiva.

7.1 Orígens. Alberti i la *costruzione legitima*

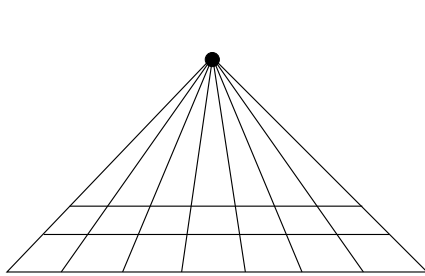
Els artistes del Renaixement es van interessar profundament en el problema de representar l'espai sobre una superfície plana, de manera que la imatge plana dels objectes representats coincidís amb la que proporciona la seva visió directa. La disciplina que tracta aquest problema rep el nom de *perspectiva lineal* o *cònica*. Aquesta es basa en una simplificació bastant forta del fenòmen de la visió, la qual dóna resultats força acceptables: assumeix, com a punt de partida, que els òrgans de la visió estan reduïts a un sol ull que ha esdevingut immòbil. Tanmateix cal no confondre aquesta forma de perspectiva —anomenada *artificialis* pels artistes italians del Renaixement—, amb la *perspectiva naturalis* hereva de l'òptica grega. Les dues disciplines comparteixen el concepte de *con* o *piràmide visual* —el qual apareix a l'*Òptica* d'Euclides [ca. 300 aC]¹—, en què es considera que la percepció visual es produeix a partir d'un con o piràmide amb vèrtex l'ull de l'observador i base l'objecte observat.



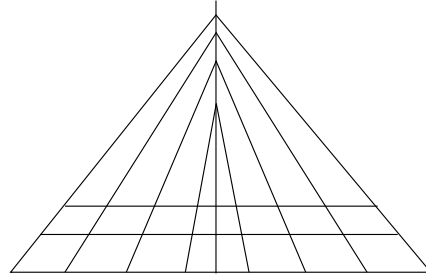
¹Vegeu les definicions 1 i 2 de EUCLIDES [ca.300 aC b], 135.

En la perspectiva artificial es representen seccions planes de la piràmide visual. En la perspectiva natural, es representen seccions esfèriques d'aquesta piràmide, la qual cosa comporta discordances quan es volen fer representacions planes.

La lectura i observació d'escrits i pintures del període grec i medieval fa pensar que no es feia perspectiva lineal abans del Renaixement. Un dels trets característics del mode de fer lineal, que consisteix en què totes les línies perpendiculars al pla del quadre es representen convergents cap a un únic punt central —punt de fuga—, no es dona abans d'aquest període. El que es troba a l'intermedi entre el període grec i el Renaixement són pintures en què aquestes línies convergeixen, per parelles, sobre una recta central; així apareix la configuració que Panofsky anomena “espina de peix”, la qual proposa que està lligada amb la representació en perspectiva natural.²



Punt de fuga



Espina de peix

Activitats 7.1

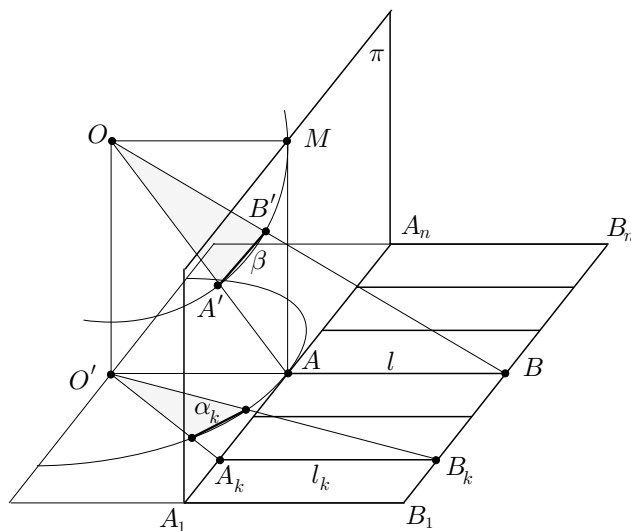
- 1.** En el llibre I cap. 2 del *De Architectura*, Vitruvi [I aC] explica en què consisteix l'Arquitectura. Allí diu que es compon d'ordre, disposició, euritmia o proporció, i distribució. Quan tracta de la disposició dóna una definició de perspectiva (*Scenographia*), que és interpretada per Panofsky de la forma que exposarem després de la transcripció del text de Vitruvi:

La disposició és l'arranjament convenient de totes les parts, de manera que, col·locades segons la qualitat de cada una, formin un conjunt elegant. Les espècies de disposició, anomenades en grec “idees”, són el traçat en planta, en alçat, i en perspectiva (*Ichnographia*, *Orthographia* i *Scenographia*). La planta (*Ichnografia*) és un dibuix en petit, fet a escala determinada amb compàs i regla, que ha de servir després per al traçat de la planta sobre el terreny que ocuparà l'edifici. L'alçat (*Orthographia*) és una representació en petit i un dibuix lleugerament acolorit de la façana

²Per a estudis sobre les relacions entre els dos tipus de perspectiva i l'evolució d'una a l'altra vegeu BROWNSON [1991], FLOCON-TATON [1984], KNORR [1991], LAURENT [1987], PANOFSKY [1975] i PEDOE [1976]. Vegeu també l'activitat 7.1.1, en què es tracta la proposta de Panofsky.

i de la seva figura per elevació, amb les corresponents mesures, de l'obra futura. La perspectiva (*Scenographia*) és el dibuix ombrejat no només de la façana, sinó de les parts laterals de l'edifici pel concurs de totes les línies visuals en un punt.³

Panofsky defensa una lectura de la *Scenographia* en què el punt de concurs —circini centrum o “centre de compàs”—, no és el punt de fuga modern situat en el quadre allí on es dirigeixen les representacions de totes les perpendiculars al quadre de representació. Segons ell, el circini centrum té el sentit de centre de projecció situat a l'ull de l'observador, el qual és el centre d'un cercle que secciona la piràmide visual; això, segueix, lliga per un cantó amb l'òptica grega i per un altre amb la configuració d'aresta de peix que apareix en moltes obres d'art, des del període grec fins el Renaixement. Llavors, proposa una sofisticada i poc explícita construcció per justificar aquest lligam entre la configuració esmentada i la perspectiva basada en l'angle de visió.⁴ A continuació proposem una versió d'aquesta construcció.

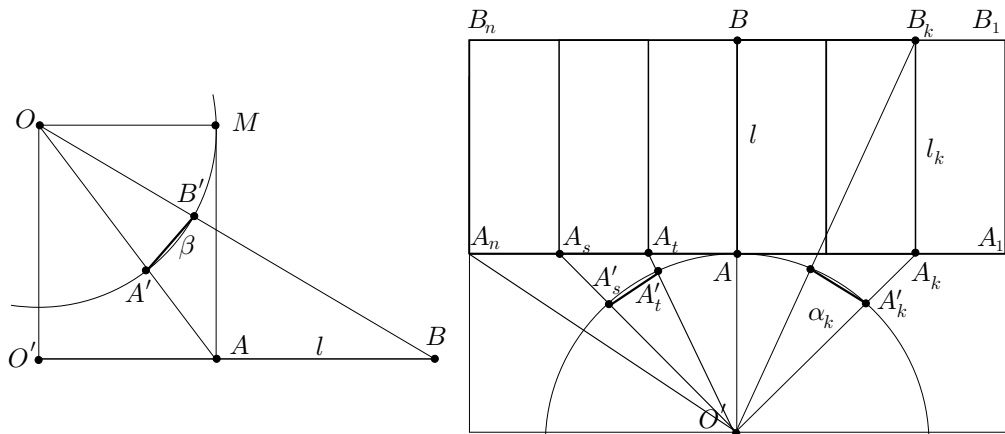


Imaginem que volem representar en un quadre vertical π , l'enrajolat A_1B_n del terra horitzontal. Siguin O l'ull de l'observador, O' la seva projecció perpendicular sobre el terra de l'enrajolat, i M la seva projecció perpendicular sobre el quadre π . Sigui $l = AB$ un segment contingut en la recta perpendicular a π pel punt O' , tal que la seva longitud és la dels $l_k = A_k B_k$. Les línies A_1A_n i B_1B_n són representades rectes sobre el quadre. Les representacions A'_s dels punts

³Original: *Scenographia est frontis et laterum abscedentium adumbratio ad circiniquae omnium linearum responsus*. Vegeu VITRUVI [I aC], 13 de l'edició de 1997.

⁴Qualsevol construcció de la perspectiva basada en l'angle de visió presentarà discordances, en no tenir l'esfera un desenvolupament pla.

A_s del terra es determinen a partir de les cordes interceptades sobre la circumferència $(O', O'A)$ per la piràmide visual, des de O' , de base $A_s A_{s+1}$. Llavors, cada línia l_k del terra, perpendicular al quadre, vindrà representada mitjançant la composició de dues components, una de vertical — $\text{corda}(\beta)$ —, i una altra d'horitzontal — $\text{corda}(\alpha_k)$ —, construïdes tal com s'explica a continuació:



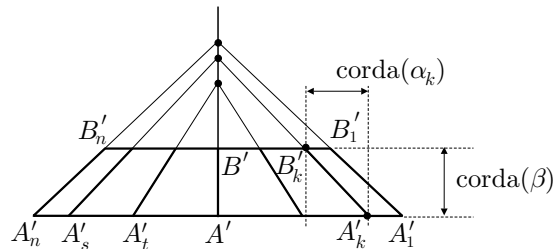
Component Vertical: $A'B' = \text{corda}(\beta)$

Component Horitzontal: $\text{corda}(\alpha_k)$

Component vertical: Considerem la piràmide visual des de O fins AB , i fem la secció amb la circumferència de centre O que passa per M . La corda $A'B'$, de l'angle β determinat ens dóna la component vertical de la representació, és a dir, la distància entre la representació $A'_1 A'_n$ de la línia del terra $A_1 A_n$ i la representació $B'_1 B'_n$ de la paral·lela $B_1 B_n$.

Component horitzontal: Projectem el punt O perpendicularment sobre el terra, en resulta O' . Les components horitzontals de la representació dels segments $l_k = A_k B_k$, seran, segons Panofsky, les cordes dels angles de visió α_k determinats per la circumferència $O'A$ i la piràmide visual des de O' .

Portarem el segment $A_k B_k$ al quadre, composant ortogonalment els dos segments $\text{corda}(\alpha_k)$ i $\text{corda}(\beta)$ a partir de A'_k , de manera que en resulten els segments $A'_k B'_k$ com es veu en el gràfic adjunt.



S Reproduïu en un fitxer CABRI, tota la construcció anterior per a un mosaic de vuit rajoles posades en una única fila, de manera que es visualitzi la configuració d'espina de peix.

□

7.1.1 La finestra o vel d'Alberti

El Renaixement italià reprèn la idea de la piràmide visual, i deixa de relacionar-la amb la descripció de la perspectiva depenent de l'angle de visió. Adopta definitivament la concepció de la representació sobre un pla —*quadre de la pintura*—, mitjançant la intersecció d'aquest pla amb aquesta piràmide o con visual. Així, a partir d'aquesta època, en desaparèixer el recurs a l'angle de visió sobre l'esfera, la perspectiva es basa en consideracions de tipus purament lineal i es lliga definitivament a la geometria de les rectes. No és estrany que aquest problema reclami molt aviat el tractament que és propi dels problemes matemàtics: la recerca de demostracions dels mètodes que allí s'utilitzen, i l'elaboració de teories que el relacionin amb problemes matemàtics de caràcter més general.⁵

El primer text conegut on es troba descrit el tipus de representació en perspectiva lineal és el *De Pictura*,⁶ escrit en llatí l'any 1435 per l'artista florentí Leon Battista Alberti [1404–1472]. Ell mateix el traduí a l'italià —*Trattato della Pittura*— l'any següent amb una dedicatòria a l'arquitecte Filippo Brunelleschi [1377–1446] pare del mètode que Alberti exposa en el llibre I del seu tractat.

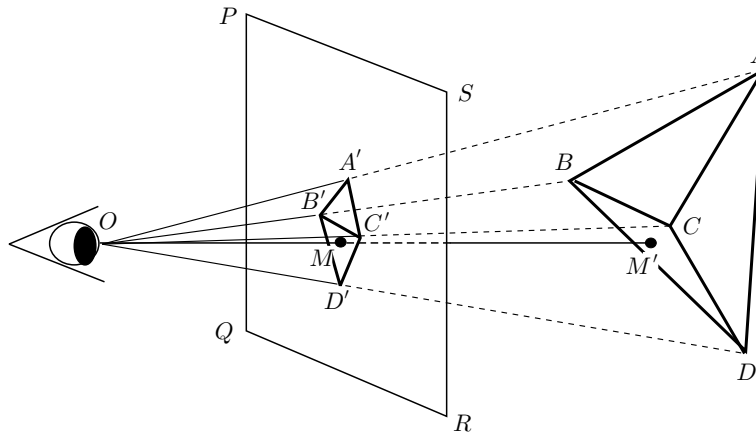
En aquest text, ALBERTI descriu el model matemàtic de la representació perspectiva, basat en la definició del *quadre de la pintura* com a intersecció de la piràmide visual amb una superfície plana:

Que sàpiguen [els pintors] que quan tracen línies sobre una superfície i van cobrint de color el dibuix que han fet, l'efecte que busquen és que en una sola superfície se'n representin moltes d'altres, com si aquesta superfície fos de vidre o d'una altra cosa transparent, perquè hi puguin penetrar la piràmide visual i s'hi puguin veure els cossos a distància determinada i fixa, amb posició segura del raig central i amb llum permanent.⁷

⁵Un estudi atractiu, amb moltes referències i il·lustracions, que recorre aquest camí des dels orígens fins el final del segle XVII és FIELD [1997].

⁶Vegeu ALBERTI [1435] i ALBERTI [1784].

⁷El raig central és per a Alberti la perpendicular a la superfície on es fa el dibuix.



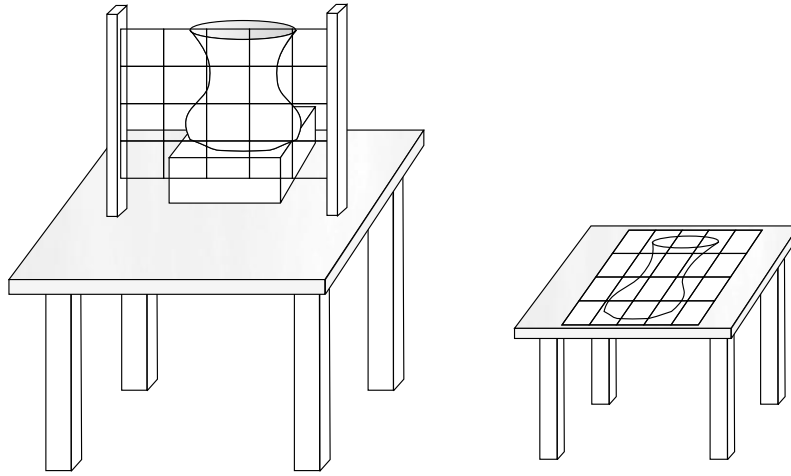
- O : ull de l'observador — $OABCD$: piràmide visual
 $PQRS$: vidre, quadre de la pintura — OMM' : raig central
 OM : distància determinada i fixa — $A'B'C'D'$: representació plana

Més endavant tornem a trobar la seva forma d'entendre la representació perspectiva utilitzant uns altres termes. Presenta el quadre de la pintura com «una finestra oberta per la qual veig la història que vull pintar».⁸ En el llibre II insisteix en la idea implícita en aquestes descripcions:⁹

Agafem un tros de tela transparent, anomenada comunament *vel*, de qualsevol color que sigui. Estirada en un bastidor la dividim amb fils en quadrets petits i iguals a discreció. Posem-la després entre la vista i l'objecte que s'ha de copiar, perquè la piràmide visual penetri la transparència del vel [...]. Amb el vel s'assenyalaran totes les parts del dibuix amb total exactitud, perquè veient que en un quadret està el front, en el de sota el nas [...] es pot amb tota facilitat traslladar-les al quadre o paret posant allí igual divisió de quadrets.

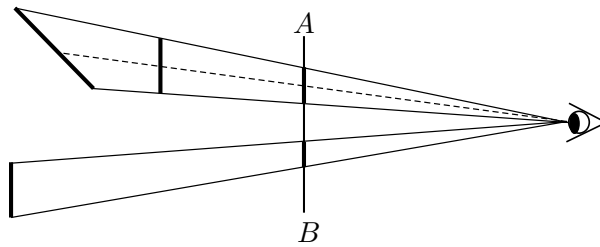
⁸En el llibre 2 trobem el que Alberti entén quan parla de la *història*. Ens diu que «la història és el treball més gran del pintor [...] Les primeres parts d'una obra són les superfícies perquè d'elles són fetes els membres, de membres els cossos i de cossos la història». Més tard afirma que «Cal que en una història tots els cossos estiguin en consonància en la grandària i la funció [...] La història que podràs lloar i admirar serà aquella que es mostrarà agradable i ornada d'atractius que li permetran de retenir llargament els ulls d'un espectador savi o ignorant per una mena de plaer i de moviment de l'ànima»

⁹Albrecht Dürer [1471–1528] presenta, en el primer llibre de la seva obra, *Instruccions per a la mesura amb regla i compàs de les línies, plans i cossos sòlids, reunides per Albrecht Dürer i impreses amb les figures corresponents per a l'ús de tots els amants de l'art a l'any MDXXV*, PEIFFER [1995], 351–353, uns esplèndids gravats que il·lustren la concepció d'Alberti.



En el llibre I Alberti discuteix, també, les alteracions que pateixen les proporcions de les superfícies representades en el quadre. Concretament, les alteracions:

- De proporcions internes i externes de segments quan varia la seva distància al quadre, en els casos que siguin paral·lels o no ho siguin.
- En les proporcions quan varia la seva orientació varia fins coincidir amb un raig visual.
- D'un segment que es desplaça paral·lelament, tal que conserva la distància al quadre AB , i és paral·lel a un raig visual.

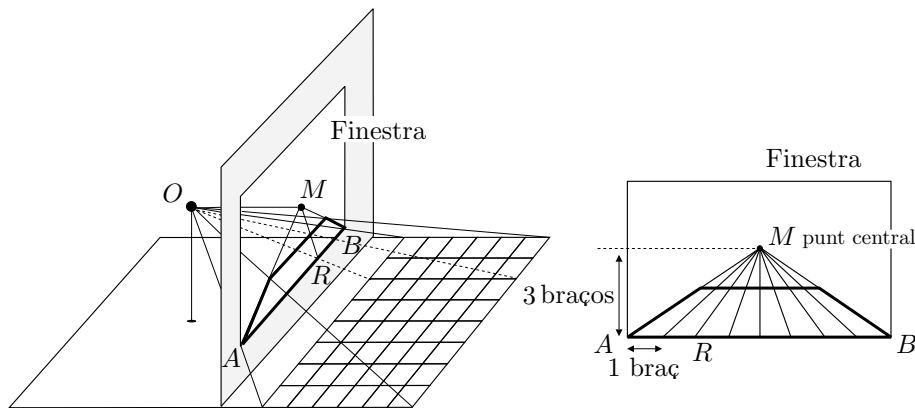


7.1.2 *Costruzione legittima*

Immediatament després de donar la imatge del quadre de la pintura com una finestra oberta, proporciona una versió abreujada del mètode, que els historiadors anomenen *costruzione legittima*¹⁰, per representar un enrajolat o quadrícula del terra de línies paral·leles i perpendiculars al quadre:

¹⁰No hi ha acord en l'ús d'aquest terme, però s'atribueix la invenció a Brunelleschi, i les primeres difusions escrites justificades geomètricament a Piero della Francesca [ca. 1412-1492].

En primer lloc traço, sobre la superfície a pintar, un quadrilàter de la grandària que vull fet d'angles rectes, el qual és per a mi com una finestra oberta per la qual es pot veure la història, i allí determino la grandària que vull donar als homes a la meua pintura. Divideixo l'alçada d'aquest home en tres parts i aquestes parts són per a mi proporcionals a aquella mesura que anomenem vulgarment *braç*¹¹. Perquè, com es veu clarament per la simetria dels membres de l'home, la longitud més comuna del cos d'un home és de tres braços. Amb l'ajut d'aquesta mesura divideixo la línia base del rectangle que he traçat en tantes parts com la contingui, i aquesta línia de base és per a mi proporcional a la més pròxima quantitat transversal sobre el terra i que li és paral·lela. Tot seguit assenyalo un punt en un lloc ben visible dins del rectangle. Com que aquest punt ocupa per a mi el mateix lloc cap on es dirigeix el raig central, l'anomeno *punt central*.¹² Aquest punt és convenientment situat a l'altura que tindran els homes que s'hi volen pintar. D'aquesta manera aquells que miren i els objectes pintats semblaran trobar-se en un mateix pla. Un cop situat aquest punt central traço línies rectes des d'aquest punt a cadascuna de les divisions de la línia base; aquestes línies em mostren com les quantitats transversals successives canvien d'aspecte quasi fins a una distància infinita.¹³



Les línies rectes que van del punt central M a cadascuna de les divisions de la línia base AB són, per a Alberti, les representacions de les línies de la quadrícula perpendiculars al quadre o finestra. Les quantitats transversals que “canvien d'aspecte” són les representacions dels segments de la quadrícula, paral·lels al quadre; aquestes transversals es mantenen paral·leles a la línia base AB . El canvi d'aspecte de les transversals, determinat per la inclinació de les dues rectes MA

¹¹braç=*braccio*, mesura florentina equivalent a 0,58 metres

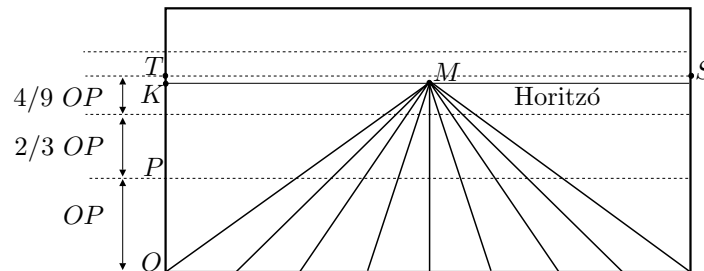
¹²Actualment l'anomenem punt de fuga principal.

¹³Vegeu ALBERTI [1435], 114-117 de l'edició de 1992.

i MB , és el que proporciona l'efecte d'allunyament. Llavors, si la quadrícula s'estengués en totes les direccions, tant com volguéssim, la paral·lela per M a AB representaria la transversal “més allunyada” o línia de l'horitzó. És a dir, totes les transversals en el quadre se situarien per sota d'aquesta. Seguidament, abans d'exposar el seu mètode de representació de les línies transversals de l'enrajolat, critica l'anomenada regla dels $2/3$, utilitzada força sovint com a mesura de reducció de les distàncies entre les representacions d'aquestes transversals:

Alguns tirarien una paral·lela a la línia de la base del rectangle ja dividida, i dividirien en tres parts iguals l'espai que comprenen les dues rectes. Després tirarien una altra paral·lela a la segona de manera que l'espai comprès entre la base i la primera paral·lela dividit en tres parts, excedeixi tota una part a l'altre espai que queda entre la primera i la segona paral·lela. Després tirarien una altra paral·lela observant la mateixa regla en la distància, i encara que estan convençuts que caminen amb encert fent-ho així, és el meu sentir que van força equivocats. Perquè com que la primera recta la tiren a discreció, encara que les altres paral·leles estan amb regla certa, no per això tenen lloc fix i determinat del vèrtex de la piràmide que permet veure bé l'objecte.¹⁴

Observem que l'error del mètode és atribuït a la indeterminació del traçat de la primera transversal, la qual provoca que el traçat de les altres depengui d'aquesta primera. També podríem argumentar que amb l'ús d'aquesta regla apareixen contradiccions com la que observem en el gràfic adjunt.



Si tracem la primera transversal pel punt mitjà P del segment OK , obtenim transversals que se situen per sobre de la línia KM de l'horitzó, la qual cosa no pot ser. Efectivament, per a la tercera transversal TS tenim

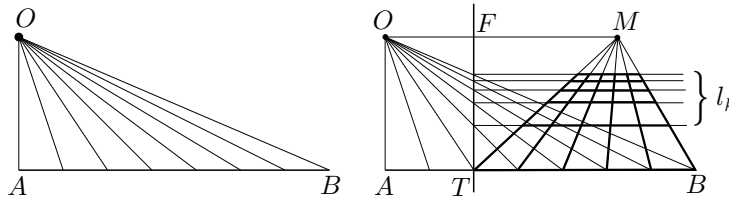
$$OT = OP + \frac{2}{3} OP + \frac{4}{9} OP = \frac{19}{9} OP = \frac{19}{18} OK > OK.$$

Tanmateix, Alberti no entra en aquesta discussió, sinó que, directament, exposa el seu mètode de construcció de transversals, donant com a única justificació que

¹⁴Vegeu ALBERTI [1435], 116-119 de l'edició de 1992.

«de la seva exactitud serà prova el que una mateixa recta serveix de diagonal a tots els paral·lelograms que es trobin», tal com veurem a l'activitat 7.2.3:

Agafo una petita superfície sobre la que traço una única línia recta. La divideixo en tantes parts com la línia de base del rectangle és dividida. Poso un únic punt damunt d'aquesta línia a la vertical d'un dels seus extrems, tan elevat com està en el rectangle el punt central sobre la línia base. Des d'aquest punt traço rectes fins cadascuna de les divisions de la línia. Fixo la distància que desitjo tenir entre l'ull del que mira i el quadre; un cop fixat d'aquesta manera l'emplaçament de la secció per mitjà d'una línia que els matemàtics anomenen perpendicular, produïxo la intersecció de totes les línies que ella talla. [...] Així aquesta línia perpendicular em donarà pels seus punts d'intersecció els límits de cada separació que ha d'existir entre les línies transversals paral·leles de l'enrajolat.¹⁵



AB : Línia recta dividida en parts —línia base—.

O : Punt a la vertical de A , a l'altura del punt central M .

OF : Distància entre l'ull O de l'observador i el quadre.

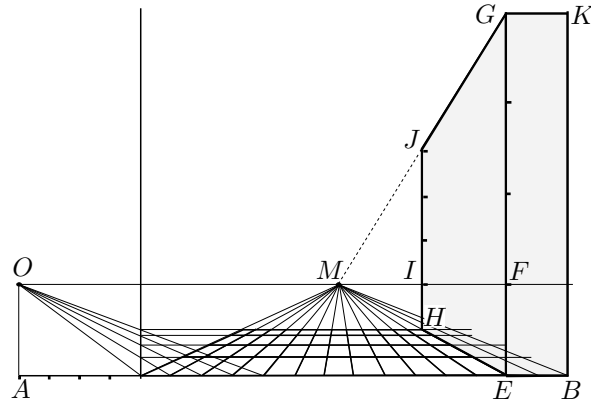
FT : Emplaçament de la secció amb les interseccions —quadre—.

l_k : Línies transversals.

Alberti presenta, en el llibre II, com portar un mur —ortoedre— al quadre.¹⁶ Considera el mur amb el rectangle base orientat segons un enrajolat de costats paral·lels i perpendiculars al quadre, —com el que presenta en el llibre I, de rajoles de 1 braç \times 1 braç—, i l'altura de 12 braços = 4 homes. En fem la presentació per a un observador que es troba a 4 braços del quadre, per a una altura del punt central igual a l'altura d'un home, i per a un mur de $2 \times 4 \times 12$ braços, situat amb el costat de 2 braços, sobre la línia base, i a la dreta del quadre.

¹⁵Vegeu ALBERTI [1435], 118-121 de l'edició de 1992.

¹⁶Vegeu ALBERTI [1435], 153-157 de l'edició de 1992.



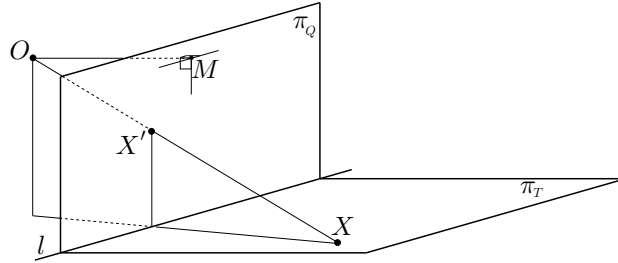
Alberti representa la base del mur inscrita a les rajoles. Per representar els costats verticals, traça la línia central —línia de l'horitzó—. Aquesta li serveix per construir una escala variable d'altures, que depèn de la transversal de l'enrajolat sobre la que es troba la vertical a representar. Així, en el gràfic, $EF = 1$ home = 3 braços és la unitat de mesura de l'escala per a les verticals sobre la línia base AB . Per obtenir els 12 braços d'alçada, caldrà prolongar EF fins a G , de manera que $EG = 4 EF = 12$ braços. Llavors el costat vertical BK sobre B és igual i paral·lel al EG . De la mateixa manera, $HI = 1$ home = 3 braços, és la unitat de mesura de l'escala per a les verticals sobre la transversal per H , — $EH = 4$ braços—. Per obtenir els 12 braços d'alçada, caldrà prolongar HI fins a J de manera que $HJ = 4 HI = 12$ braços. Finalment, si tracem GJ obtenim l'aresta superior del mur, perpendicular al quadre.¹⁷ Per representar l'aresta superior paral·lela al quadre, només caldrà traçar GK .

Activitats 7.2

1. De la representació perspectiva d'Alberti obtenim algunes intuïcions que \overline{E}_2 proposem de justificar.

Considerem el quadre com un pla π_Q perpendicular al pla π_T del terra. La línia l d'intersecció dels dos plans, l'anomenem línia del terra. Definim la representació perspectiva d'un punt $X \in \pi_T$, sobre el quadre π_Q , per a un observador en un punt O exterior als dos plans, com el punt $\sigma(X) = X' \in \pi_Q$ d'intersecció del quadre π_Q amb la recta OX .

¹⁷S'observa que si es prolonga GJ passa pel punt central M .



Utilitzeu resultats coneguts d'incidència i paral·lelisme, —per exemple dos plans, o són paral·lels, o són coincidents, o es tallen en una recta—, per justificar que la representació perspectiva de:

i) Un punt $P \in l$, és el mateix punt P . És a dir que la recta l és una recta de punts fixos.

ii) Una recta AB qualsevol, és una recta, i les representats de les rectes de π_T paral·leles a una direcció tenen un punt comú sobre la recta h que passa pel punt central M i és paral·lela a l .

iii) Una recta MN paral·lela a l , és una recta paral·lela a l .

iv) Una recta perpendicular a l , és una recta que passa pel punt central, o de fuga, M .

S v) Un punt X , és un punt $\sigma(X) = X'$ el qual pot ser representat com a intersecció de dues rectes determinades. Tingueu en compte que els apartats anteriors permeten establir que la representació d'una recta s perpendicular a l , és una recta que passa pel punt d'intersecció de s amb l , i pel punt central M .

2. Creeu un fitxer CABRI en què es visualitzi la regla dels dos terços, per representar en el quadre les línies transversals d'un enrajolat

i) Comproveu visualment que, depenent de la situació de la primera línia transversal, hi ha transversals que quedaran dibuixades més amunt de la línia de l'horitzó —línia paral·lela, pel punt central M , a la línia base del quadre—.

ii) Feu un càlcul que us permeti situar la primera línia transversal en una posició adequada per tal que la transversal “més allunyada” possible coincideixi amb la línia de l'horitzó.

S iii) Comproveu sobre el fitxer CABRI creat, que tant si situem la primera transversal en un lloc qualsevol, com si la situem en el punt determinat a l'apartat anterior, les diagonals de l'enrajolat no es converteixen, en general, en rectes del quadre.

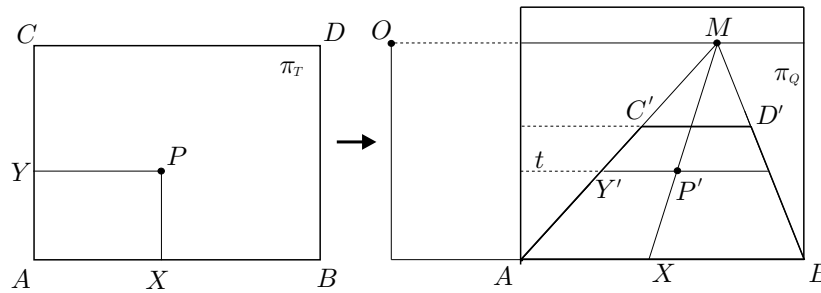
3. Representeu amb el CABRI un enrajolat 4×4 , a partir de les instruccions d'Alberti per a la representació de perpendiculars i transversals al quadre.

i) Traceu les representacions de les diagonals dels quadrats de l'enrajolat i comproveu que es tallen a la línia de l'horitzó en dos punts G i H .

ii) Comproveu, amb l'eina per mesurar distàncies, que $GM = HM = OF$, en què M és el punt central, O és l'ull de l'observador, i F és la intersecció de OM amb la línia perpendicular de seccions dels raigs visuals. Aquesta observació podria estar en l'origen del mètode de representació “punt-distància” del qual tractarem més endavant. S

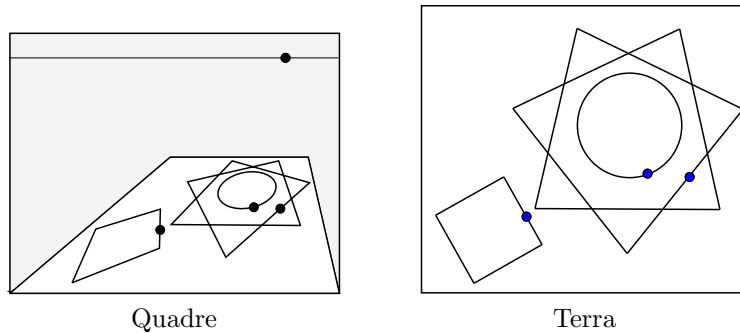
4. Seguiu els passos següents per crear una macro del CABRI que permeti representar punts del pla del terra sobre el pla del quadre, seguint les indicacions d'Alberti. B

i) Doneu un mètode per representar un punt P del pla del terra π_T , sobre el pla del quadre π_Q , basat en que:



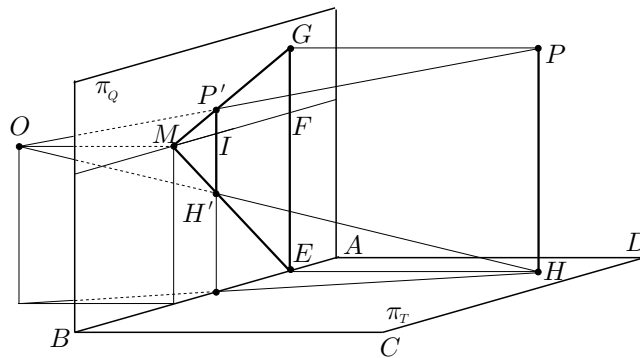
- La perpendicular al quadre pel punt P , ve representada per la línia que passa per la seva intersecció amb la línia base, i pel punt central M .
- La paral·lela a la línia base, per P , ve representada en el quadre per una paral·lela a la línia base, a una distància que es pot determinar, segons Alberti, amb una línia visual convenientment traçada.

ii) Creeu un fitxer CABRI en què es visualitzin les construccions del mètode que heu dissenyat. Utilitzeu-lo per construir la macro desitjada, i apliqueu la macro a la representació de circumferències i polígons tal com visualitzem en el gràfic adjunt. S



5. Hem vist que la representació d'Alberti de les línies verticals, proporciona una intuïció sobre el seu traçat.¹⁸ Efectivament, s'ha fet notar l'alineació del punt central M amb les representacions G i J de dos punts situats sobre una perpendicular al quadre, a qualsevol altura.

- \square i) Estudieu aquesta qüestió, —podeu ajudar-vos del gràfic adjunt—, amb la finalitat de crear una macro del CABRI que proporcioni la representació P' , en el quadre π_Q , de qualsevol punt P que no pertanyi al pla π_T del terra. Amb la macro obtinguda representeu mig cercle perpendicular al pla del terra.



- \square ii) Esbosseu una justificació de la construcció de verticals que fa Alberti.

\square

7.1.3 Legitimació del mètode d'Alberti

Fins l'arribada del pintor Piero della Francesca [c.1412–1492] no trobem una legitimació del mètode descrit per Alberti. És a les proposicions XII i XIII del llibre I del seu tractat *De Prospectiva Pingendi*.¹⁹ Allí es justifica per primera vegada la *costruzione legitima*, a partir de consideracions òptiques i fent ús de les propietats de semblança de triangles del llibre VI dels *Elements* d'Euclides. Per a la seva justificació es planteja la representació d'un quadrat π_T del terra de manera que el costat del quadrat i el costat del quadre π_Q de la pintura coincideixen en la línia del terra. Accepta implícitament sense demostració les suposicions d'Alberti que hem tractat a l'activitat 7.2.1:

- Les representacions, en el quadre, de les línies rectes, són línies rectes.
- La representació d'una línia paral·lela a la línia del terra, és una paral·lela a la línia del terra.

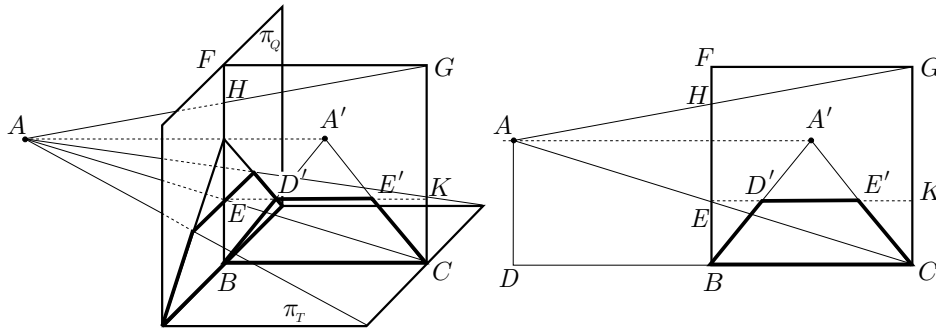
¹⁸Vegeu la nota 17 de la pàgina 339.

¹⁹Manuscrit del 1470 del que no es va imprimir una edició fins el 1899. Vegeu DELLA FRANCESCA [1470].

- La representació d'una perpendicular al quadre, és una recta que passa per la intersecció de la perpendicular amb el quadre, i pel punt central.

La proposició XII, igual que les proposicions que la precedeixen, es justifiquen amb consideracions de tipus òptic. Aquesta proposició li serveix per justificar la distància que hi haurà entre la representació del costat més allunyat del quadrat π_T , i la línia del terra. Aquest quedarà representat a una altura, determinada per la intersecció del quadre amb el raig visual que li és dirigit. Això, ni més ni menys, és el que feia Alberti per trobar l'altura en el quadre de les transversals.

A la proposició XIII trobem una demostració amb arguments geomètrics, tot i que algunes parts es basen en consideracions òptiques, en la qual estableix la longitud de la transversal que representa el costat més allunyat. Aquesta ve acompanyada d'una figura com la de la dreta del gràfic adjunt, de la qual n'hem fet —a l'esquerra— una versió en perspectiva cavallera. En el gràfic de Della Francesca, —hem afegit les línies discontinües—, trobem:



- El punt A i els segments BC i BF , que representen respectivament, l'observador O , el quadrat π_T del terra, i el quadre π_Q , vistos de perfil.
- El quadrat $BCFG$, el qual representa dues figures a la vegada:
 - 1) El quadre π_Q , vist de front, en el qual queda representat el quadrat del terra π_T , mitjançant el trapezi $BCD'E'$.
 - 2) El quadrat π_T del terra, en visió zenital, en què el segment HE proporciona la longitud de la representació del costat més allunyat del quadrat del terra.

Llavors, per legitimar la construcció d'Alberti, considera les interseccions D' i E' de la transversal corresponent al costat més allunyat de π_T amb les representacions dels costats de π_T perpendiculars al quadre, i demostra que $D'E' = EH$. Per aconseguir-ho, utilitza els teoremes del llibre VI d'Euclides i, cal dir, que deixa alguna proporció sense justificar. Amb aquests resultats afirma que $BCD'E'$

és la representació de π_T . Les proporcions que estableix per demostrar que $D'E' = EH$ són:

$$\frac{A'B}{A'D'} = \frac{AC}{AE} \quad (7.1)$$

$$\frac{D'E'}{BC} = \frac{EH}{CG}. \quad (7.2)$$

Llavors, en ser $BC = CG$, de la igualtat (7.2) obté $D'E' = EH$. Notem que podríem fer més explícita la seva demostració de la manera següent:

- La igualtat (7.1) és certa per la proporcionalitat dels segments resultants de tallar AC i $A'B$ per les paral·leles CD , EK i AA' .
- La igualtat (7.2) es pot justificar fent

$$\frac{D'E'}{BC} = \frac{A'D'}{A'B} = \frac{AE}{AC} = \frac{EH}{CG},$$

en què les tres igualtats s'obtenen, respectivament, de la semblança de $A'D'E'$ i $A'BC$, de la igualtat (7.1), i de la semblança de AEH i ACG .

7.2 Els mètodes de representació de Piero della Francesca

En el *De prospectiva Pingendi* trobem tres mètodes per a les representacions perspectives. Les proposicions que els contenen són la XVIII i la XXIII del llibre I, i la II del llibre III.

7.2.1 La proposició I.XVIII

En aquesta proposició es construeix la representació perspectiva d'un triangle equilàter, contingut en un quadrat $BCDE$, sobre el trapezi $BCD'E'$ representació d'aquest quadrat. Ho aconseguim donant un mètode per representar punts, —amb el qual representa els vèrtexs del triangle—, i unint-los, després, amb segments. Veurem que la seva marxa té una similitud amb l'ús de coordenades, perquè determina la posició dels punts mitjançant la posició d'unes projeccions adequades d'aquests sobre dues rectes.

Concretament, sigui P el punt de $BCDE$ del qual volem construir la representació P' sobre $BCD'E'$. S'observa que P' queda determinat per la línia de fuga i la transversal que el contenen.²⁰ Llavors, el que fa l'autor és idear el mètode següent per traçar aquestes dues línies:

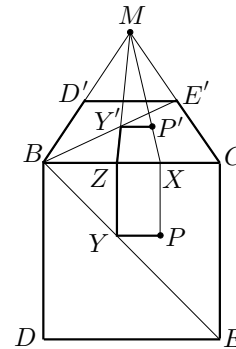
²⁰La línia de fuga d'un punt és la línia que passa per la representació del punt en el quadre i pel punt central o de fuga.

Línia de fuga. La construeix mitjançant el traçat de,

- La perpendicular, per P , a BC , la qual talla BC en X .
- La recta XM , la qual és la línia de fuga que conté P' .

Transversal. La construeix mitjançant el traçat de,

- La paral·lela, per P , a BC , la qual talla la diagonal BE en el punt Y .
- La perpendicular, per Y , a BC , la qual talla BC en Z .
- La línia de fuga ZM , la qual talla BE' en la representació Y' de Y .
- La paral·lela, per Y' , a BC , la qual és la transversal que conté P' .



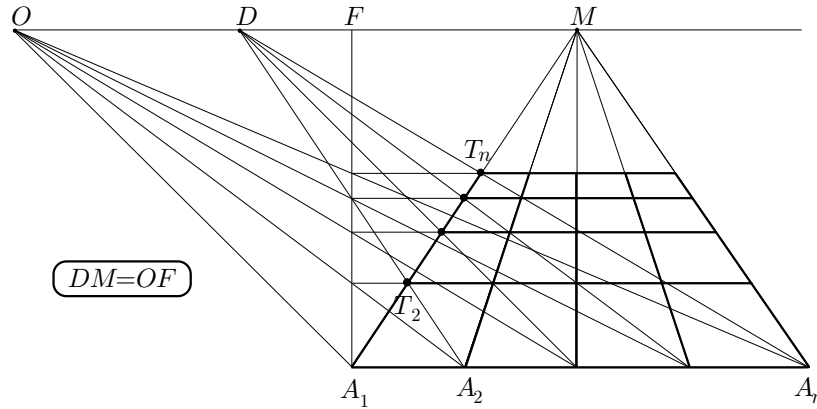
Llavors, el punt P' és la intersecció de la línia de fuga i la transversal traçades.

7.2.2 El mètode del punt de distància. La proposició I.XXIII

L'observació de la propietat de convergència de la representació de les línies diagonals paral·leles de l'enrajolat, origina un nou mètode de construcció anomenat *mètode del punt de distància*, del qual trobem la primera exposició, sense demostració, a la proposició XXIII del llibre primer del *De prospectiva* de Della Francesca.²¹ Aquest mètode consisteix a:

- Considerar un punt D sobre la línia de l'horitzó —vegeu en el gràfic adjunt, la figura de l'esquerra—, a distància DM del punt central M , igual a la que hi ha entre el pintor O i el quadre F .
- Des de D , traçar les rectes a les divisions A_k de la línia base. Llavors, les interseccions T_k d'aquestes rectes amb la primera línia de fuga MA_1 , convergent al punt central, determinen les posicions de les transversals.

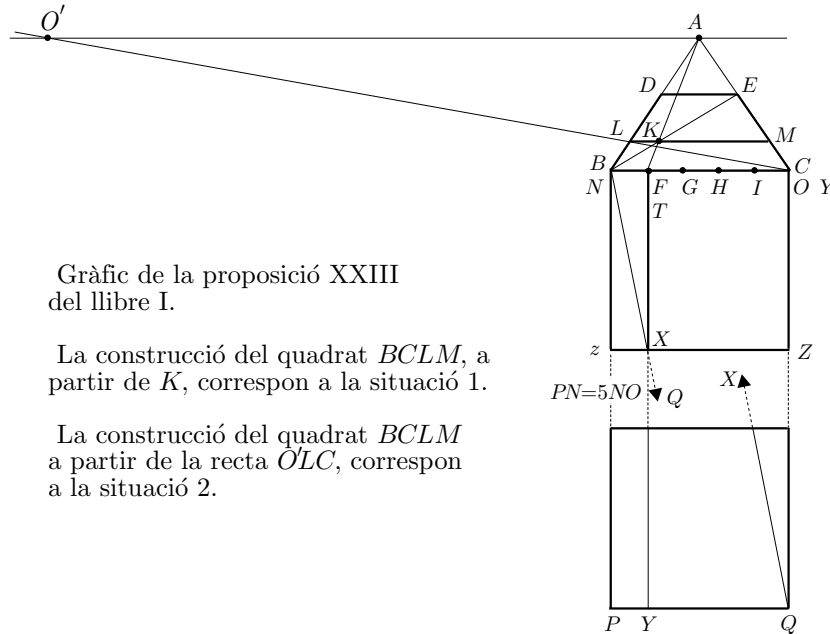
²¹Vegeu DELLA FRANCESCA [1470], 86-87 de l'edició de 1984. Cal notar l'error comès per PANOFSKY [1975], 151, quan diu que Della Francesca no ha conegut el mètode del punt de distància. Respecte d'aquesta qüestió, l'únic que es pot dir és que Della Francesca no l'utilitza en cap altra construcció.



Presentem amb més detall la proposició XXIII de Della Francesca. En ella proposa de fer la representació perspectiva d'un quadrat, retallat d'un rectangle donat. Es planteja dues situacions:

Situació 1: Considera un rectangle $NOPQ$ de mesures 10×50 del qual ha de retallar un quadrat de mesures 10×10 . En començar, suposa la representació $BCDE$ del rectangle $NOPQ$ —amb $N = B$ i $O = C$ — construïda. Llavors, sense tenir en compte el punt-distància, construeix:

- La partició del segment BC , en cinc parts iguals, mitjançant els punts F , G , H i I .
- El punt K , d'intersecció de la diagonal BE i la línia de fuga FA .
- La paral·lela, per K , a BC , la qual talla BD en L i EC en M .



Gràfic de la proposició XXIII del llibre I.

La construcció del quadrat $BCLM$, a partir de K , correspon a la situació 1.

La construcció del quadrat $BCLM$ a partir de la recta $O'LC$, correspon a la situació 2.

Llavors, $BCLM$ és la representació perspectiva del quadrat $NOzZ$ retallat de $NOPQ$.

La justificació que presenta és pot resumir així:

- La diagonal BE és la representació de la diagonal NQ del rectangle.
- La línia de fuga FA és la representació de la paral·lela TY , per $T = F$, al costat NP del rectangle.
- La paral·lela, per X , a NO , determina el rectangle $NOzZ$. Aquest és un quadrat perquè

$$\frac{NO}{NP} = \frac{1}{5} = \frac{NT}{NO} = \frac{NX}{NQ} = \frac{Nz}{NP} \implies NO = Nz.$$

- El punt K d'intersecció de BE i FA , és la representació del punt X d'intersecció de NQ i TY .

Llavors, en ser $NOzZ$ un quadrat, tenim que $BCLM$ és la seva representació, la qual ha estat retallada del rectangle $BCDE$.

Situació 2: A continuació, planteja el cas en què no coneix les dimensions del rectangle $NOPQ$ del qual vol retallar un quadrat. D'aquest últim, igual que abans, en té la representació $BCDE$. Per obtenir la representació del quadrat retallat, construeix:

- La recta paral·lela, per A , a BC .
- El punt O' , sobre aquesta paral·lela, tal que $O'A$ sigui igual a la distància de l'ull de l'observador al quadre.
- El punt L d'intersecció de $O'C$ amb BD .
- La paral·lela, per L , a BC que talla la diagonal BE en K , i el costat CE en M .

Llavors afirma, sense demostració, que $BCLM$ és la representació d'un quadrat de costat NO retallat del rectangle $NOPQ$.

Activitats 7.3

1. Observeu els dos procediments de la proposició XXIII del llibre I, de Piero della Francesca

i) De quina manera retallàrieu —inspirant-vos en el primer procediment—, un quadrat, d'un rectangle de mesura qualsevol.

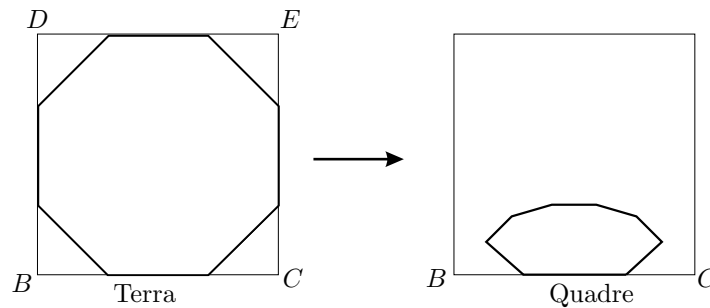
ii) Feu-ne una representació amb el CABRI.

- S **iii)** *Justifiqueu l'equivalència del mètode del punt de distància i el mètode d'Alberti.*

□

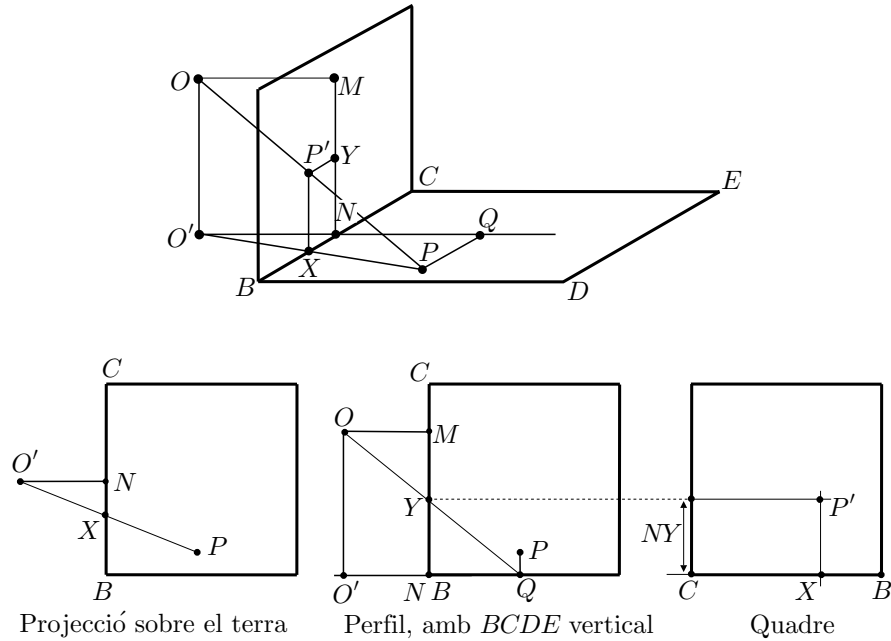
7.2.3 La doble projecció

El tercer mètode que presenta Della Francesca es basa en una doble projecció. Ho fa a la proposició II del llibre III, en què construeix la representació d'un octàgon regular amb un costat centrat sobre la línia del terra BC .



Actua, cercant la vertical $P'X$ i la transversal $P'Y$ sobre les quals es troba la representació P' , de cada vèrtex P , en el quadre, mitjançant dues projeccions adequades:

- Amb la primera projecció obté la perpendicular en el quadre, a la línia BC del terra, sobre la qual es troba la representació P' . Aquesta perpendicular la construeix projectant ortogonalment l'ull O de l'observador, el raig visual OP , i el quadre, sobre el pla del terra. D'aquesta manera obté $O'P$, la qual talla BC en X . Llavors, P' es troba sobre la perpendicular, per X , a BC .
- Amb la segona projecció obté la transversal, en el quadre, sobre la qual es troba P' . Aquesta transversal la construeix mitjançant una vista de perfil de tot el sistema; és a dir, projecta tots els elements sobre el pla perpendicular, per OM , al pla del terra, en què M és el punt central en el quadre. Per traçar la projecció Q , del punt P , sobre aquest pla, col·loca el pla del terra $BCDE$ en posició vertical, amb la línia BC del terra sobre el perfil del quadre. Llavors, el raig visual OP es projecta sobre OQ , el qual talla el perfil del quadre en el punt Y . D'aquesta manera, la transversal que passa per Y conté P' .



Finalment, per obtenir la representació P' de P , només li cal portar les dues línies, —vertical i transversal—, sobre el quadre.

Activitats 7.4

1. Feu una presentació amb el CABRI de la doble projecció, per representar l'octàgon regular. B
S

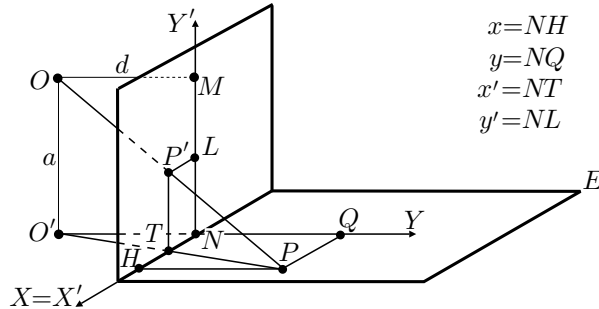
2. Es tracta de fer un tractament analític de la representació en perspectiva lineal, inspirat en la doble projecció de Della Francesca. Aquest tractament permetrà de preparar una versió del problema amb el programa DERIVE. Introduïrem dos sistemes de coordenades rectangulars XY i $X'Y'$, el primer en el pla del terra i l'altre en el pla del quadre. Considerarem els eixos d'abscisses NX i NX' , coincidents amb la línia del terra, l'eix NY' passant pel punt central M , i l'eix NY , en el terra, incident i perpendicular amb l' OY' , —vegeu el gràfic adjunt—. Anomenem

a : Altura de l'ull O de l'observador sobre el terra.

d : Distància OM de l'ull al quadre, en què M és el punt fuga.

x, y : Coordenades del punt P del terra en el sistema NX, NY .

x', y' : Coordenades de la representació P' del punt P en el sistema NX', NY' .



i) Mitjançant la semblança de triangles, demostreu que les equacions de la transformació de $P(x, y)$ en $P'(x', y')$ són:

$$x' = \frac{d \cdot x}{d + y} \quad y' = \frac{a \cdot y}{d + y}$$

ii) Apliqueu les equacions de la transformació per trobar les transformades de les rectes del pla del terra perpendiculars al quadre, i les de les transformades de les rectes del pla del terra paral·leles al quadre. Interpreteu els resultats.

iii) Mitjançant un pas al límit, de les equacions $y = l$ quan $l \rightarrow \infty$, demostreu que l'equació de la transformada de la "línia de l'infinít", paral·lela a la línia del terra, és la de la recta paral·lela, per M , a la línia del terra.

iv) Quina és la corba del terra que es visualitza sobre el quadre com una circumferència de diàmetre MN .

v) Creeu una funció de DERIVE que proporcioni la representació en el quadre d'un punt del terra, en funció de a i d . Utilitzeu-la per:

□

- 1) Representar un enrajolat de costats paral·lels i perpendiculars al pla del quadre.
- 2) Observar que les tres seccions còniques es poden representar com a el·lipses, de manera que la representació de:
 - L'el·lipse no té cap punt sobre la línia de l'horitzó.
 - La paràbola té un punt sobre la línia de l'horitzó.
 - La hipèrbola té dos punts sobre la línia de l'horitzó. [En aquest últim cas, per visualitzar-la com una el·lipse, cal que la hipèrbola a representar no tingui punts entre les rectes $y = 0$ i $y = -d$.]

□

7.3 De la perspectiva a la geometria projectiva

La pràctica de la perspectiva condueix a la recerca d'un marc teòric adequat per justificar els seus mètodes de construcció i evitar les confusions i els errors.²² Aquesta teorització de la disciplina aportarà la creació de nous conceptes, nous mètodes de demostració i, en la síntesi amb la teoria de les còniques realitzada per Desargues [1591–1661], donarà pas al naixement de la geometria projectiva. En última instància, donat el protagonisme adquirit per l'estudi de l'efecte que produeix la transformació perspectiva en les propietats dels objectes, s'obrirà el camí a una nova manera d'entendre la geometria que, en el segle XIX, serà classificada a partir de les transformacions que conservin les propietats estudiades.

7.3.1 Els punts de l'infinit

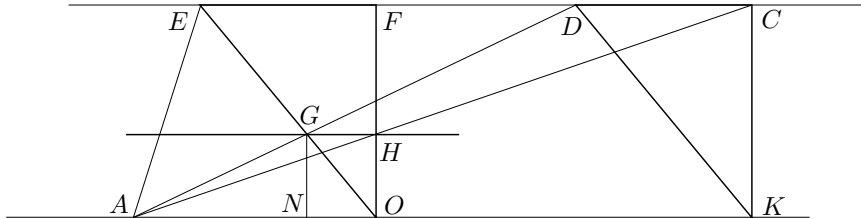
Un dels conceptes nous, que permetrà agrupar en un sol cas l'estudi de propietats que s'hauria de fer per a casos diferents, és el de *punt de l'infinit*. Aquest concepte sembla totalment inspirat en la pràctica perspectiva. Hem vist que Alberti i Della Francesca interpreten com a concurrents cap a un punt central, les rectes perpendiculars al quadre, les quals són paral·leles entre si. També aquest últim autor i, més endavant d'una manera sistemàtica, Jean Pélerin [ca. 1445–ca. 1522], anomenat Viator, en el seu tractat *De Artificiali Perspectiva* del 1505, utilitzen el fet que les línies del terra que formen 45° amb el quadre —les diagonals d'una quadrícula—, convergeixen en un punt situat a la mateixa altura que el punt central o de fuga, el qual és utilitzat en el mètode de construcció del punt de distància. En aquests casos la validesa d'aquesta afirmació és empírica. L'any 1582, Egnazio Danti [1536–1586] en el seu comentari a *Le due regole della prospettiva pratica* de l'arquitecte Giacomo Barozzi [1507–1573], conegut amb el nom de Vignola, dóna una justificació de l'equivalència entre la *costruzione legitima* i el mètode del punt de distància, però encara queda pendent la justificació de la concurrència de rectes paral·leles. El teorema tercer del comentari de Danti diu:²³

Donats dos triangles EOF i DKC iguals i equiangles, disposats de la mateixa manera entre dues línies $EFDC$ i OK paral·leles, si tracem dues línies DA i CA pels dos extrems D i C de la base DC d'un d'ells, envers un mateix punt A de la línia paral·lela oposada OK , les

²²Es poden trobar, al llarg del segle XVI molts exemples en què els mètodes del punt de distància i la *costruzione legitima* es confonen o no estan ben assimilats. Entre els més citats estan els de DÜRER [1525], 345-346 de l'edició de 1995, discutida a la introducció de PEIFFER [1995], 106-111, i els de l'arquitecte Sebastiano Serlio [1475–1554] un dels quals estudiarem a la secció 7.4.1.

²³Extret de BESSOT-LE GOFF [1993], 223. La presentació del teorema suggereix una demostració, utilitzant la semblança, d'un estil com la proposada a l'activitat 7.3.1.

quals tallen els dos costats EO i FO de l'altre, la línia GH que passa per les dues interseccions G i H serà paral·lela a la base d'aquests dos triangles.



La primera vegada que es dóna una demostració de la concurrència de les línies paral·leles en el quadre és justament en el canvi de segle, a punt d'iniciar el segle XVII. Guido Ubaldo del Monte [1545–1607] en els *Perspectivae libri sex* del 1600, i Simon Stevin [1548–1620] en el *De sciagraphia (Sobre el disseny d'ombres)* del 1605, justifiquen la noció de punt de fuga de qualsevol família de rectes paral·leles, —no paral·leles al quadre—, amb la demostració de que la representació de cadascuna d'aquestes famílies concorren en un punt del quadre.

Alguns anys després, Girard Desargues [1591-1661] és ben conscient d'aquest fet: ²⁴

Quan les línies del tema són paral·eles entre elles, i la línia de l'ull paral·lela a elles no és paral·lela al quadre, les aparences d'aquestes línies del tema, són línies que tendeixen totes al punt en què aquesta línia de l'ull troba el quadre, ja que cadascuna d'aquestes línies del tema és en un mateix pla amb la línia de l'ull, en la qual tots aquests plans es tallen entre ells, com en el seu eix comú, i tots aquests plans són tallats per un mateix pla, el del quadre.²⁵

Que en el pla del quadre les línies paral·leles tinguin un punt comú, porta Desargues a considerar el punt comú d'una família de rectes paral·leles en el seu *Brouillon project* del 1639:²⁶

Per donar a entendre que diverses línies rectes són paral·leles entre elles, o bé inclinades envers un mateix punt, diem aquí, que totes aquestes rectes són d'una mateixa ordenació [“ordonnance”] entre elles, per la qual cosa es concebrà d'aquestes rectes, tant en una com en l'altra d'aquestes dues classes de posició, que tendeixen envers un mateix indret.

²⁴Vegeu la pàgina 12 del seu *Exemple de l'une des manieres universelles du S. G. D. L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*, del 1636. Vegeu DESARGUES [1636], 201 de l'edició de FIELD–GRAY. S. G. D. L. són les inicials de Sieur Girard Desargues Lyonnais.

²⁵Notem que aquest és l'argument que hem utilitzat a la resolució de l'activitat 7.2.1.

²⁶Vegeu DESARGUES [1639], 100 de l'edició de 1951, i 70 de l'edició de 1987.

L'indret cap al que es concep que tendeixen diverses rectes en qualssevol de les dues classes de posició, és aquí anomenat fita [o fitó] de l'ordenació d'aquestes rectes.

Per donar a entendre la classe de posició entre diverses rectes paral·leles entre elles, diem sovint aquí que totes aquestes rectes són entre elles d'una mateixa ordenació, en què la fita és a distància infinita en cadascuna d'elles d'una part i de l'altra.

Per donar a entendre la classe de posició entre diverses rectes, en què estan inclinades envers un mateix punt, diem aquí, que totes aquestes rectes són d'una mateixa ordenació, en què la fita es a distància finita a cadascuna d'elles.²⁷

Aquí veiem que Desargues posa els punts de l'infinit de costat amb els punts de la geometria euclidiana, reunint-los sota un mateix nom. Entenem que considera aquests punts amb una qualitat d'existència, no en potència, sinó actual.

Desargues no va ser el primer a introduir punts de l'infinit. Johannes Kepler [1571–1630] els introdueix l'any 1604, en la seva *Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur*.²⁸ Així trobem que, en el capítol II, parla de punts “immensament allunyats”:²⁹

Dues rectes lluminoses originades en una mateixa font puntual de llum es consideren, des del punt de vista de la sensació, equivalents a paral·leles si estan a distància immensament gran de la base on es troben totes dues reunides, bé que realment siguin concurrents en el seu origen.

Després, hi torna en el capítol IV, quan considera la paràbola com una secció cònica intermèdia entre les el·lipses i les hipèrboles, en un procés en què els dos focus, —Kepler té l'autoria d'aquest nom—, de l'el·lipse se separen a distància infinita.³⁰

En aquests casos entenem que la concepció del punt de l'infinit està mediatitzada per la sensació i el moviment que li proporcionen una qualitat potencial.

²⁷Desargues utilitza el terme *but de l'ordonnance* que hem traduït per fita o fitó de l'ordenació. En el cas que les rectes són paral·leles introdueix el punt de l'infinit dient que aquesta fita es troba a distància infinita.

²⁸Vegeu KEPLER[1604]. Podem traduir el títol com *Qüestions omeses per Vitellio de les quals s'ocupa la part òptica de l'astronomia*. Llegim en el *Dictionare historique et critique* de Pierre Bayle [1697], volum 4, 462 de la 5a. edició de 1740, que Vitellio era un autor, possiblement polonès, del segle XIII, que va escriure sobre òptica i qüestions matemàtiques diverses, essent la seva obra editada en el segle XVI. El *Dictionare* es troba disponible a l'adreça

<http://ets.lib.uchicago.edu/ARTFL/bayle>

²⁹Extret de BKOCHE [1991], 240.

³⁰Vegeu FIELD–GRAY [1987], 185–188.

Per tant, som partidaris de pensar en la perspectiva i la interpretació teòrica de Desargues com els introductors dels punts de l'infinit en la geometria, entesos com a objectes ben determinats amb existència actual.

7.3.2 Els mètodes de demostració

Hem apuntat l'interès en justificar els mètodes de la pràctica perspectiva com un dels motius de la teorització d'aquesta disciplina. També hi podríem afegir, l'interès dels geomètres per extreure'n les idees fonamentals lluny de les aplicacions.

En una primera època la presentació s'adapta al cànon euclidià. No es fa una teoria nova que requereixi un conjunt d'axiomes, perquè s'utilitzen els d'Euclides. En les demostracions s'utilitza la teoria de la proporció dels seus *Elements*, estretament lligada al concepte de mesura. Però, a poc a poc, aniran apareixent demostracions basades en les propietats d'incidència entre punts, rectes i plans, les quals relegaran el recurs a consideracions mètriques a un segon pla o, fins i tot, en prescindiran. Així trobem en els *Perspectivae libri sex* de Guido Ubaldo del Monte, els dos tipus de demostració. Per exemple, a les proposicions 28–31 del llibre I es justifica, per a casos diferents, l'existència del punt de convergència de les rectes paral·leles mitjançant la teoria de la proporció; llavors, a la proposició 32 fa una demostració, que li serveix per a tots els casos, basada en les relacions d'incidència de les figures implicades.³¹

Més endavant, Desargues encara basa moltes de les seves demostracions en consideracions mètriques i la teoria de la proporció, però introdueix innovacions mitjançant una primera síntesi entre la geometria de la perspectiva i la teoria de les còniques, la qual presenta en el seu *Brouillon project*.³² En aquesta síntesi s'origina la geometria projectiva, en la qual la introducció dels punts de l'infinit, i el fet que les projeccions mantenen les relacions d'incidència i algunes propietats entre certes composicions de raons, possibiliten la presentació de grups de teoremes sota un sol enunciat. Blaise Pascal [1623–1662] segueix el camí obert per Desargues i utilitza els seus resultats per escriure el seu *Essai sur les coniques*, del 1640, descobert el 1779. En aquest assaig apareix el seu famós teorema de l'hexagram.³³ Posteriorment desenvolupà aquest assaig en el *Traité des coniques*,

³¹Vegeu BKOUCHE [1991], 252–253. Aquesta demostració és de les mateixes característiques que la proposada per Desargues, la qual ha estat presentada en aquest mateix capítol a la pàgina 352. Recordem que aquesta es basava en què la paral·lela r , a les rectes paral·leles donades, que passa per l'ull de l'observador, determina un pla amb cadascuna de les paral·leles; la intersecció dels plans resultants amb el quadre proporciona la representació de les paral·leles que concorren en el punt d'incidència de r amb el quadre.

³²Vegeu DESARGUES [1639]. La traducció completa del títol de l'obra ve a ser *Esborrany de projecte d'un estudi sobre les diferents maneres que un con es tallat per un pla*.

³³Aquest teorema es tractarà a la secció 7.4.2.

el qual no va publicar i del que tenim notícia per unes notes de Leibniz de l'any 1676. Aquesta primera tradició de geometria projectiva s'acaba amb Philippe de La Hire [1640–1718] i les seves *Sectiones conicae* del 1685. A partir d'aquest moment, el tractament algebraic de la geometria serà el preferit dels matemàtics fins a finals del segle XVIII. L'any 1799, Gaspard Monge [1746–1818], amb la seva *Géométrie Descriptive*, posarà la llavor per a una recuperació dels mètodes projectius, i, l'any 1822, Jean-Victor Poncelet [1788–1867] els utilitzarà d'una manera sistemàtica en el seu *Traité des propriétés projectives des figures*.³⁴

Amb independència de l'evolució de la síntesi efectuada per Desargues, entre perspectiva i teoria de còniques, amb la qual aparegué la geometria projectiva, la teoria geomètrica del pla de les figures perspectives seguí el seu desenvolupament. La sistematització de la presentació de les seves propietats arribà de la mà de Brook Taylor [1685–1731]. L'any 1719, en el seu tractat titulat *New Principles of Linear Perspective*,³⁵ fa una presentació seguint el cànon axiomàtic-deductiu. Així, comença la seva exposició amb un conjunt de dinou definicions i quatre axiomes en què el fet destacat és la posició rellevant que es dona a les propietats d'incidència. Els quatre axiomes són:

Axioma 1: La intersecció comuna de dos plans és una línia recta.

Axioma 2: Si dues línies es troben en un punt o són paral·leles entre si, es pot trobar un pla que les conté ambdues.

Axioma 3: Si tres línies rectes es tallen de dues en dues, o si dues d'elles són paral·leles i són tallades per la tercera, llavors totes tres estan en el mateix pla, és a dir, un pla que passa per dues d'elles passa també per la tercera.

Axioma 4: Tots els punts de qualsevol línia recta pertanyen a qualsevol pla que contingui la línia.

En els teoremes que presenta, les consideracions mètriques perden el seu paper privilegiat, a favor del tractament via relacions d'incidència. Una novetat és la generalització dels teoremes per a qualsevol angle que formin el pla del quadre i el del terra. Després d'elaborar la teoria, l'aplica a la resolució de 23 problemes de construcció en el pla del quadre en què utilitza una tècnica d'abatiment de plans.³⁶

Finalment, l'autor amb qui culmina l'estudi de les propietats de la geometria del pla del quadre en què es representen les figures, és Jean-Henri Lambert [1728–1777]. El seu objectiu és construir les representacions de les figures directament sobre el pla del quadre, prescindint del pla del terra. Per aconseguir-ho li cal definir tots els elements en el pla del quadre; en especial, els punts de fuga per als

³⁴Vegeu MONGE [1799] i PONCELET [1822]

³⁵Vegeu ANDERSEN [1992] en què s'inclou aquest tractat, juntament amb el publicat el 1715, *Linear Perspective: or, a New Method of Representing Justly All Manner of Objects*, del qual els *New Principles* són una revisió.

³⁶Vegeu la secció 7.4.3.

angles de les diferents direccions respecte de la recta que determina la distància del punt de vista al quadre, i un procediment per establir escales de mesura per a diferents rectes a partir d'una escala establerta per a una paral·lela a l'horitzó.³⁷ Aquest autor és molt conscient d'una de les aportacions de la perspectiva a la geometria: l'interès de l'estudi de les transformacions geomètriques i de les propietats que es conserven un cop aplicades. En el cas de la transformació perspectiva, Lambert és conscient que amb la introducció de punts de l'infinit, les relacions d'incidència es conserven. Una de les raons de l'interès d'aquest fet la trobem en les aplicacions que en fa als problemes de construcció amb regle sol. A la secció 7.4.4 presentarem un dels 15 problemes de construcció amb regle que resol al final de LAMBERT [1774].

7.4 Algunes qüestions i teoremes

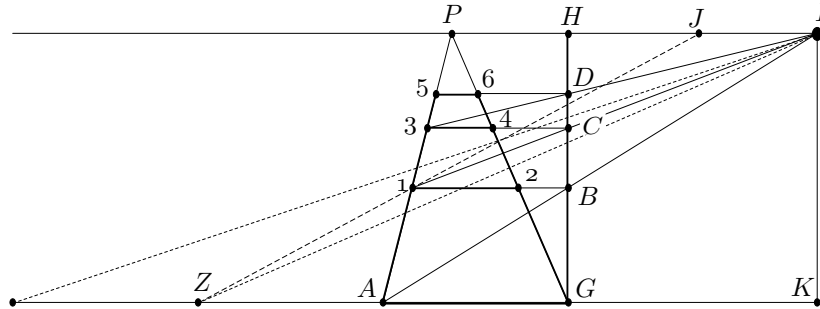
7.4.1 Sebastiano Serlio. Una pràctica equivocada.

Dos dels exemples que mostren que la pràctica de la *costruzione legitima* i el mètode del punt de distància, fou en molts casos mal interpretada durant el segle XVI, els trobem a Sebastiano Serlio. Concretament, en el segon llibre, dedicat a la perspectiva, del seu *Regole generali d'architettura* del 1537. Un dels procediments que proposa per a la representació d'una quadrícula es desenvolupa de la manera següent:³⁸

- Considera I l'ull de l'observador, i GH el quadre vist de perfil. La representació del quadre vista de front, se situa en el costat de la línia GH que no conté el punt I . El costat transversal del primer quadrat ve representat per la línia AG en la base del quadre.
- Per representar una renglera de quadrats perpendicular al quadre, partint de AG , comença amb el traçat de les dues rectes AP i GP convergents a un punt P situat a la mateixa altura de la base del quadre que el punt I . La representació dels costats perpendiculars al quadre dels diferents quadrats, estaran sobre aquestes línies.
- El quadrat més proper al quadre ve representat pel trapezi $AG12$, que ha sigut construït pel mètode de la *costruzione legitima*. És a dir, traçant la visual IA , la seva intersecció B amb el quadre GH , i la paral·lela, per B , a AG , la qual talla a les dues convergents AP i GP en els punts 1 i 2.

³⁷Vegeu els paràgrafs 32 i 52 de LAMBERT [1759], i BKOUCHE [1991], 278-279.

³⁸Vegeu LE GOFF [1987a], 69-72, i LE GOFF [1987b], 239-260.



- El quadrat següent, adjacent i més allunyat, ve representat pel trapezi 1234. En aquest cas, per construir la transversal 34C, ha traçat la línia $I1$, la qual talla GH en el punt C , i després, la paral·lela per C a AG .
- Les transversals successives les dibuixa seguint el mateix mètode que en el cas de $34C$. Així resulten els trapezis 3456, etc., que representen els quadrats successius.

Només cal fer una senzilla comprovació per veure que el mètode s'aparta de la *costruzione legitima*. Efectivament, si observem la transversal superior del segon quadrat que resultaria d'aquest últim mètode no coincideix amb la $34C$. Això passa perquè la visual IZ , en què Z satisfà $AZ = GA$, que la determina no passa pel punt 1. De fet, no hi passa per a cap posició inicial de I —si $P \neq H$ —; perquè, segons el mètode del punt de distància, la línia $Z1$ passa per un punt J de la línia IP tal que $PJ = HI$ i, si $P \neq H$, això implica $J \neq I$.

D'altra banda es podria observar que les diagonals dels diferents quadrats construïts per Serlio, convergeixen a un mateix punt. Tot i que aquest punt no està sobre la recta IP , aquesta convergència podria fer pensar que la construcció és correcta, si no es té consciència de la propietat de la línia de l'horitzó. Una altra prova que la construcció no és correcta és considerar que si la construcció seguís amb els quadrats d'una columna adjacent, compartirien les transversals i llavors les diagonals que haurien d'aparèixer alineades es presentarien formant una línia poligonal.

Activitats 7.5

1. Feu una presentació amb el CABRI de la construcció de Serlio en què es visualitzin els comentaris fets en aquesta secció.

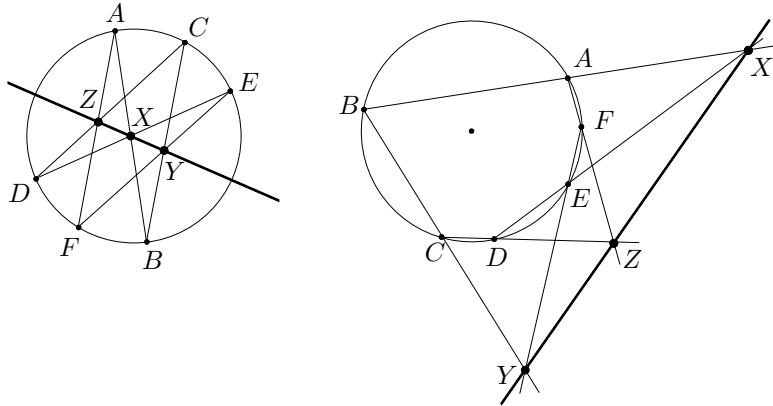
□

 \overline{E}_2
S

7.4.2 El teorema de l'hexagram de Pascal

Pascal presenta el teorema de l'hexagram en el seu *Essay pour les coniques* del 1640.³⁹ No en fa la demostració però el fet que el presenti primer per al cas d'una circumferència i després per a una cònica qualsevol, fa pensar en una demostració a l'estil de Desargues.⁴⁰ Primer utilitzaria la teoria de la proporció sobre la configuració de la circumferència i les rectes, i després faria una justificació sobre una cònica a partir d'una circumferència que es projectés sobre aquesta.⁴¹ Farem una presentació del teorema per al cas d'una circumferència:⁴²

Sigui un hexàgon $ABCDEF$ inscrit en una circumferència. Considerem els punts X , Y i Z d'intersecció de les parelles de costats oposats AB i DE , BC i EF , i CD i FA . Llavors els punts X , Y i Z estan sobre una recta.⁴²



Considerem el triangle PQR determinat pels punts d'intersecció de AB i CD , CD i EF , i EF i AB . Si utilitzem el teorema de Menelau,⁴³ podem afirmar que:

– De la intersecció de DE amb el triangle PQR ,

$$\frac{DQ}{DP} = \frac{EQ}{ER} \cdot \frac{XR}{XP} \quad \text{i, per tant,} \quad \frac{XR}{XP} = \frac{ER \cdot DQ}{DP \cdot EQ}.$$

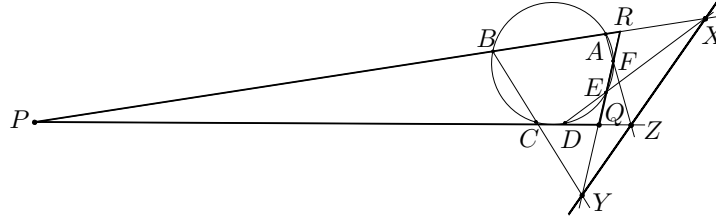
³⁹Vegeu els lemes I i II de PASCAL [1640].

⁴⁰Tractarem dos importants teoremes de Desargues en una secció a part.

⁴¹Exclourem els casos en què les rectes implicades es tallen en punts de l'infinit —són paral·leles—, per a no allargar l'exposició.

⁴²Per als casos que no demostrem, per exemple quan alguna parella de costats oposats, com ara AB i DE , són paral·lels, també es compleix el teorema si es té en compte que el punt de tall X és el punt de l'infinit de la recta YZ .

⁴³Vegeu la pàgina 256 de la secció 5.4.3.



- De la intersecció de AF amb el triangle PQR ,

$$\frac{AR}{AP} = \frac{FR}{FQ} \cdot \frac{ZQ}{ZP} \quad \text{i, per tant,} \quad \frac{ZQ}{ZP} = \frac{AR \cdot FQ}{AP \cdot FR}.$$

- De la intersecció de BC amb el triangle PQR ,

$$\frac{BP}{BR} = \frac{CP}{CQ} \cdot \frac{YQ}{YR} \quad \text{i, per tant,} \quad \frac{YR}{YQ} = \frac{BR \cdot CP}{BP \cdot CQ}.$$

Amb totes aquestes relacions a la nostra disposició, ens proposem de demostrar que

$$\frac{XR}{XP} = \frac{ZQ}{ZP} \cdot \frac{YR}{YQ},$$

perquè llavors, pel teorema recíproc de Menelau,⁴⁴ els punts X , Y i Z estaran alineats.

Observem que $RA \cdot RB = RF \cdot RE$ i $PA \cdot PB = PD \cdot PC$. Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{ZQ}{ZP} \cdot \frac{YR}{YQ} &= \frac{AR \cdot BR}{AP \cdot BP} \cdot \frac{FQ \cdot CP}{FR \cdot CQ} = \\ &= \frac{RF \cdot RE}{PD \cdot PC} \cdot \frac{FQ \cdot CP}{FR \cdot CQ} = \frac{RE \cdot FQ}{PD \cdot CQ}. \end{aligned}$$

Ara bé, $QD \cdot QC = QE \cdot QF \implies \frac{FQ}{CQ} = \frac{QD}{QE}$. Per tant,

$$\frac{ZQ}{ZP} \cdot \frac{YR}{YQ} = \frac{RE \cdot QD}{PD \cdot QE} = \frac{XR}{XP}.$$

Activitats 7.6

1. Considereu cinc punts A , B , C , D i E . Construïu amb el CABRI:

\overline{B}

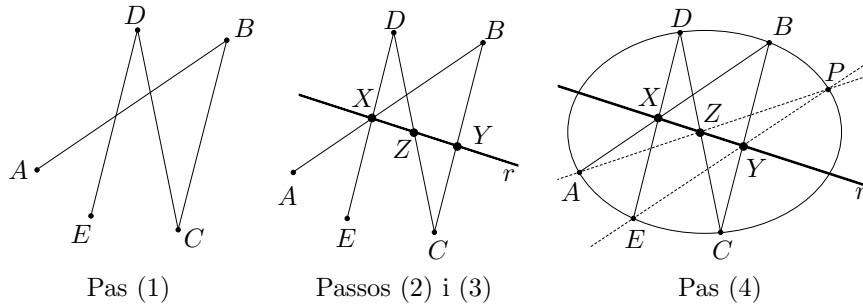
- (1) La línia poligonal $ABCDE$.

⁴⁴Vegeu l'activitat 5.8.2.

(2) Una recta variable r pel punt $X = AB \cap DE$.

(3) Els punts $Z = r \cap DC$ i $Y = r \cap BC$.

(4) El punt $P = AZ \cap EY$.

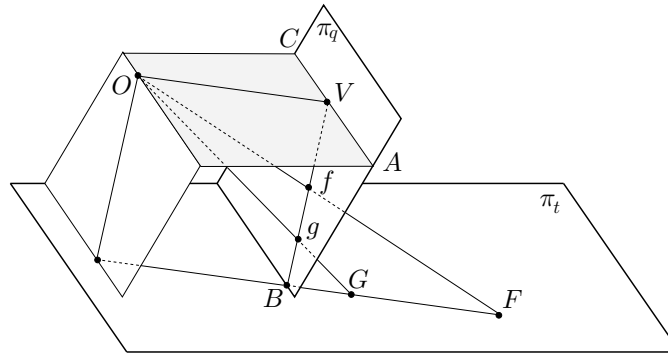


S Llavors, comproveu que el lloc geomètric dels punts P , resultants de la variació de la recta r , és la cònica pels punts A, B, C, D i E .

□

7.4.3 Brook Taylor. El teorema fonamental i la tècnica de l'abati-ment

Presentem el tercer teorema dels *New Principles* perquè, «en ser aquest teorema el fonament principal de tota la pràctica de la perspectiva, faria bé el lector en familiaritzar-se molt amb ell».⁴⁵



El seu enunciat és:

La projecció d'una línia recta FG no paral·lela al quadre passa per la seva intersecció B [amb el quadre] i el seu punt evanescent V .⁴⁶

⁴⁵Vegeu TAYLOR [1719], 14, i ANDERSEN [1992], 174.

⁴⁶El punt evanescent d'una línia, és el punt en què el quadre talla la paral·lela a aquesta línia que passa per l'ull O de l'observador.

La demostració es basa totalment en les relacions d'incidència i es desenvolupa considerant:

π_q : “Quadre” o pla sobre el que es representen els objectes.

π_t : “Pla original” sobre el que es troben els objectes que es volen representar.

O : Ull de l'observador o “punt de vista”.

FG i fg : Recta que es vol representar, i la seva representació en el quadre.

FO i GO : Raigs visuals que originen f i g sobre el quadre.

B : Punt d'intersecció de FG amb el quadre.

AC : “Línia d'evanescència” en què el pla paral·lel, per O , a π_t talla el quadre. [Línia de l'horitzó]

V : “Punt evanescent” de la línia FG , intersecció del quadre amb la paral·lela, per O a FG . [Representació del punt de l'infinit de FG en el quadre.]

S'observa que la línia fg és la intersecció del quadre amb el pla del triangle OFG . Llavors, el punt B pertany a la prolongació de fg , perquè B pertany al pla del quadre, al pla OFG i, per tant, a la seva intersecció que és la recta que conté fg .

D'altra banda, OV paral·lela a FG , està en el pla del triangle OFG . Llavors, V pertany al pla OFG i al quadre; per tant, V està en la prolongació de fg . \square

A partir d'aquest teorema, passem a la interpretació de la construcció feta per Taylor, de la representació a sobre el quadre d'un punt A , en el problema I dels *New Principles*.⁴⁷ El marc en què es planteja el problema està constituït per:

⁴⁷Vegeu TAYLOR [1719], 20–21, i ANDERSEN [1992], 13–18, 180–181.

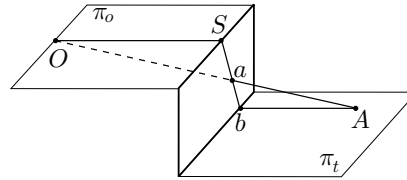
O : Punt de vista.

S : “Centre del quadre” o punt del quadre determinat per la perpendicular, per O , al quadre.

b : “Seat” o projecció perpendicular de A sobre el quadre.

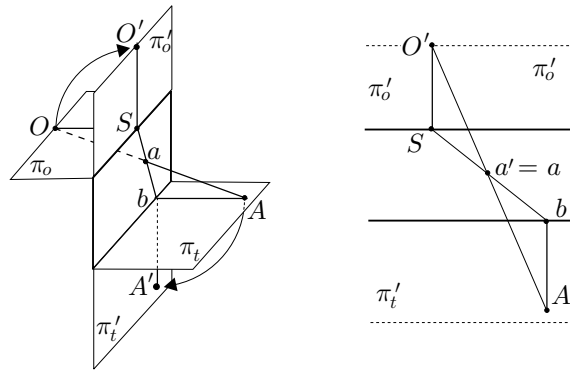
π_t : “Pla original” sobre el que es troben els objectes que es volen representar. És còmode representar-lo perpendicular al quadre, però no és estrictament necessari.

π_o : Pla, per O , paral·lel a π_t .



Llavors, la representació a , del punt A , en el quadre es troba sobre el raig visual OA i, pel teorema fonamental, sobre la línia bS , —vegeu el gràfic adjunt—.

En el problema I dels seus *New Principles*, es planteja de construir la representació a del punt A , coneguts els punts b i S , i les distàncies OS i Ab . La solució s'elabora totalment en el pla del quadre. Resulta d'abatre els plans π_t i π_o sobre el pla del quadre, exteriorment al quadre.⁴⁸



D'aquesta operació s'obtenen els punts O' i A' transformats dels punts O i A . La solució que dona Taylor al problema és que la representació de A és $a = a' = O'A' \cap bS$.

⁴⁸Quan presenta la seva construcció no explica que ha fet aquest abatiment, sinó que presenta directament el gràfic adjunt de la dreta. Que la construcció resulta d'aquest abatiment ho explica en el problema II.

Efectivament, per la semblança dels triangles OaS i Aab , —abans de l'abatiment—, tenim

$$\frac{Sa}{ba} = \frac{OS}{Ab}.$$

D'altra banda, per la semblança dels triangles $O'a'S$ i $A'a'b$, —després de l'abatiment—, tenim

$$\frac{Sa'}{ba'} = \frac{O'S}{A'b}.$$

Per tant, en ser $O'S = OS$ i $ba' = bA$, es compleix

$$\frac{Sa}{ba} = \frac{Sa'}{ba'},$$

en què a i a' pertanyen a l'interior del segment bS . Consegüentment, $a = a'$.

Activitats 7.7

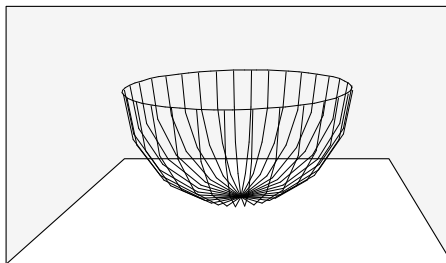
1. Considereu la construcció de la perspectiva d'un punt tal com ho fa Taylor [B]
en el problema I dels *New Principles*.

i) Construïu-ne una visualització, pas a pas, amb el CABRI.

ii) Elaboreu tres macros que proporcionin: [S]

- A partir d'un punt del pla del terra, el seu transformat en el quadre.
- A partir d'un punt de l'espai, el seu transformat en el quadre. [Per determinar el punt de l'espai caldran dos paràmetres: la seva projecció sobre el terra i la seva elevació sobre el terra.]
- A partir d'un punt de l'espai, la representació en el quadre de la seva projecció sobre el terra, junt amb la representació del punt.

2. Representeu, amb l'ajut de les macros creades a l'activitat anterior, mitja esfera amb el cercle de secció paral·lel al pla del terra, tal com es presenta en el gràfic adjunt. [S]



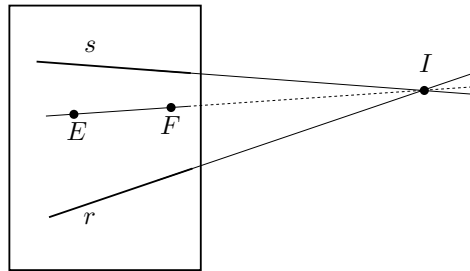
□

7.4.4 Lambert. La perspectiva i les construccions amb regle sol.

El fet que les rectes paral·leles, a una recta donada l , es puguin traçar amb regle sol en el pla del quadre, —només cal conèixer la seva direcció que ve determinada pel punt de la línia de l'horitzó que pertany a l —, permet resoldre moltes construccions amb regle sol amb el recurs de les transformacions perspectives. Per il·lustrar-ho, estudiarem un dels problemes de construcció amb regle sol presentat al final de LAMBERT [1774]. Concretament, el problema 5 diu:⁴⁹

r i s són línies que es tallen en un punt fora del quadre, traçar amb l'únic ajut d'un regle i sense prolongar aquestes línies, una línia passant per un punt E donat, que talli r i s en el mateix punt d'intersecció.

O sigui que si $I = r \cap s$, es tracta de construir EF tal que si la prolonguéssim, passés per I .

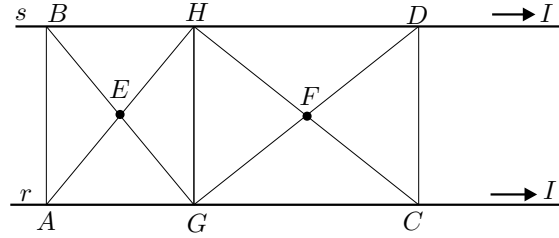


De la construcció i prova posterior de Lambert, podem extreure l'estratègia que ha seguit. Aquesta consisteix a considerar que aquest problema es pot interpretar com la transformació perspectiva d'un altre problema en què:

- Les rectes r i s són paral·leles.
- El punt E equidista de r i s .
- Es demana la construcció d'un punt F tal que EF sigui paral·lela a r i s , o de manera equivalent, la construcció de F equidistant de r i s .

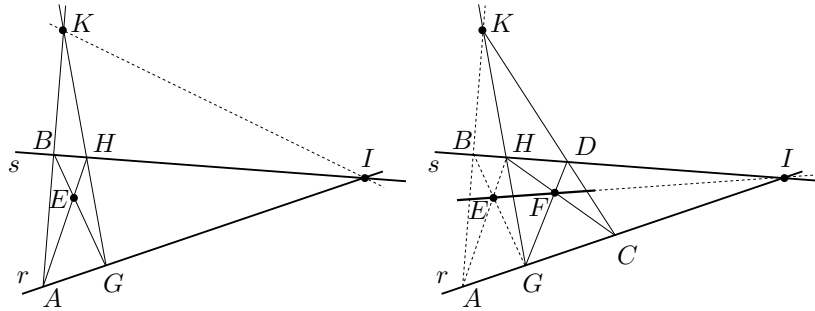
Llavors, per construir el punt F , observa que, en el nou problema —abans de la transformació perspectiva—, E i F es poden considerar com els centres de dos rectangles o paral·lelograms $ABHG$ i $GHDC$, amb els costats AG , GC , sobre r , i els costats BH , HD , sobre s .

⁴⁹Vegeu LAMBERT [1774], 268, i la secció 8.7.



Així, la construcció de F passa per la construcció dels transformats d'aquests rectangles, per la perspectiva. Per construir $ABHG$, tracem en el quadre —vegeu la figura inferior de l'esquerra—:

- El segment AE prolongat fins el punt H , en què $A \in r$ i $H \in s$.
- El segment BE prolongat fins el punt G , en què $B \in s$ i $G \in r$.
- El punt K d'intersecció de AB i GH .



Llavors, si considerem els punts I i K sobre la línia de l'horitzó, tenim la representació del rectangle $ABHG$, de centre E , construït. Per a la representació del rectangle $GHDC$ i el seu centre F , tracem —vegeu la figura superior de la dreta—:

- Una recta, per K , que talli r en un punt C , i s en un punt D .
- El punt F d'intersecció de HC i GD .

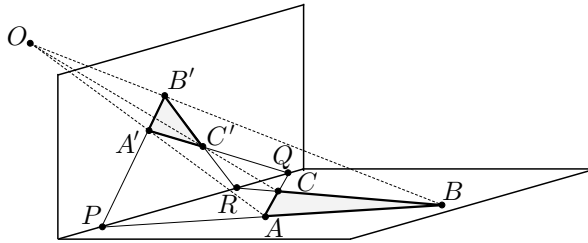
Així, EF passa pel punt I de l'horitzó perquè, abans de la transformació perspectiva, EF és paral·lela a r i s , en ser E i F equidistants d'aquestes dues rectes.

7.5 Dos teoremes de Desargues

7.5.1 El teorema de Desargues dels dos triangles

L'any 1647, Abraham Bosse [1602–1676] deixeble i divulgador de l'obra de Desargues, publica la *Manière universelle de Mr. Desargues pour pratiquer la pers-*

*pective par petit pied comme le géométral.*⁵⁰ Al final de l'obra apareixen tres proposicions que, pel seu estil i contingut, s'atribueixen directament al mateix Desargues. La primera d'aquestes és l'anomenat teorema de Desargues dels dos triangles. La qüestió purament geomètrica que s'hi planteja sembla tenir el seu origen en l'observació de la pràctica perspectiva.⁵¹



Per il·lustrar-ho, considerem un triangle ABC en el pla del terra i la seva representació $A'B'C'$ en el pla del quadre, —és a dir les rectes AA' , BB' i CC' convergeixen en el punt O exterior als dos plans—. S'observa que les rectes que contenen els costats AB i $A'B'$ es tallen en el punt P , les que contenen els costats AC i $A'C'$ es tallen a Q , les que contenen els costats BC i $B'C'$ es tallen a R , i aquests tres punts es troben sobre la línia d'intersecció del quadre i del terra. D'aquesta situació es plantegen les qüestions geomètriques següents:⁵²

- 1) Per a qualsevol triangle ABC , i per a qualsevol representació perspectiva $A'B'C'$, és cert que P , Q i R estan alineats?
- 2) La proposició recíproca és certa? És a dir, si ABC i $A'B'C'$ estan en diferents plans i els punts $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ i $R = BC \cap B'C'$ estan alineats, existeix un punt O tal que les rectes AA' , BB' i CC' hi convergeixin?
- 3) Es poden generalitzar les respostes a les preguntes anteriors quan coincideixen el pla del quadre i el pla del terra? És a dir, en el pla és certa

⁵⁰Bosse fou un ferm partidari d'explicar els principis generals de la perspectiva de Desargues als alumnes de l'Académie Royale de Peinture et Sculpture, perquè opinava que aquesta era l'única manera de revelar les lleis de l'art del disseny i de la pintura. Això li comportà greus problemes que van desembocar en la seva expulsió de l'Académie, el mes de maig de 1661. Vegeu LE GOFF [1981–82], BOTTINEAU [1994] i FLOCON [1994].

⁵¹A les pàgines 203–204 de TATON [1951], aquest autor es pregunta si el teorema és original de Desargues, tenint en compte que a EECKE [1933] II, 488 de l'edició de 1982, Pappo comenta una qüestió similar dels *Porismes* d'Euclides. Finalment s'inclina a pensar en la seva originalitat inspirada en la pràctica perspectiva.

⁵²En aquestes qüestions queden inclosos els punts de l'infinit determinats per famílies de rectes paral·leles.

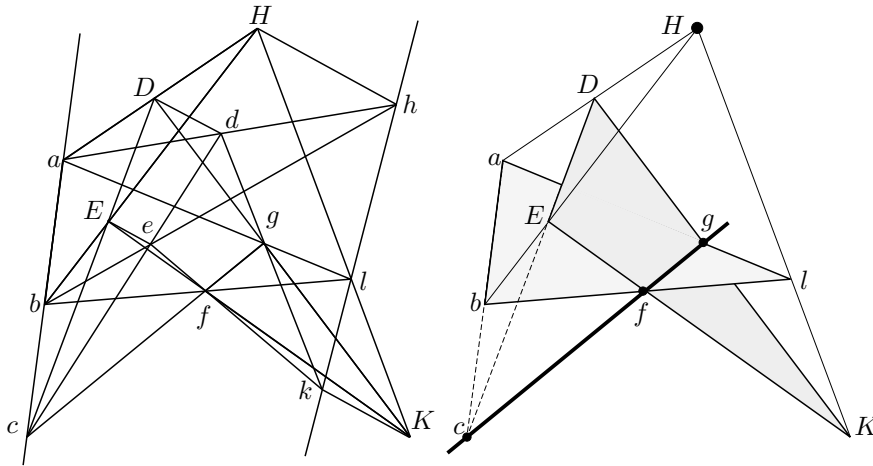
l'equivalència

$$\left. \begin{array}{l} AA', BB', CC' \\ \text{convergeixen en un punt } O \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} P = AB \cap A'B', Q = AC \cap A'C', \\ R = BC \cap B'C' \text{ estan alineats?} \end{array} \right.$$

Desargues demostra el teorema directe a l'espai utilitzant propietats d'incidència. En el cas que els triangles es troben en un mateix pla utilitza consideracions mètriques i, més concretament, el teorema de Menelau. En el teorema recíproc a l'espai també fa ús de la incidència, i en el pla es recolza directament en el cas directe. També tracta el cas en què les rectes que uneixen els vèrtexs dels dos triangles «tendeixen a un punt a distància indeterminada», és a dir en què són paral·leles. Passem a estudiar quina és la seva manera d'actuar amb el suport de la figura que acompanya la seva exposició, la qual hem reproduït a la part esquerra del gràfic adjunt.⁵³

Teorema directe

Quan les rectes HDa , HEb , cED , lga , lfb , HlK , DgK , EfK , sigui en diversos plans, sigui en el mateix, es tallen les unes amb les altres, en qualsevol ordre i inclinació que pugui ser en aquests punts; els punts c , f , g estan en una recta cfg .



La situació que tracta en la seva demostració correspon a la figura de la dreta, en què s'ha intentat de representar la perspectiva, des de H , del pla del triangle DEK , sobre el pla del triangle abl . La recta cfg és la intersecció dels dos plans. La demostració es desenvolupa més o menys així:

1r cas: Les rectes estan en plans diferents.

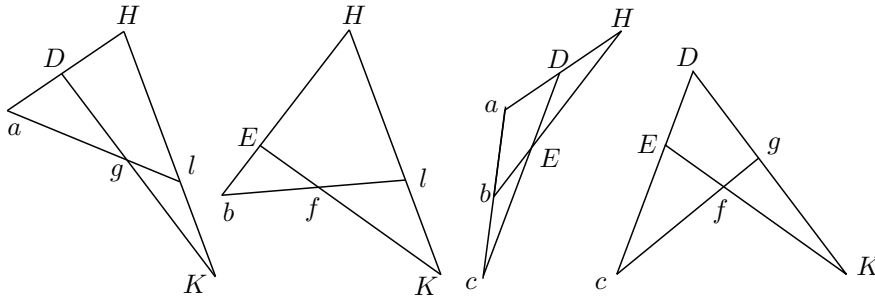
⁵³Vegeu TATON [1951] 206–207 de l'edició de 1988, i FIELD–GRAY [1987], 161–164.

- En ser, per les hipòtesis de sortida, HDa i HEb dues rectes, $abDE$ està contingut en un pla. Llavors, si $c = ab \cap DE$, Desargues considera de sortida les rectes abc i DEc . De la mateixa manera, considera les rectes lga , lfb , DgK i KfE , en què $g = al \cap DK$ i $f = bl \cap EK$.
- Les rectes abc , lga i lfb , determinen el triangle abl , i el pla que determinen conté els punts c , f i g .
- Les rectes DEc , DgK i KfE , determinen el triangle DEK , i el pla que determinen també conté els punts c , f i g .

Llavors, en ser la intersecció dels dos plans una línia recta, aquesta conté els punts c , f i g .

2n cas: Les rectes estan en el mateix pla.

Aplica el teorema de Menelau a les tres configuracions $DHKagl$, $KHElfb$ i $DEHabc$, —vegeu les tres primeres figures del gràfic adjunt—, i obté,



$$\frac{gD}{gK} = \frac{Hl}{lK} \cdot \frac{aD}{aH}, \quad \frac{Kf}{fE} = \frac{Kl}{lH} \cdot \frac{Hb}{Eb}, \quad \frac{aD}{aH} = \frac{cD}{cE} \cdot \frac{bE}{bH}.$$

Llavors, d'aquestes tres igualtats obté,

$$\frac{cD}{cE} = \left(\frac{gD}{gK} \cdot \frac{lK}{Hl} \right) \cdot \left(\frac{lH}{Kl} \cdot \frac{Kf}{fE} \right) = \frac{gD}{gK} \cdot \frac{Kf}{fE}.$$

Consegüentment, pel recíproc del teorema de Menelau, —vegeu la quarta figura del gràfic anterior—, aplicat sobre la configuració $DKEfgc$, els punts f , g i c estan alineats.

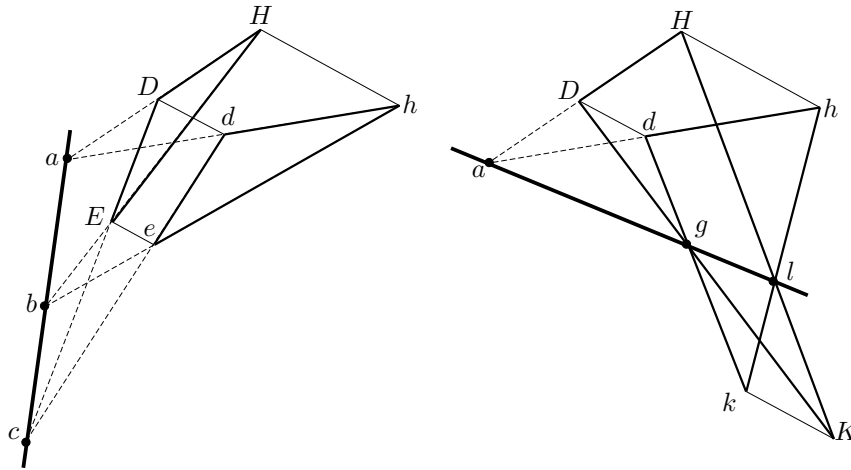
Teorema recíproc i casos especials

No entrarem en detalls i apuntem, sense estudiar-ho, que estableix que si c , f i g estan alineats, i HDa , HEb són línies rectes, llavors $l \in HK$. Per a la seva demostració, en el cas de l'espai utilitza arguments d'incidència, i en el cas pla fa un raonament que utilitza el teorema directe.

Després del teorema recíproc, fa un tractament a part dels casos de les parelles de triangles,

$$(DHE, dhe), (DHK, dhk), (DEK, dek), (HEK, hek),$$

en què les rectes Dd, Hh, Ee i Kk «tendeixen a un punt a distància indeterminada», és a dir, en què són paral·leles. Adjuntem els gràfics de dos dels quatre casos possibles:⁵⁴



En la demostració també utilitza arguments d'incidència per al cas de l'espai, mentre que per al cas pla suggereix una demostració a partir de les propietats projectives de l'espai, sense detallar-la:

I totes aquestes rectes estan en un mateix pla $cbagfl$, dividides per aquestes paral·leles $[Dd, Hh, Ee$ i $Kk]$ que passen per H, D, E i K , cadascuna de manera semblant a la seva corresponent en la figura de diversos plans. Així la figura que les paral·leles han definit en el pla $hdabcedgfl$, correspon recta a recta, punt a punt, i raó a raó, a aquella $abcEHlKgf$ de diversos plans. I es poden discutir les seves propietats d'igual manera en una com en l'altra, i per aquest mitjà prescindir d'aquella en relleu substituint-la per aquella d'un sol pla.

Comentari final

Una de les característiques de l'actuació de Desargues és que quan treballa amb triangles en plans diferents, la seva demostració deriva de les propietats d'incidència a l'espai; però, per al cas pla, recorre a consideracions mètriques. La

⁵⁴Per als altres dos casos vegeu l'activitat 7.8.1.

qüestió que es planteja és que si el teorema només es refereix a qüestions d'incidència i paral·lelisme [incidència en un punt de l'infinit], seria possible demostrar el cas pla sense recórrer a consideracions mètriques o, en última instància, als axiomes de congruència? En els *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert, trobem la resposta.⁵⁵ Allí s'estableix:

- En una geometria basada en tots els axiomes d'incidència del pla, ordre, congruència, paral·leles i continuïtat, amb excepció de l'axioma de congruència de triangles C-A-C, no es verifica el teorema.
- En una geometria basada en els axiomes d'incidència del pla i de l'espai, ordre i paral·leles, es verifica el teorema.⁵⁶
- Condició necessària i suficient perquè una geometria en què se satisfan els axiomes d'incidència del pla, ordre i paral·lelisme, pugui ser concebuda com una part d'una geometria espacial en què es compleixen tots els axiomes d'incidència, ordre i paral·lelisme, és que sigui vàlid el teorema de Desargues.

Activitats 7.8

B 1. Presenteu les configuracions de triangles en perspectiva que resulten del gràfic de Bosse, presentat a la pàgina 367, quan es consideren:

S i) Les paral·leles que uneixen els vèrtexs Dd , Ee i Kk , i les que uneixen els vèrtexs Hh , Ee i Kk .

ii) El centre de perspectiva l i el centre de perspectiva K .

S 2. Visualitzeu amb el CABRI, el teorema directe de Desargues.

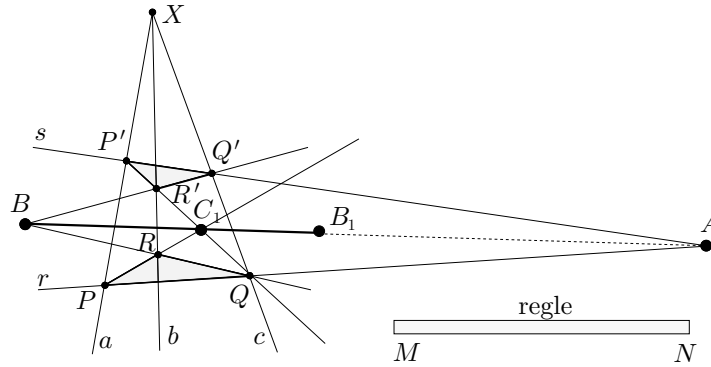
3. Observeu la configuració adjunta en què es visualitza el teorema de Desargues sobre els triangles PQR i $P'Q'R'$.⁵⁷

⁵⁵Vegeu HILBERT [1899], 91–113 de l'edició espanyola de 1991.

⁵⁶Aquests dos primers resultats venen a dir que si no tenim el recurs de submergir el pla en l'espai de tres dimensions, sense el concurs dels axiomes de congruència o alguna axiomàtica equivalent no es verifica el teorema de Desargues. A EFÍMOV [1978], 213–216 de l'edició espanyola de 1984, podeu trobar una demostració d'aquest teorema, basada únicament en els axiomes d'incidència de Hilbert per a l'espai, als quals s'ha afegit que:

- A cada recta hi ha un mínim de tres punts.
- Dues rectes qualssevol, en un mateix pla, tenen algun punt en comú.

⁵⁷Aquesta activitat ha estat elaborada a partir d'una presentació d'EVES [1963], I, 207 de l'edició de 1969.



i) Ideu un mètode per traçar un segment AB , amb regle sol, si el regle MN té longitud menor que la distància que separa A i B . [En el gràfic es compleix $BB_1 = MN$.]

ii) Elaboreu una visualització pas a pas del mètode amb el CABRI, i una macro basada en el mètode creat, que simplifiqui el traçat complet del segment AB .

S

□

7.5.2 La involució

A partir de les lectures dels autors clàssics, concretament d'Apolloni i Pappo, i de la seva pròpia experiència en els problemes pràctics de la perspectiva, és molt probable que Desargues concebís les primeres intuïcions per elaborar la seva teoria de les còniques, amb el recurs a l'espai tridimensional. L'objectiu, davant les dificultats de les concepcions espacials, era el de reduir els seus raonaments a raonaments sobre el pla. Segons Taton,⁵⁸ «per a això, n'hi havia prou amb no considerar l'espai tot sencer, sinó portar l'atenció sobre una figura plana donada i la seva transformada per perspectiva, de manera que aquesta última pogués ser fàcilment restablerta en el pla de la figura inicial». Això és el que Desargues proposa en el *Brouillon project*. Per aconseguir-ho introdueix un concepte fonamental, la *involució*, que tracta sobre un cert tipus de relació entre sis punts sobre una recta. Aquest nou concepte li permet d'establir el teorema de la involució sobre una cònica, el qual estarà en la base de gran nombre de propietats que estudia posteriorment. La importància de la relació d'involució rau en la seva invariància quan se sotmet la recta, sobre la qual es troben els punts relacionats, a una projecció, des d'un punt, sobre una altra recta. La invenció d'aquest concepte hagués pogut estar inspirada en la lectura de l'obra de Pappo, concretament dels seus lemes sobre *La secció determinada* i els *Porismes* d'Euclides,⁵⁹ els quals contenen casos particulars de la relació d'involució. D'altra

⁵⁸Vegeu TATON [1951], 96.

⁵⁹Vegeu EECKE [1933], 530–596 i 669–717 de l'edició de 1982.

banda, Desargues podria haver establert paral·lelismes entre les relacions presentades per Pappo i les successions de nombres concrets que intervenien en les construccions d'escapes per a les representacions perspectives. El que és cert és que aquesta qüestió encara resta, actualment, molt oberta.⁶⁰ Pretenem, fugint del llenguatge inventat per Desargues, presentar aquest concepte, la demostració d'invariància que en fa Desargues, el teorema de la involució, i la seva aplicació a la demostració de l'existència de la recta polar d'un punt respecte d'una cònica. Acabarem amb l'aplicació de la propietat de la polar, al traçat de tangents.

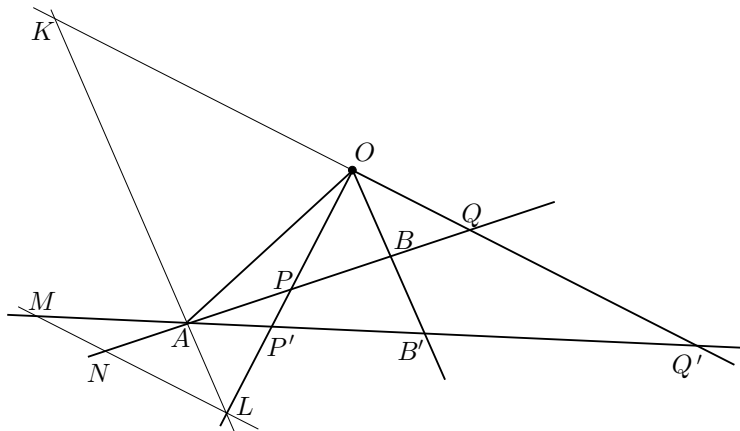
La raó doble a Pappo

Abans de presentar el tractament de Desargues, mostrarem un exemple dels coneixements que hagués pogut adquirir dels autor clàssics, i que possiblement contribuïren a la introducció de la involució. Estudiarem la proposició 129 del llibre VII de la *Col·lecció Matemàtica* de Pappo. Allí, aquest autor estudia la *raó doble* o *anharmònica* de quatre punts A, B, P i Q sobre una recta. Adaptant-ne el llenguatge la representem per⁶¹

$$(AB, PQ) = \frac{AP}{AQ} : \frac{BP}{BQ} = \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}.$$

Concretament, demostra que si projecta A, B, P i Q sobre una altra recta, des d'un punt O , de manera que A es transformi en ell mateix, i els altres en B', P' i Q' , llavors la raó es conserva; és a dir

$$(AB, PQ) = (AB', P'Q').$$



Per a la seva demostració traça les línies auxiliars següents:

⁶⁰Vegeu TOSSUT [1995].

⁶¹La notació (AB, PQ) és introduïda per Möbius el 1827. El terme *raó doble* és de Jacob Steiner, mentre que a CHASLES [1837], 34 de l'edició de 1989, trobem el terme *raó anharmònica*.

- La recta AL paral·lela a OB , la qual talla OQ en el punt K , i OP en el punt L .
- La recta paral·lela, per L , a OQ , la qual talla AQ en el punt N , i AQ' en el punt M .

Llavors, mitjançant la composició de raons i les semblances de triangles

$$ALM \sim AKQ' \quad AP'L \sim B'P'O \quad AKQ' \sim B'OQ',$$

pot escriure,

$$\begin{aligned} \frac{AP'}{AM} &= \frac{AP'}{AL} \cdot \frac{AL}{AM} = \frac{P'B'}{OB'} \cdot \frac{AK}{AQ'} = \\ &= \frac{P'B'}{OB'} \cdot \frac{OB'}{B'Q'} = \frac{P'B'}{B'Q'}. \end{aligned}$$

Això implica que

$$\frac{AP' \cdot B'Q'}{AQ' \cdot B'P'} = \frac{AM \cdot B'P'}{AQ' \cdot B'P'} = \frac{AM}{AQ'} = \frac{AL}{AK}. \quad (7.3)$$

De la mateixa manera, de les semblances de triangles

$$ALN \sim AKQ \quad APL \sim BPO \quad AKQ \sim BOQ,$$

s'obté

$$\begin{aligned} \frac{AP}{AN} &= \frac{AP}{AL} \cdot \frac{AL}{AN} = \frac{PB}{OB} \cdot \frac{AK}{AQ} = \\ &= \frac{PB}{OB} \cdot \frac{OB}{BQ} = \frac{PB}{BQ}. \end{aligned}$$

Això implica que

$$\frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP} = \frac{AN \cdot BP}{AQ \cdot BP} = \frac{AN}{AQ} = \frac{AL}{AK} \quad (7.4)$$

Llavors, de les igualtats (7.3) i (7.4) s'obté,

$$(AB, PQ) = (AB', P'Q').$$

Aquest resultat té algunes conseqüències immediates que estudiarem a l'activitat 7.9.1. La primera és que la raó doble es conserva, en general, per projecció, sense necessitat que A es transformi en ell mateix. Una altra conseqüència és la conservació per projecció de la propietat de conjugació harmònica de dues

parelles de punts. Recordem que donats quatre punts diferents A, B, C i D , la parella AB és *conjugada harmònica* de la CD si es compleix

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}.$$

Aquest concepte és important de cara a molts tipus de construccions, com per exemple la del traçat de tangents a les còniques.⁶²

Activitats 7.9

B 1. Siguin els punts A, B, P i Q sobre una recta.

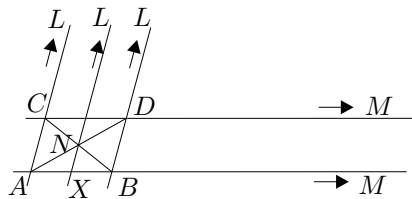
P i) Demostreu que si els projectem, des d'un punt O , sobre una altra recta, de manera que resulten A', B', P' i Q' , llavors es conserva la raó doble. És a dir

$$(AB, PQ) = (A'B', P'Q').$$

Indicació: Traceu la línia auxiliar AQ' i apliqueu dues vegades el resultat de la proposició VII.129 de Pappo.

S ii) Considereu el cas en què AB i PQ són parelles conjugades harmòniques. Demostreu que $A'B'$ i $P'Q'$, també ho són.

2. Situem-nos en el terreny de les transformacions perspectives. Imagineu que tenim en el pla del terra, una configuració de rectes com les del gràfic adjunt.



Observem que tenim les paral·leles AB i CD , i les paral·leles AC, BD i LN , en què $N = AD \cap BC$ i $X = LN \cap AB$. Considerem M el punt de l'infinit de la primera parella de restes, i L el punt de l'infinit de les altres tres.

i) Dibuixeu la configuració resultant en el pla del quadre.

ii) Estudieu en el pla del terra la relació entre MA/MB i XA/XB .

Indicació: Considereu
$$\frac{MA}{MB} = \lim_{\substack{P \in AB \\ P \rightarrow \infty}} \frac{PA}{PB}.$$

iii) Traduiu la relació descoberta a l'apartat anterior sobre el pla del quadre.

S

iv) Quan tenim dues parelles AB i PQ conjugades harmòniques, també es diu que el punt Q és el quart harmònic dels punts A , B i P . El problema de la seva construcció ja ha estat tractat en aquest treball, de la qual cosa hem fet referència a la nota 62 d'aquest capítol. Fins aquest moment la construcció s'ha fet amb regla i compàs, però els resultats d'aquesta activitat permeten elaborar una construcció amb regla sol. Justifiqueu-ho, descriviu els passos de la construcció i elaboreu-ne una visualització i una macro amb el CABRI.

3. Amb l'ajut dels resultats de l'activitat anterior, solucioneu, amb regla sol, les qüestions següents:

- Donat un segment AB i una recta paral·lela t a AB , construïu el punt mitjà de AB .
- Donat el segment AB , el seu punt mitjà P , i un punt C , exterior a la recta que conté AB , construïu la recta, per C , paral·lela a AB .

S

□

Definició i invariància de la relació d'involució

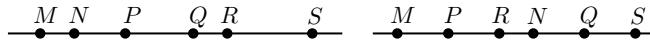
Desargues no treballa amb la raó doble de quatre punts, sinó amb un concepte més general que implica sis punts i la igualtat de dues raons dobles. Concretament, per a Desargues, tres parelles de punts AB , CD , EF sobre una recta, estan en involució si

$$\frac{DE \cdot DF}{CE \cdot CF} = \frac{DA \cdot DB}{CA \cdot CB},$$

i les parelles són mesclades o no mesclades.⁶³ Desargues tracta el concepte en profunditat i demostra, entre d'altres coses, que si es canvia l'ordre de les parelles,

⁶²Notem que hem trobat punts que complien aquesta relació a les seccions 190, pàgina 142, 6.5, pàgina 323, i a l'activitat 5.4.1, pàgina 230.

⁶³Dues parelles són mesclades, si un punt de cada parella està entre dos punts de l'altra. Si això no passa, són no mesclades. Llavors, més de dues parelles són mesclades, si ho són de dues en dues; i són no mesclades si són no mesclades de dues en dues.



En el gràfic de l'esquerra de la figura adjunta, MN , PQ , RS són parelles no mesclades, i en el de la dreta són mesclades.

Notem que la igualtat de la definició és equivalent a

$$\frac{DE \cdot CA}{DA \cdot CE} = \frac{DB \cdot CF}{DF \cdot CB}.$$

Llavors, en el llenguatge de la raó doble es podria escriure com

$$(DC, EA) = (DC, BF).$$

aquestes segueixen estan en involució. També tracta alguns casos particulars, concretament ens interessa citar aquell en què els dos punts de dues parelles coincideixen. És a dir, el cas en què es consideren les parelles AA , CD , EE . Llavors, si estan en en involució podem escriure

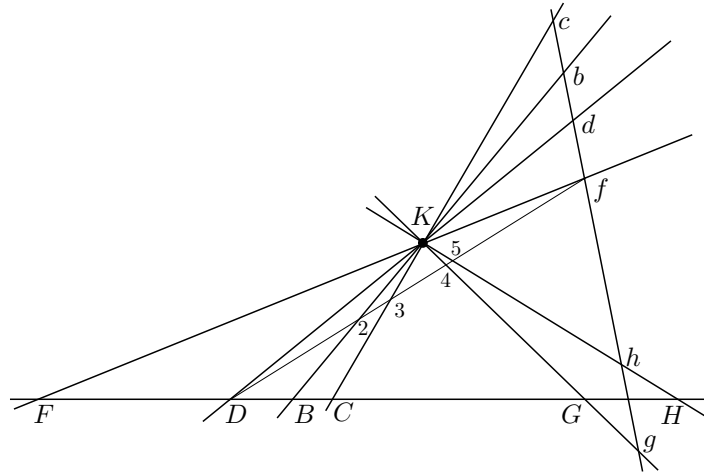
$$\frac{DE^2}{CE^2} = \frac{DA^2}{CA^2} \iff \frac{DE}{CE} = \frac{DA}{CA} \iff \frac{DE}{CE} \cdot \frac{CA}{DA} = 1.$$

En aquest cas es diu que A , C , D , E són quatre punts en involució. També hem dit que A , E , són conjugats harmònics de C , D .

Amb la presentació i demostració del teorema de Menelau, com a lema previ, demostra la invariància de la involució per projeccions. Concretament, demostra la proposició següent:⁶⁴

Siguin els punts F , D , B , C , G i H sobre una recta, i el punt K exterior a aquesta recta. Siguin les rectes FK , DK , BK , CK , GK i HK que tallen una altra recta, que no conté K , en f , d , b , c , g i h . Llavors, BH , DF , CG estan en involució implica que bh , df , cg estan en involució. És a dir

$$\frac{DG \cdot DC}{FG \cdot FC} = \frac{DB \cdot DH}{FB \cdot FH} \implies \frac{dg \cdot dc}{fg \cdot fc} = \frac{db \cdot dh}{fb \cdot fh}.$$



Per demostrar-ho, traça la recta Df , la qual talla BK , CK , GK , HK , en els punts 2, 3, 4, 5, i treballa amb les diferents configuracions de Menelau que resulten a partir dels triangles Dfd i DFf .

De la configuració $DfdK4g$ obtenim,

$$\frac{DK}{Kd} = \frac{D4}{4f} \cdot \frac{gf}{dg} \implies \frac{dg}{fg} = \frac{D4}{4f} \cdot \frac{Kd}{DK}. \quad (7.5)$$

⁶⁴Vegeu TATON [1951] 126–129 de l'edició de 1988, i FIELD–GRAY [1987], 92–95.

De la configuració $DfdK3c$ obtenim,

$$\frac{D3}{3f} = \frac{DK}{Kd} \cdot \frac{dc}{fc} \implies \frac{dc}{fc} = \frac{D3}{3f} \cdot \frac{Kd}{DK}. \quad (7.6)$$

Per tant, de les igualtats (7.5) i (7.6),

$$\frac{dg \cdot dc}{fg \cdot fc} = \frac{D4 \cdot D3}{4f \cdot 3f} \cdot \left(\frac{Kd}{DK} \right)^2. \quad (7.7)$$

A més, de la configuració $DfFK4G$ obtenim,

$$\frac{fK}{KF} = \frac{f4}{4D} \cdot \frac{GD}{GF} \implies \frac{D4}{4f} = \frac{GD}{GF} \cdot \frac{KF}{fk}. \quad (7.8)$$

De la configuració $DfFK3C$ obtenim,

$$\frac{fK}{KF} = \frac{f3}{3D} \cdot \frac{CD}{CF} \implies \frac{D3}{3f} = \frac{CD}{CF} \cdot \frac{FK}{fK}. \quad (7.9)$$

Llavors, de les igualtats (7.7), (7.8) i (7.9) s'obté, per composició de raons,

$$\frac{dg \cdot dc}{fg \cdot fc} = \frac{GD \cdot CD}{GF \cdot CF} \cdot \left(\frac{FK}{fK} \right)^2 \cdot \left(\frac{dK}{DK} \right)^2. \quad (7.10)$$

De la mateixa manera, si es treballa amb les configuracions $Dfd2Kb$, $DfdK5h$, $DfFK2B$ i $DfFK5H$ s'obté

$$\frac{db \cdot dh}{fb \cdot fh} = \frac{BD \cdot HD}{BF \cdot HF} \cdot \left(\frac{FK}{fK} \right)^2 \cdot \left(\frac{dK}{DK} \right)^2. \quad (7.11)$$

Consegüentment, de les igualtats (7.10) i (7.11), obtenim

$$\frac{DG \cdot DC}{FG \cdot FC} = \frac{DB \cdot DH}{FB \cdot FH} \implies \frac{dg \cdot dc}{fg \cdot fc} = \frac{db \cdot dh}{fb \cdot fh}.$$

Observem que un corol·lari d'aquest teorema és que una projecció conserva la relació de quatre punts en involució o de conjugació harmònica. És a dir que si $G = C$, $B = H$, $g = c$ i $b = h$, llavors

$$\frac{DC}{FC} = \frac{BD}{BF} \implies \frac{dc}{fc} = \frac{bd}{bf}.$$

El teorema de la involució

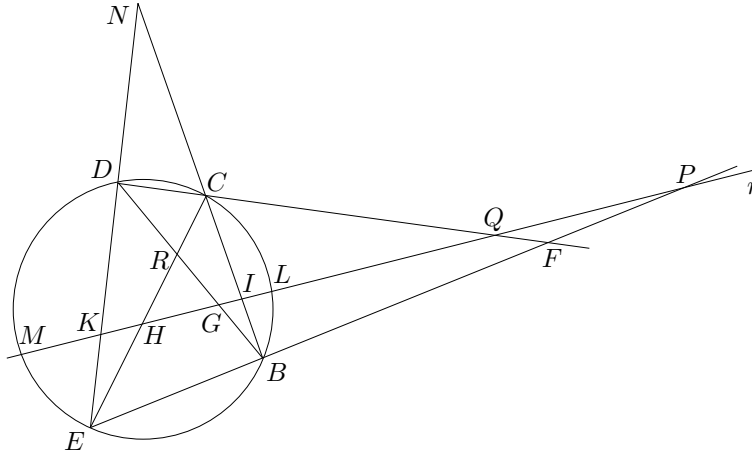
Aquest teorema es fonamental per a tota presentació posterior de Desargues. Apuntarem les fases de la demostració i deixarem la seva compleció, per a l'activitat 7.10.1.⁶⁵

Sigui $BCDE$ un quadrilàter inscrit en una cònica, i siguin els punts $N = BC \cap DE$, $F = CD \cap BE$ i $R = BD \cap CE$. Sigui r una línia qualsevol de manera que

$$P = BE \cap r \quad I = BC \cap r \quad G = BD \cap r \quad L = \text{cònica} \cap r$$

$$Q = CD \cap r \quad K = DE \cap r \quad H = CE \cap r \quad M = \text{cònica} \cap r.$$

Llavors, qualssevol tres parelles entre les quatre PQ , IK , GH i LM , estan en involució.



La demostració consta de diverses etapes:

– Primerament prescindem de la cònica i demostra que PQ , IK , GH estan en involució. Ho fa, utilitzant el teorema de Menelau sobre les configuracions $FPQCIB$ i $FPQDKE$.

– En segon lloc considera la cònica i divideix l'estudi en dues fases:

Quan el perímetre de la corba de qualsevol secció del corró [cilindre o con], passa a través dels punts B , C , D i E , aquells que vulguin cercar una demostració amb les mateixes paraules per a totes les espècies ho podran fer; tanmateix, aquí es fa la demostració en dues fases, primerament quan és el perímetre d'un cercle el que hi passa, i després, per a qualsevol d'aquestes altres espècies de seccions del corró.

⁶⁵Vegeu TATON [1951] 143–147 de l'edició de 1988, i FIELD–GRAY [1987], 106–110.

Així demostra, primerament, que PQ , IK i LM estan en involució quan la cònica és una circumferència. Ho fa utilitzant el resultat de la primera fase i la propietat de la potència d'un punt, per als punts P i Q .⁶⁶

Per al cas de qualsevol cònica, diu que només cal construir el con que conté el perímetre d'aquesta secció i considerar la seva base circular. Llavors, es consideren, en el pla d'aquesta, les interseccions de totes les línies que passen pel vèrtex del con i els punts sobre el pla de la cònica citats a l'enunciat; també es consideren els plans que passen pel vèrtex del con i contenen totes les línies implicades en el pla de la cònica. Llavors, les parelles $P'Q'$, $I'K'$, $G'H'$ i $L'M'$ que resulten en el pla del cercle, s'ha demostrat que estan en involució. Per tant, les parelles PQ , IK , GH i LM , en el pla de la cònica, també estan en involució, perquè han resultat de la projecció de les anteriors des del vèrtex del con.⁶⁷

La polar d'un punt respecte d'una cònica. Tangents

Aquest és un bon exemple per veure una de les aplicacions que Desargues fa del teorema de la involució. Donada una cònica, un punt F , i les secants FLM a la cònica per aquest punt, es tracta de veure que el lloc geomètric dels punts H tals que FH i LM són dues parelles en involució —conjugades harmòniques—, està sobre una recta.⁶⁸ Concretament, demostra la proposició següent:

Inscriuim el quadrilàter $BCDE$ en una cònica i considerem els punts,

$$\begin{aligned} G &= BD \cap CE & N &= CD \cap BE & F &= BC \cap DE & X &= FG \cap CD \\ Y &= FG \cap BE & L &= \text{cònica} \cap FH & M &= \text{cònica} \cap FH. \end{aligned}$$

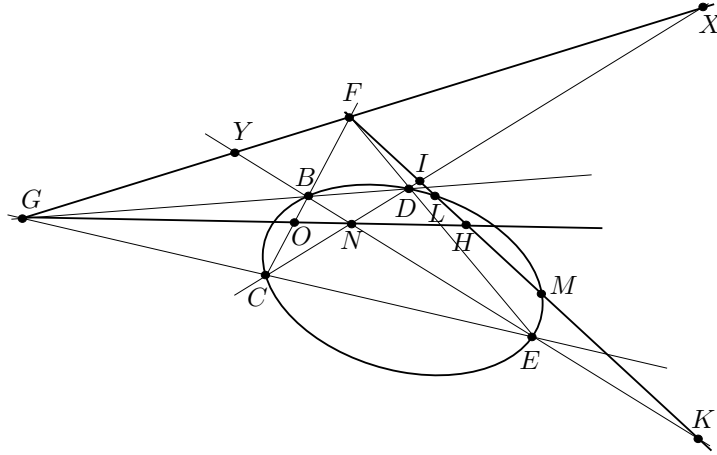
Llavors, per a qualsevol punt H de la recta GN es compleix

$$\frac{LF}{MF} = \frac{LH}{MH}.$$

⁶⁶Vegeu les proposicions III.35 i III.36 dels *Elements* d'Euclides, i l'estudi fet a la secció 2.6.4 i a l'activitat 2.8.1 d'aquest treball.

⁶⁷Com apunta Taton, «aquesta és la primera intervenció clara de la perspectiva com a mètode de demostració geomètrica.»

⁶⁸Desargues l'anomena «"traverse" de les rectes FLM de l'ordenació de fita F ». Aquesta serà la recta polar de F respecte de la cònica. Vegeu la definició i la demostració d'existència a TATON [1951] 138, 152–155 de l'edició de 1988, i FIELD–GRAY [1987], 102–103, 115–118.



La demostració que fa consta de les etapes següents:

1) GF i XY estan en involució. Per veure-ho utilitza el teorema de Menelau sobre les configuracions $NDXYGB$, $ECGYXN$, $XFYNED$ i $CNXFYB$, i obté

$$\frac{ND}{NX} = \frac{NB}{BY} \cdot \frac{GY}{GX}; \quad \frac{GX}{GY} = \frac{CX}{CN} \cdot \frac{EN}{EY}; \quad \frac{FX}{FY} = \frac{DX}{DN} \cdot \frac{EN}{EY}; \quad \frac{FY}{FX} = \frac{BY}{BX} \cdot \frac{CN}{CX}.$$

Llavors, si componem raons,

$$\left(\frac{GX}{GY}\right)^2 = \frac{CX \cdot EN}{CN \cdot EY} \cdot \frac{NB \cdot BY}{DX \cdot ND} = \left(\frac{FX}{FY}\right)^2.$$

2) OF i BC estan en involució, perquè es conserva la relació d'involució de GF i XY si es projecta des de N sobre FC .

3) FH i IK estan en involució, perquè es conserva la relació d'involució de OF i BC si es projecta des de N sobre FK .

4) FH i PQ estan en involució, perquè es conserva la relació d'involució de OF i BC si es projecta des de G sobre FK .

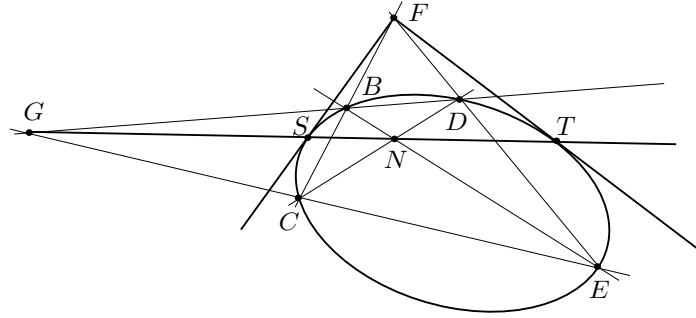
5) Pel teorema de la involució sobre una cònica, IK , PQ i LM estan en involució. Llavors, —per una propietat de la involució que ha demostrat al principi del seu treball—,⁶⁹ d'aquesta involució i de les dues anteriors a les etapes (3) i (4), es conclou que FH i LM estan en involució.

⁶⁹Vegeu TATON [1951], 125, de l'edició de 1988, i FIELD-GRAY [1987], 90. Presentar aquesta propietat seria massa extens, per la qual cosa proposem una demostració alternativa d'aquest últim apartat.

Un cop establerta la demostració, podem presentar la construcció de la recta polar del punt F , —sobre la qual es troben els punts H tals que $LF/MF = LH/MH$ —, de la manera següent:

- Inscrivim un quadrilàter $BCDE$ en la cònica tal que $F = BC \cap DE$.
- Construïm la recta GN tal que $G = BD \cap CE$ i $N = BE \cap CD$, la qual és la polar cercada.

A partir d'aquest resultat, presenta el traçat de les tangents des d'un punt F exterior a la cònica de forma immediata. Observa que aquestes tangents són les rectes que passen pel punt F i pels punts T i S d'intersecció de la cònica amb la recta GN polar de F .



Efectivament, considerem la recta FT . Si no fos tangent, tallaria la cònica en un altre punt K i, per la propietat de la polar tindriem $FT/FK = TT/TK = 0$. Això implicaria $F = T$, la qual cosa no és veritat perquè F és exterior a la cònica.

Activitats 7.10

1. Completeu la demostració del teorema de la involució per al cas del cercle. P

2. Utilitzeu el CABRI per: S

Pel teorema de la involució FF , LM i IK estan en involució i, per tant,

$$\frac{LF \cdot LF}{MF \cdot MF} = \frac{LI \cdot LK}{MI \cdot MK}, \quad \frac{IF \cdot IF}{KF \cdot KF} = \frac{IL \cdot IM}{KL \cdot KM} \tag{7.12}$$

Llavors, tenint en compte l'etapa (3) obtenim

$$\frac{IF \cdot IH}{KF \cdot KH} = \frac{IF^2}{KF^2} = \frac{IL \cdot IM}{KL \cdot KM} \implies IK, FH, LM, \text{ estan en involució.}$$

Per tant, si tenim present la igualtat (7.12),

$$\frac{LF \cdot LF}{MF \cdot MF} = \frac{LI \cdot LK}{MI \cdot MK} = \frac{LF \cdot LH}{MF \cdot MH} \implies \frac{LF}{MF} = \frac{LH}{MH}.$$

- \overline{B} **i)** *Elaborar un fitxer CABRI en què es visualitzi, pas a pas, la construcció de la polar d'un punt respecte d'una cònica, i la de les tangents per un punt exterior.*
- ii)** *Crear dues macros: una que proporcioni la polar de qualsevol punt respecte d'una cònica, i una altra que proporcioni les tangents per un punt exterior a la cònica.*
- \square **iii)** *Utilitzeu la primera macro per comprovar que les rectes polars dels punts que pertanyen a la polar de F , passen per F .*

□

Capítol 8

Fonts

8.1 Aristòtil

8.1.1 Fragment 76a 31–76b 23 dels *Segons Analítics*

Anomeno principis en cada gènere aquells que no és possible demostrar la veritat. Es dona, doncs, per suposat què signifiquen les coses primeres i les derivades d'elles; quant a l'existència cal assumir-la en el principis i demostrar-la en les altres coses. Així, què és la unitat, la recta i el triangle, i que la unitat i la magnitud existeixen s'ha de donar per suposat, les altres coses s'han de demostrar. Entre el principis que utilitzem en les ciències demostratives, uns són propis de cada ciència, i d'altres són comuns, encara que comuns per analogia, perquè es pot utilitzar només el que està inclòs en el gènere subordinat a la ciència en qüestió. Per exemple, són principis propis les definicions de línia i de línia recta; mentre que és un principi comú: si es treuen coses iguals de coses iguals les que queden són iguals. I cadascun d'aquests és adequat en el seu gènere; efectivament, serà igualment cert encara que no faci referència a totes les coses sinó només a les magnituds en geometria i als nombres en aritmètica.

Són també principis propis d'una ciència les coses de les quals s'accepta l'existència i en les que troba les propietats essencials que ella estudia. Així, l'aritmètica admet les unitats, i la geometria els punts i les línies. En efecte accepten sense demostració l'existència i la definició d'aquestes coses. A més el significat de cadascuna de les propietats essencials es dona per suposat. Per exemple: l'aritmètica admet el sentit de les paraules parell o senar, quadrat, cub, i la geometria el dels termes irracional, estar trencat, estar inclinat; però, quant a l'existència d'aquestes propietats es demostra mitjançant els principis comuns i les coses ja demostrades. El mateix passa amb l'astronomia. En efecte, tota ciència demostrativa es refereix a tres coses: en primer lloc aquelles tals que la seva existència s'admet sense demostració, és a dir el gènere del que la ciència estudia les propietats essencials; en segon lloc les nocions comunes anomenades axiomes, a partir de les quals com a nocions primeres, es demostra; i en tercer lloc, les propietats de les quals es suposa conegut el significat.

Tanmateix, en el cas d'algunes ciències, pot succeir que es prescindeixi d'alguna d'aquestes coses, per exemple no ocupar-se d'establir que el gènere existeix si és evident que existeix (que existeixi el nombre no està igual de clar que el fet que existeixi el fred i el calent), i no ocupar-se d'interpretar que signifiquen les propietats si estan clares; com no ocupar-se tampoc d'interpretar que signifiquen les nocions comunes, com la de treure coses iguals de coses iguals per ser evidents. Però no per això deixen de ser tres per naturalesa aquestes coses: allò del que es demostra alguna cosa, allò que es demostra i allò a partir del qual es demostra.

8.2 Michel Chasles

8.2.1 Fragment de l'*Aperçu* sobre les *Còniques* d'Apol·loni

Apol·loni composà sobre les seccions còniques un tractat en vuit llibres. Els quatre primers contenien tot allò que s'havia escrit abans d'ell sobre aquesta matèria, de les quals ell només havia generalitzat algunes parts; aquesta part rebia el nom d'*Elements de les còniques*; els altres quatre contenien les invencions pròpies d'aquest gran geòmetra.

Va ser Apol·loni el primer a considerar les còniques en un con oblic qualsevol de base circular; fins aquell moment no se les havia concebut més que en el con recte o de revolució; i encara s'havia suposat sempre el pla de secció perpendicular a una de les arestes del con; això obligava a considerar tres cons d'obertura diferent, per formar les tres seccions còniques. Es designaven aquestes corbes amb els termes *secció del con acutangle*, *secció del con obtusangle* i *secció del con rectangle*; no adquiriren els noms d'*el·lipse*, d'*hipèrbola* i de *paràbola* fins l'obra d'Apol·loni.

Tot aquest savi tractat reposa, quasi bé, sobre una propietat única de les seccions còniques, la qual deriva del con on aquestes corbes s'han format. Aquesta propietat, que ignoren la majoria dels tractats moderns, mereix que la donem a conèixer aquí, com a clau de tota la doctrina dels Antics, i com a absolutament necessària per la comprensió de les seves obres.

Considerem un con oblic de base circular, la recta traçada des del seu vèrtex al centre del cercle que li serveix de base s'anomena l'*eix* del con. El pla traçat per l'eix, perpendicularment al pla de la base, talla el con seguint dues arestes, i determina en el cercle un diàmetre: el triangle que té per base aquest diàmetre, i per costats les dues arestes, s'anomena *triangle per l'eix*.¹ Apol·loni suposa, per formar les seves seccions còniques, el pla que talla perpendicularment al pla del triangle per l'eix.² Els punts en què aquest pla troba els dos costats d'aquest triangle són els *vèrtexs* de la corba; i la recta que uneix aquests dos punts n'és un diàmetre. Apol·loni anomena aquest diàmetre *latus transversum*.

¹Aquí resideix la interpretació restringida de Chasles, perquè aquesta elecció reduirà, en les paraules que segueixen, els possibles plans de secció que determinaran les còniques.

²El que fa realment Apol·loni, és considerar primerament un pla de secció sense cap restricció i, després, el "triangle per (o segons) l'eix" que té la base en el diàmetre perpendicular a la recta d'intersecció del pla de secció amb el pla de la base. Llavors, el pla del triangle segons l'eix i el pla de secció no són, en general, perpendiculars.

Considerem que per un dels dos vèrtexs de la corba s'aixeca una perpendicular al pla del triangle per l'eix, se li dona una certa longitud, determinada com direm més endavant i, per l'extrem d'aquesta perpendicular, es traça una recta a l'altre vèrtex de la corba. Ara, si per un punt qualsevol del diàmetre de la corba s'aixeca perpendicularment una *ordenada*, el quadrat d'aquesta ordenada, compresa entre el diàmetre i la corba, serà igual al rectangle construït sobre la part de l'ordenada compresa entre el diàmetre i la recta, i sobre la part del diàmetre compresa entre el primer vèrtex i el peu de l'ordenada. Aquesta és la propietat originària i característica que Apol·loni reconeixia a les seves seccions còniques, i de la qual se serveix per treure'n, mitjançant transformacions i deduccions molt hàbils, quasi totes les altres. Ella juga, com es veu, a les seves mans, quasi bé el mateix paper que l'equació de segon grau amb dues variables en el sistema de la geometria analítica de Descartes.

A partir d'això es veu que el diàmetre de la corba, i la perpendicular aixecada per un dels seus extrems són suficients per construir aquesta corba. Aquests són els dos elements dels quals es van servir els Antics per establir la teoria de les còniques. Anomenaren la perpendicular *latus erectum*; els Moderns han canviat aquest nom primerament pel de *latus rectum*, el qual ha estat utilitzat durant molt temps, i després l'han substituït pel de *paràmetre*, el qual ha quedat.

8.3 René Descartes

8.3.1 Fragment de la Regla IV de Descartes

Més endavant, quan pensava en quina podia ser la causa que en d'altres temps els primers creadors de la filosofia no volguessin admetre a l'estudi de la sabiduria a tot aquell que ignorés la matemàtica, com si consideressin que aquesta disciplina era entre totes la més fàcil i la més necessària per ensenyar als esperits a comprendre d'altres ciències més importants i a preparar-los per a elles, vaig sospitar clarament que ells havien conegut una classe de matemàtica molt diferent de la matemàtica ordinària de la nostra època, . . . I certament tinc la impressió que algunes empremtes d'aquesta verdadera matemàtica apareixen encara a Pappos i a Diofant, . . . Quant a ella m'inclino amb gust a creure que, més tard, els mateixos autors la van fer desaparèixer mitjançant una mena de maquinació culpable. Perquè, com consta de molts artesans que feren una cosa igual amb els seus invents, han malfiat tal vegada que per causa de la seva grandíssima facilitat i de la seva simplicitat perdés quelcom del seu valor amb la divulgació i han preferit, per tal de guanyar-se la nostra admiració, presentar-nos en el seu lloc algunes veritats estèrils, demostrades amb un sutil rigor lògic, com conseqüències del seu art, abans que ensenyar-nos el seu mateix art que hagués esgotat per complet la nostra admiració. Ha hagut, finalment, alguns homes molt ingeniosos que s'han esforçat en el nostre segle a resucitar aquest mateix art, ja que el que es designa amb el nom d'àlgebra no sembla ser altra cosa amb la sola condició que s'edueixi de les múltiples xifres i de les figures inexplicables que la carreguen, de manera que no li falti més aquest grau de claretat i facilitat

supremes que suposem ha de trobar-se en la verdadera matemàtica.

8.4 Euclides

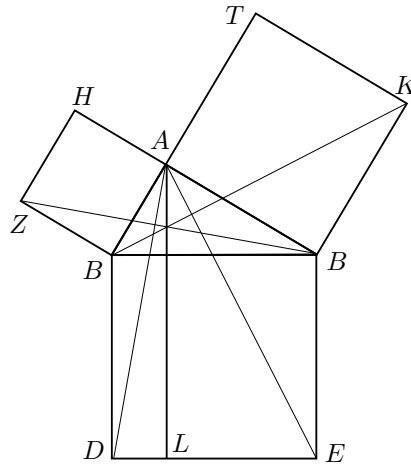
8.4.1 Definicions del llibre I dels *Elements*

- D1. Un punt és allò que no té parts.
- D2. Una línia és una longitud sense amplada.
- D3. Els extrems d'una línia són punts.
- D4. Una línia recta és aquella que descansa d'una manera igual sobre els seus punts.
- D5. Una superfície és allò que només té longitud i amplada.
- D6. Els extrems d'una superfície són línies.
- D7. Una superfície plana es aquella que descansa d'una manera igual sobre les seves rectes.
- D8. Un angle pla és la inclinació de dues línies que es troben una amb l'altra en un pla i no estan en línia recta.
- D9. Quan les línies que contenen l'angle són rectes, l'angle s'anomena rectilini.
- D10. Quan una recta aixecada sobre una altra recta forma angles adjacents iguals entre si, cadascun dels angles iguals és recte, i la línia recta aixecada sobre l'altre s'anomena perpendicular respecte d'aquella sobre la qual s'aixeca.
- D11. Un angle obtús és un angle més gran que un angle recte.
- D12. Un angle agut és un angle menor que un angle recte.
- D13. Un límit és allò que és extrem d'alguna cosa.
- D14. Un cercle és una figura plana continguda per una línia [que s'anomena circumferència] tal que totes les línies rectes que incideixen sobre ella des d'un dels punts situats a l'interior de la figura són iguals entre si.
- D15. Aquest punt s'anomena el centre del cercle.
- D16. Un diàmetre del cercle és qualsevol recta traçada pel centre, limitada en ambdues direccions per la circumferència del cercle, i aquesta recta també parteix el cercle en dues parts iguals.
- D17. Un semicercle és la figura continguda entre el diàmetre i la circumferència que aquest talla. El centre del semicercle és el mateix que el del cercle.
- D18. Figures rectilínies són les contingudes per rectes, essent trilàteres les contingudes per tres, quadrilàteres les contingudes per quatre, multilàteres les contingudes per més de quatre rectes.

- D19. Entre les figures trilàteres, un triangle equilàter és la que té els tres costats iguals, un triangle isòsceles la que té només dos dels seus costats iguals, i un triangle escalè la que té els tres costats desiguals.
- D20. A més, entre les figures trilàteres, un triangle rectangle és la que té un angle recte, un triangle obtusangle la que té un angle obtús, i un triangle acutangle la que té un angle agut.
- D21. Entre les figures quadrilàteres, un quadrat és la que és equilàtera i rectangular, un rectangle la que és rectangular però no equilàtera, un rombe la que és equilàtera però no rectangular, un romboide la que té els costats i els angles oposats iguals entre si però no és ni equilàtera ni rectangular. I anomenarem trapezis les altres figures quadrilàteres.
- D22. Rectes paral·leles són rectes que, essent prolongades indefinidament en ambdós sentits, no es troben l'una amb l'altra en cap d'ells.

8.4.2 Proposició I.47 dels *Elements* d'Euclides

En els triangles rectangles el quadrat sobre el costat que subtendeix l'angle recte és igual als quadrats sobre els costats que formen l'angle recte.



Sigui ABC el triangle rectangle que té l'angle recte BAC .

Dic que el quadrat sobre BC és igual als quadrats sobre BA , AC .

Sigui doncs traçat el quadrat $BDEC$, i sobre BA , AC els quadrats HB , TC ; per A sigui traçada la paral·lela a una de les dues BD o CE , i siguin traçats AD , ZC .

Llavors, en ser rectes cadascun dels angles BAC , BH , se segueix que en una recta qualsevol BA i en el punt A sobre ella, les dues rectes AC , AH no col·locades del mateix costat, fan els angles adjacents iguals a dos rectes; per tant, CA està en línia recta amb AH .

Per la mateixa raó BA està també en línia recta amb AT .

I com que l'angle DBC és igual a l'angle ZBA , perquè cadascun és recta, afeixi's a ambdós l'angle ABC ; llavors l'angle sencer DBA és igual a l'angle sencer SBC .

I en ser DB igual a BC , i ZB a BA els dos costats DB , BA són respectivament iguals als dos costats ZB , BC , i l'angle DBA és igual a l'angle ZBC ; llavors la base AD és igual a la base XC , i el triangle ABD és igual al triangle ZBC .

Ara el paral·lelogram BL és el doble del triangle ABD , perquè tenen la mateixa base BD i estan entre les mateixes paral·leles BD , AL .

I el quadrat HB és el doble del triangle ZBC , perquè tenen també la mateixa base ZB i estan entre les mateixes paral·leles ZB i HC .

[Però els dobles de coses iguals són iguals entre si.]

Per tant, el paral·lelogram BL és també igual al quadrat HB .

De manera similar, si AE , BK són traçades també es podria provar que el paral·lelogram CL és igual al quadrat TC ; per tant el quadrat sencer $BDEC$ és igual als quadrats HB , TC .

I el quadrat $BDEC$ ha sigut traçat sobre BC , i els quadrats HB , TC sobre BA , AC .

Per tant, el quadrat sobre el costat BC és igual als quadrats sobre els costats BA , AC .

Consegüentment, en els triangles rectangles el quadrat del costat que subtendeix l'angle recte és igual als quadrats dels costats que formen l'angle recte.

8.4.3 Proposició II.11 dels *Elements* d'Euclides

Dividir una recta donada de manera que el rectangle comprès per la recta sencera i una de les parts sigui igual al quadrat sobre l'altra part.

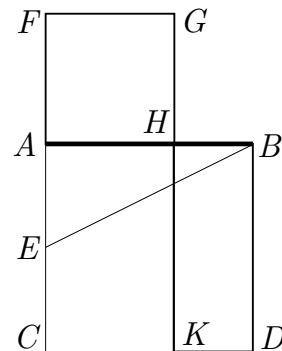
Construïm el quadrat $ABDC$ sobre AB ; sigui AC dividit en dues parts iguals pel punt E i tracem BE ; prolonguem CA fins a F de manera que EF sigui igual a BE ; construïm el quadrat FH sobre AF i prolonguem GH fins a K .

Dic que AB ha estat tallat en H de manera que el rectangle contingut per AB , BH és igual al quadrat sobre AH .

Perquè, com que AC ha sigut partida en dues parts iguals en E , i se li ha afegit FA , el rectangle contingut per CF , FA junt amb el quadrat sobre AE és igual al quadrat sobre EF .

Però $EF = EB$, per tant el rectangle CF , FA junt amb el quadrat sobre AE és igual al quadrat sobre EB .

Però els quadrats sobre BA , AE són igual al quadrat sobre EB , perquè l'angle A és recte: per tant el rectangle CF , FA junt amb el quadrat sobre AE és igual als quadrats sobre BA , AE .



Sigui restat el quadrat sobre AE de cadascun d'ells; llavors el rectangle CF , FA que queda és igual al quadrat sobre AB .

Ara el rectangle CF , FA és FK , perquè FA és igual a FG ; i el quadrat sobre AB és AD ; consegüentment FK és igual a AD .

Sigui AK sostret de cadascun d'ells; llavors, el que resta FH és igual a HD .

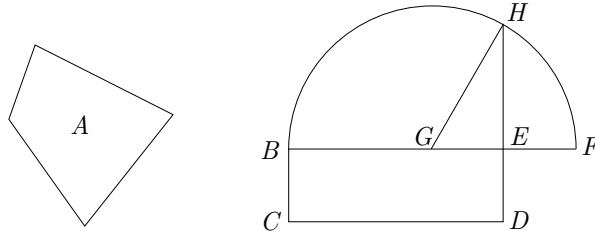
I HD és el rectangle AB , BH , perquè AB és igual a BD ; i FH és el quadrat sobre AH ; per tant el rectangle contingut per AB , BH és igual al quadrat sobre HA .

Així doncs la recta AB ha sigut tallada en H de manera que fa el rectangle contingut per AB , BH igual al quadrat sobre HA .

8.4.4 Proposició II.14 dels *Elements* d'Euclides

Construir un quadrat igual a una figura rectilínia donada.

Sigui A la figura rectilínia donada. Llavors, hi ha que construir un quadrat igual a la figura rectilínia A .



Sigui construït el paral·lelogram rectangle BD , igual a la figura rectilínia A [I.45]. Llavors, si BE és igual a ED , s'haurà fet el que es proposava; perquè s'haurà construït el quadrat BD igual a la figura rectilínia A . Però si no, una de les línies rectes BE , ED és més gran. Sigui BE la més gran, i sigui prolongada fins F ; sigui EF feta igual a ED , i BF dividida en dues parts iguals en G . Amb centre G i distància una de les rectes GB , GF , sigui descrit el semicircle BHF , prolongui's DE fins H , i sigui traçat GH .

Així, en haver estat la recta BF tallada en parts iguals en G , i en desiguals en E , el rectangle contingut per BE , EF , juntament amb el quadrat EG és igual al quadrat sobre GF [II.5]. Però GF és igual a GH ; consegüentment el rectangle BE , EF juntament amb el quadrat sobre GE és igual al quadrat sobre GH . Però els quadrats HE , EG són iguals al quadrat sobre GH [I.47]; per tant, el rectangle BE , EF juntament amb el quadrat sobre GE és igual als quadrats sobre HE , EG . Traiem el quadrat sobre GE de cadascun d'ells, llavors el rectangle contingut per BE , EF que queda, és igual al quadrat sobre EH . Però el rectangle BE , EF és BD , perquè EF és igual a ED ; consegüentment el paral·lelogram BD és igual al quadrat sobre EH . I BD és igual a la figura rectilínia A . Per tant, la figura rectilínia A és també igual al quadrat que es pot descriure sobre EH .

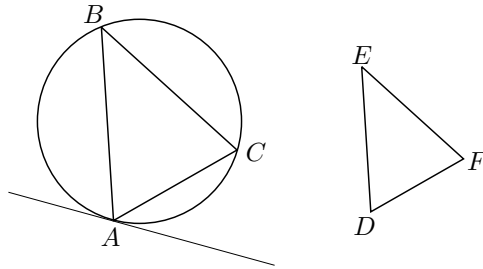
Consegüentment, s'ha construït un quadrat, el que pot ser descrit sobre EH , igual a la figura rectilínia donada A .

8.4.5 Proposició IV.2 dels *Elements* d'Euclides

En un cercle donat inscriure un triangle equiangular amb un triangle donat.

Sigui ABC el cercle donat, i DEF el triangle donat; es demana d'inscriure en el cercle ABC un triangle equiangular amb el triangle DEF .

Sigui GH traçada tangent al cercle en el punt A [III.16]; sobre la línia recta AH , i en el seu punt A , sigui construït l'angle HAC igual a l'angle DEF , i sobre la línia AG , i en el seu punt A , sigui construït l'angle GAB igual a l'angle DEF [I.23]; i traci's BC .



Ara, com que una recta AH és tangent al cercle ABC , i des del punt de contacte A , la recta AC ha sigut traçada a través del cercle, consegüentment l'angle HAC és igual a l'angle ABC en el segment altern del cercle [III.32].

Però l'angle HAC és igual a l'angle DEF ; consegüentment l'angle ABC és també igual a l'angle DEF .

Per la mateixa raó l'angle ACB és també igual a l'angle DFE ; consegüentment l'angle BAC que resta és també igual a l'angle EDF que resta [I.32].

Per tant, en el cercle donat, ha sigut inscrit un triangle equiangle amb el triangle donat.

8.4.6 Proposició IV.10 dels *Elements* d'Euclides

Construir un triangle isòsceles que tingui cadascun dels angles de la base doble que l'angle restant.

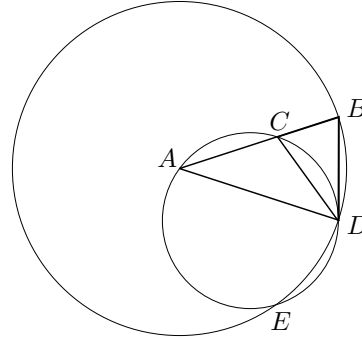
Sigui una recta AB , i sigui tallada pel punt C tal que el rectangle contingut per AB i BC és igual al quadrat sobre CA [II.11]; amb centre A i distància AB sigui traçat el cercle BDE , i sigui adaptada en el cercle BDE la recta BD igual a la recta AC , la qual no és més gran que el diàmetre del cercle BDE [IV.1].³

Sigui traçats AD i DE , i sigui el cercle ACD circumscrit al triangle ACD [IV.5].⁴

³La proposició IV.1 explica aquesta construcció, la qual consisteix en determinar el punt D , extrem del segment BD , fent la intersecció de les circumferències (B, CA) i (A, AB) .

⁴El teorema IV.5, construeix el cercle, a partir de la determinació del centre com a intersecció de les mediatris dels segments determinats pels tres punts.

Ara, en ser el rectangle AB, BC igual al quadrat sobre AC , i AC és igual a BD , llavors el rectangle AB, BC és igual al quadrat sobre BD . I, com que s'ha agafat el punt B exterior al cercle ACD , i des de B dues línies rectes BA, BD han caigut sobre el cercle ACD , i una d'elles el talla, mentre que l'altra hi cau, i el rectangle AB, BC és igual al quadrat sobre BD , per tant BD toca el cercle ACD [III.37]. Així, BD el toca, i DC el travessa des del punt de contacte en D , llavors l'angle BDC és igual a l'angle DAC en el segment altern del cercle [III.32].



Així, en ser l'angle BDC igual a l'angle DAC , sigui l'angle CDA afegit a cadascun d'ells; llavors l'angle sencer BDA és igual als dos angles CDA, DAC . Però l'angle exterior BCD és igual als angles CDA, DAC [I.32]; consegüentment l'angle BDA és també igual a l'angle BCD .

Però l'angle BDA és igual a l'angle CBD , perquè el costat AD és també igual al AB [I.5]; així que l'angle DBA és també igual a l'angle BCD .

Per tant els tres angles BDA, DBA, BCD són iguals entre si.

I, en ser l'angle DBC igual a l'angle BCD , el costat BD és també igual al costat DC . [I.6]

Però BD és per hipòtesi igual a CA ; llavors CA és també igual a CD , així que l'angle CDA és també igual a l'angle DAC [I.5]; per tant els angles CDA, DAC són dues vegades l'angle DAC .

Però l'angle BCD és igual als angles CDA, DAC ; consegüentment l'angle BCD és també doble de l'angle CAD .

Però l'angle BCD és igual a cadascun dels angles BDA, DBA ; per tant cadascun dels angles BDA, DBA és també el doble de l'angle DAB .

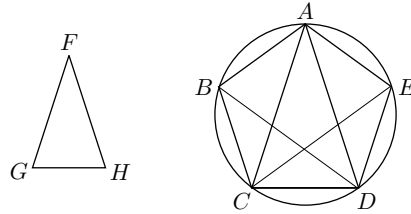
Consegüentment el triangle isòsceles ABD ha sigut construït amb cadascun dels angles de la base DB doble de l'altre angle.

8.4.7 Proposició IV.11 dels *Elements* d'Euclides

Inscriure un pentàgon equilàter i equiangle en un cercle donat.

Sigui $ABCDE$ el cercle donat; així es demana inscriure en el cercle $ABCDE$ un pentàgon equilàter i equiangle.

Sigui el triangle isòsceles FGH amb cadascun dels angles en G, H doble del angle en F [IV.10]; sigui inscrit en el cercle $ABCDE$ el triangle ACD equiangle amb el triangle FGH , tal que l'angle CAD és igual a l'angle en F i els angles en G, H respectivament iguals als angles ACD, CDA [IV.2]; per tant cadascun dels angles ACD, CDA és també doble de l'angle CAD .



Ara siguin bisecats els angles ACD , CDA respectivament per les rectes CE , DB [I.9], i siguin traçats AB , BC , DE , EA .

Així en ser cadascun dels angles ACD , CDA doble de l'angle CAD , i en haver estat bisecats per les rectes CE , DB , llavors els cinc angles DAC , ACE , ECD , CDB , BDA són iguals entre si.

Però angles iguals estan sobre circumferències iguals [III.26]; per tant les cinc circumferències AB , BC , CD , DE , EA són iguals entre si.

Però circumferències iguals són subtendides per rectes iguals [III.29]; per tant les cinc rectes AB , BC , CD , DE , EA són iguals entre si; consegüentment el pentàgon $ABCDE$ és equilàter.

Dic, a més, que també és equiangle.

Perquè en ser la circumferència AB igual a la circumferència DE , sigui BCD afegida a cadascuna d'elles; llavors la circumferència sencera $ABCD$ és igual a la circumferència sencera $EDCB$.

I l'angle AED està sobre la circumferència $ABCD$, i l'angle BAE sobre la circumferència $EDCB$; per tant, l'angle BAE és també igual a AED [III.27].

Per la mateixa raó cadascun dels angles ABC , BCD , CDE és també igual a cadascun dels angles BAE , AED ; consegüentment el pentàgon $ABCDE$ és equiangle.

Però també s'ha provat que és equilàter; per tant en el cercle donat s'ha inscrit un pentàgon equilàter i equiangle.

8.5 Pierre de Fermat

8.5.1 Observacions sobre Diofant, 45

L'àrea d'un triangle rectangle en nombres no pot ser un quadrat.

Donaré la demostració d'aquest teorema que he descobert; no l'he trobat sense una difícil i laboriosa meditació; però aquest tipus de demostració conduirà a progressos meravellosos en la ciència dels nombres.

Si l'àrea d'un triangle fos un quadrat, hi hauria dos biquadrats tals que la diferència seria un quadrat; se seguiria que hi hauria igualment dos quadrats tals que la suma i la diferència serien quadrats. Consegüentment, hi hauria un nombre quadrat, suma d'un quadrat i del doble d'un quadrat, amb la condició que la suma dels dos quadrats, que serveixen per compondre'l, seria igualment un quadrat. Però si un nombre quadrat és suma d'un quadrat i del doble d'un quadrat, la seva arrel és igualment suma d'un quadrat i del doble d'un quadrat, la qual cosa puc provar

sense dificultat. D'això es conclourà que aquesta arrel és la suma dels dos costats de l'angle recte d'un triangle rectangle, del qual un dels quadrats que el componen formarà la base, i el doble de l'altre quadrat l'altura.

Aquest triangle rectangle serà llavors format per dos nombres quadrats, tals que la suma i la diferència seran quadrats. Però es provarà que la suma d'aquests dos quadrats és més petita que la dels dos primers dels quals s'ha igualment suposat que la suma i la diferència eren quadrats. Llavors, si es donen dos quadrats tals que la suma i la diferència siguin quadrats, es donen per la mateixa raó, en nombres enters, dos quadrats participant de la mateixa propietat i dels quals la suma és inferior.

Pel mateix raonament, es tindrà després una altra suma més petita que la deduïda de la primera, i continuant això indefinidament es trobaran sempre nombres enters més i més petits que satisfan les mateixes condicions. Però això és impossible, perquè donat un nombre enter, no pot haver-hi una infinitat de nombres enters que siguin més petits.

El marge és molt estret per acollir la demostració completa i amb tots els seus desenvolupaments.

Pel mateix procediment, he descobert i demostrat que no hi ha cap nombre triangular, excepte la unitat, que sigui un biquadrat.

8.6 Halayudha

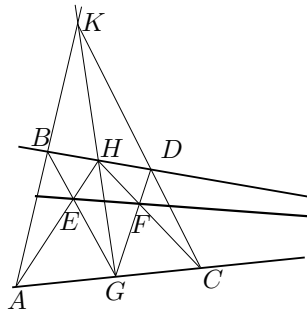
8.6.1 Fragment sobre el triangle aritmètic

Traçar un quadrat al principi, sota es tracen dos quadrats de manera que la meitat de cadascun, s'extén per ambdós costats. Sota d'aquests tres quadrats, sota d'aquests es tracen quatre quadrats i el procés es repeteix fins aconseguir la piràmide desitjada. En el primer quadrat es marca el símbol del 1. Després sobre cadascun dels dos quadrats de la segona línia, es marca la xifra 1. Després a la tercera línia es col·loca la xifra 1 sobre els dos quadrats extrems. En el quadrat del mig es col·loca la suma dels dos quadrats superiors immediats; aquest és el significat del terme "purna". A la quarta línia es col·loca el 1 en cadascun dels quadrats extrems. En cadascun dels quadrats intermedis es col·loca la suma de les xifres dels dos quadrats superiors immediats, és a dir 3. Els quadrats següents s'omplen de la mateixa manera. Consegüentment la segona línia dona el desenvolupament de les combinacions dels [sons curts i llargs que es formen] en un metre sil·làbic; igualment a la tercera línia per a dues síl·labes a la tercera línia, per a tres síl·labes a la quarta línia, i així per a tota la piràmide.

8.7 Jean-Henri Lambert

8.7.1 Problema V de les *Notes et additions à la perspective affranchie de l'embaras du plan géométral*

AC , BD són línies que es tallen en un punt fora del quadre, traçar amb l'ajut únic d'un regle i sense prolongar aquestes línies, una línia que passi per un punt E donat i que talli BD , AC en el mateix punt d'intersecció.



Es tracen dues línies AH i GB que passin per E , després es tracen AB i GH fins que es tallen en K . Es traça KC des de K , després HC i GD , EF serà la línia cercada.

$ABHG$, $GHDC$ són imatges de rectangles, els costats dels quals convergeixen envers dos punts de l'horitzó. E i F són els seus centres respectius i, consegüentment, EF és paral·lela a BD i AC , i tendeix envers el mateix punt de l'horitzó.

8.8 Pappos

8.8.1 Introducció del llibre VII de la *Col·lecció Matemàtica*

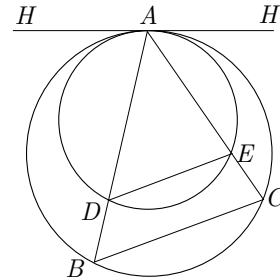
El camp de l'anàlisi, tal com el concebo, fill meu Hermodor, és la matèria particular de la qual disposen aquells que, després d'haver adquirit els elements vulgars, volen extreure d'entre les línies el poder de resoldre els problemes que els són proposats. És seguint la via de l'anàlisi i la síntesi que aquesta matèria ha sigut tractada per tres homes: Euclides, autor dels *Elements*, Apol·loni de Perga i Aristeu el Vell. Així l'anàlisi és la via que parteix de la cosa buscada, considerada com a obtinguda, per arribar mitjançant les conseqüències que se'n dedueixen a la síntesi d'allò que s'ha admès. Efectivament, suposant dins l'anàlisi que la cosa buscada és obtinguda, es considera allò que deriva d'aquesta cosa i allò que la precedeix, fins que tornant sobre les pròpies passes s'arriba a una cosa ja coneguda o que cau en l'ordre dels principis; i s'anomena aquesta via l'anàlisi en tant que constitueix el camí invers de la solució. A la síntesi, contràriament, suposant la cosa percebuda per l'anàlisi com a obtinguda, i disposant les seves conseqüències i causes en el seu ordre natural, referint les unes a les altres, s'arriba finalment a construir la cosa buscada; i és això el que anomenem síntesi.

Hi ha dues classes d'anàlisi aquella que és pròpia de la recerca, la qual s'anomena teòrica, i aquella que s'aplica a trobar allò que es proposa, la qual s'anomena problemàtica. En la classe teòrica es considera establert i verdader el que es cerca, després, per les conseqüències que se'n dedueixen, admeses com a verdaderes i responnent a la hipòtesi, s'arriba a una cosa ja acordada; i si aquesta cosa acordada és verdadera, allò que es busca també és verdader, i la demostració serà la inversa d'aquesta anàlisi; mentre que si s'arriba a una cosa acordada que és falsa, allò que es busca també serà fals. D'altra banda, en la classe problemàtica s'admet la proposició coneguda, i després, mitjançant les conseqüències que se'n dedueixen i que s'admeten com a verdaderes, s'arriba a qualsevol cosa acordada; i si això que s'acorda pot ser realitat o ja està adquirit (allò que els matemàtics anomenen donat), la proposició també podrà ser realitzada, i la demostració serà novament la inversa de l'anàlisi; mentre que si descansa sobre qualsevol cosa acordada la qual és impossible, el problema també serà impossible.

8.8.2 Proposició VII.106 de la *Col·lecció Matemàtica*

Siguin dos cercles ABC i ADE , tangents l'un a l'altre en el punt A ; tracem transversalment, des de A , les rectes ADB , AEC , i tracem les rectes d'unió DE i BC ; dic que les rectes DE i BC són paral·leles.

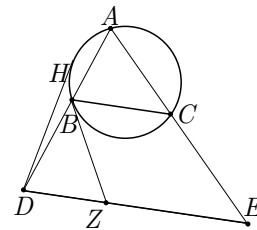
Tracem pel punt A la tangent ZH ; llavors, l'angle comprès per les rectes ZA , AB és igual a cadascun dels angles compresos per les rectes AC , CB i per les rectes AE , ED ; de manera que l'angle comprès per les rectes AC , CB és també igual a l'angle comprès per les rectes AE , ED . Conseqüentment, la recta DE és paral·lela a la recta BC .



8.8.3 Proposició VII.107 de la *Col·lecció*

Donat el cercle ABC en posició i donats dos punts D , E , trencar una línia DAE de manera que la recta BC sigui paral·lela a la recta DE .

Suposem la cosa obtinguda i tracem des del punt B la tangent BZ . Llavors, en ser la recta BZ tangent i la recta BC secant, l'angle comprès sota les rectes ZB , BC , és a dir aquell que és comprès sota les rectes DZ , ZB , és igual a l'angle A ; conseqüentment, els punts A , B , Z , E es troben en un cercle; llavors, el rectangle comprès sota les rectes AD , DB equival al rectangle comprès sota les rectes ED , DZ .



Però, el rectangle comprès sota les rectes AD , DB és donat (perquè equival al quadrat de la tangent); llavors, el rectangle comprès sota les rectes ED , DZ també

és donat. I la recta DE és donada; llavors, la recta DZ és també donada. Però, aquesta recta és també donada en posició i el punt D és donat; llavors, el punt Z és també donat. Però la recta ZB ha sigut traçada, des del punt Z , tangent al cercle donat en posició; llavors, la recta ZB és donada en posició. Però el cercle ABC és donat en posició també; llavors, el punt B és donat. I el punt D és també donat; llavors, la recta BD és donada en posició. I el cercle és també donat en posició; llavors, el punt A és donat. I el punt E és també donat; llavors, cadascuna de les rectes DA , AE és donada en posició.

8.9 Plutarc

8.9.1 Fragment de la *Vida de Marcel*

Però tot això no comptava per a Arquímedes i les invencions d'Arquímedes; cap de les quals no es proposava aquest gran home com una obra digna d'esforç seriós, sinó que la majoria eren els accessoris d'una geometria que es diverteix, en dies passats el rei Hieró havent tingut el desig vehement i a l'últim persuadit Arquímedes que decantés una mica el seu art de les nocions abstractes a les coses materials i fes en certa manera la seva teoria més evident al vulgar mesclant-la, per via del sentit, a les aplicacions usuales. Aquesta art de la mecànica, avui tan estimada i famosa, deu el seu primers impuls a Éudox i Arquites, que brodaren la geometria amb les seves finors i donaren a problemes difícils de fer veure pel raonament i el dibuix lineal un suport derivat d'exemples sensibles i instrumentals, com ara el problema de dues mitjanes proporcionals, element necessari per a moltes figures geomètriques, que ells dos van resoldre recorrent a disposicions mecàniques, adaptant a llur propòsit certes intermèdies tretes de línies i seccions corbes. Però Plató s'indignà contra ells i sostingué enèrgicament que tiraven a perdre i corrompien el que la geometria té de bo, fent-la escapar de les coses incorporables i ideals cap als objectes sensibles i servir-se de cossos que requereixen molta vulgar mà d'obra. D'aquesta manera la mecànica, bandejada, es destrià de la geometria i, menyspreada molt de temps per la filosofia, havia esdevingut una de les arts estratègiques.

8.9.2 Fragment 718e–f de la qüestió segona de *Moralia: Quaestiones convivales*

En totes les ciències anomenades matemàtiques, com en miralls llisos i polits, apareixen empremtes i imatges de la veritat de les coses intel·ligibles, però per damunt de tot la geometria, que és, segons Filolau, principi i metròpoli de la resta, eleva i dirigeix la ment, purificada i alliberada poc a poc de la sensació. Per aquest motiu, també, Plató va retreure a Éudox, Arquites i Menecm, que s'entossudissin en traslladar la duplicació del cub a mitjans instrumentals i mecànics, com si intentessin considerar dues mitjanes proporcionals de la manera que es pogués, al marge de la

raó; perquè així es perdia i destruïa el bé de la geometria, que retornava una altra vegada a les coses sensibles i no es dirigia amunt, ni prenia possessió de les imatges eternes i incorpòries, davant de les quals el déu es sempre déu.

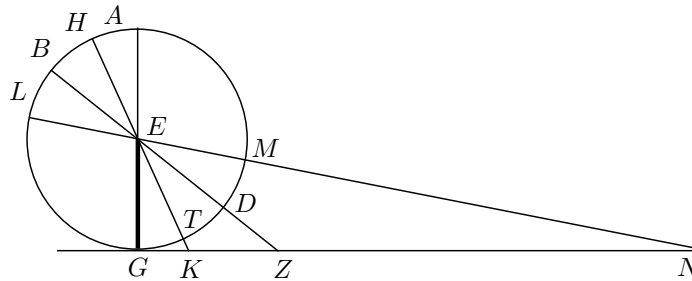
8.10 Ptolemeu

8.10.1 Capítol 5, llibre I del *Almagest*

Com , després del que precedeix, es troben les relacions dels gnòmons a les seves ombres equinoccials i solsticials, al migdia.

Demostrarem que aquestes relacions proposades de les ombres als seus gnòmons s'obtenen de manera més simple, quan es coneix l'arc entre els tròpics i els arcs compresos entre l'horitzó i els pols.

Sigui el meridià $ABGD$ descrit al voltant del centre E , i suposant el punt vertical en A , sigui traçat el diàmetre AEG ; i perpendicularment a aquest diàmetre, la recta $GKZN$ en el pla meridià, i paral·lela a la secció comuna de l'horitzó i del meridià. En ser tota la terra només que com un punt i un centre, relativament a l'esfera del sol, de manera que no hi ha diferència entre el centre E i l'extremitat superior del gnòmon, sigui GE aquest gnòmon, i $GKZN$ la recta sobre la que cauran els extrems de les ombres en els instants del migdia; siguin traçats pel punt E els raigs que el sol llança de l'equador i dels tròpics al migdia. Sigui el raig equinoccial $BEDZ$, el solsticial d'estiu $HETK$, el d'hivern $LEMN$, de manera que GK sigui l'ombra del gnòmon a l'estiu, GZ la que cau quan el sol és a l'equinocci, i GN la del tròpic d'hivern.



En ser l'arc GD , el qual és igual a l'elevació del pol boreal per damunt de l'horitzó, en la regió suposada, de 36 dels graus dels quals el meridià ABG en conté 360, i que cada arc TD , DM és de $23^{\circ}51'20''$ dels mateixos graus, és clar que la recta GT serà de $12^{\circ}8'40''$, i que l'arc sencer GM serà de $59^{\circ}51'20''$. Per tant, tots aquests angles expressats en graus dels quals 360 valen quatre angles rectes, tindran els valors següents: l'angle \widehat{KEG} serà de $12^{\circ}8'40''$; l'angle \widehat{ZEG} , de 36° ; i l'angle \widehat{NEG} , consegüentment, serà de $59^{\circ}51'20''$. Ara bé, si dos angles rectes valgüessin 360 graus, \widehat{KEG} en tindria $24^{\circ}17'20''$; \widehat{ZEG} seria de 72° ; i \widehat{NEG} seria consegüentment de $119^{\circ}42'40''$. En aquest cas, circumscriuint els cercles als triangles rectangles KEG , ZEG , NEG , l'arc subtendit per la recta GK serà $24^{\circ}17'20''$; i l'arc subtendit per

la recta GE , essent la resta de la semicircumferència, serà de $155^{\circ}42'40''$ d'aquests mateixos graus. L'arc subtendit per la recta GZ serà de 72° , i l'arc subtendit per la recta GE tindrà 108 d'aquests graus; l'arc subtendit per GN en tindrà $119^{\circ}42'40''$, i l'arc subtendit per GE tindrà per valor els $60^{\circ}17'20''$ de la resta de la semicircumferència. Conseqüentment, de totes aquestes cordes, GE és de $117^{\circ}18'51''$ de les parts de les quals GK en conté $25^{\circ}14'43''$; de $97^{\circ}4'56''$ de les parts de les quals GZ en conté $70^{\circ}32'4''$; i de $60^{\circ}15'42''$ de les parts de les quals GN en conté $103^{\circ}46'16''$. Llavors, fent el gnòmon GE de 60 parts, la seva ombra GK en el tròpic [solstici] d'estiu serà de $12^{\circ}55'$ d'aquestes mateixes parts; GZ , la seva ombra a l'equinocci, serà de $43^{\circ}36'$; i GN , la d'hivern, de $103^{\circ}20'$, molt aproximadament.

Recíprocament, és evident que, si dues qualssevol d'aquestes relacions del gnòmon a les tres ombres són donades, llavors es coneix l'altura del pol i l'arc entre els tròpics. Efectivament, estant donats dos qualssevol dels angles en E , el tercer és també donat perquè els arcs DT i DM són iguals. Però, per donar a les observacions tota l'exactitud possible, val més determinar, com hem ensenyat, la distància dels tròpics i l'altura del pol, perquè les relacions de les ombres als gnòmons no és susceptible de la mateixa precisió, perquè l'instant de les dels equinoccis no està ben determinat, ni les extremitats de les dels solsticis ben precisos.

8.11 Erwin Schrödinger

8.11.1 Fragment de *Nature and the Greeks*.

Permeteu-me retornar per un moment a la idea general, mencionada al principi, que els nombres es troben darrere de totes les coses. He dit que això, de manera òbvia, partia dels descobriments acústics sobre les longituds de les cordes en vibració. Però, en justícia (malgrat les seves derivacions estrafoles), no s'hauria d'oblidar que és l'època i el lloc dels primers grans descobriments en aritmètica i geometria, sovint vinculats a algun tipus d'aplicació real o imaginària sobre objectes materials. L'essència del pensament matemàtic és abstraure nombres del suport material (longituds, angles i altres quantitats) per operar amb elles i les seves relacions. La naturalesa d'aquest procediment provoca que les relacions, models, fórmules, i figures geomètriques a les quals s'arriba per aquesta via, resultin inesperadament aplicables a entitats materials molt diferents que aquelles de les quals van ser abstretes originalment. Soltadament, la fórmula matemàtica proporciona ordre en un domini per al qual no estava previst i en el que mai s'havia pensat quan es va elaborar el model matemàtic. Aquesta experiència sorprenent és idònia per a que sorgeixi la creença en el poder místic de les matemàtiques en ser trobades de manera inesperada allí on no les havíem aplicat, les «Matemàtiques» sembla que es trobin en el fons de totes les coses. Aquest fet, que devia impressionar profunda i reiteradament els joves amants de la matemàtica, retorna com un esdeveniment singular per marcar el progrés de la ciència física. Així —per oferir almenys un exemple

famós—, Hamilton descobrí que el moviment d'un sistema mecànic general es regia exactament per les mateixes lleis que un raig de llum que es propaga en un medi no homogeni. Avui la ciència s'ha sofisticat, ha après a ser prudent en aquests casos i a no tenir com a coneixements garantits i intrínsecs allò que podria ser simplement una analogia formal, resultat de la naturalesa del pensament matemàtic. Però no ens ha d'estranyar trobar en la infància de les ciències conclusions precipitades de caràcter místic a les quals ens hem referit.

8.12 Teó d'Esmirna

8.12.1 «Dels nombres laterals i dels nombres diagonals» de l'*Expositio*

Així com els nombres tenen en potència les relacions dels triangles, dels tetràgons, dels pentàgons i de les altres figures, també trobarem que les relacions dels nombres laterals i dels nombres diagonals es manifesten en els nombres, segons les seves raons generatrius, perquè són els nombres els que harmonitzen les figures. Llavors, en ser la unitat el principi de totes les figures, segons la raó suprema i generatriu, així també la relació de la diagonal al costat es troba en la unitat.

Suposem per exemple dues unitats, de les quals una sigui la diagonal i l'altra el costat, ja que cal que la unitat que és el principi de tot sigui en potència el costat i la diagonal; afegim al costat la diagonal i a la diagonal afegim dos costats, ja que allò que el costat pot dues vegades, la diagonal ho pot una vegada.⁵ Després d'això la diagonal ha esdevingut més gran i el costat més petit. A més, per al primer costat i la primera diagonal, el quadrat de la diagonal unitat serà menor en una unitat que el doble del quadrat del costat unitat, ja que les unitats estan en igualtat, però un és menor en una unitat que el doble de la unitat. Afegim ara la diagonal al costat, és a dir una unitat a la unitat, el costat valdrà llavors 2 unitats; però, si ajuntem dos costats a la diagonal, és a dir 2 unitats a la unitat, la diagonal valdrà 3 unitats; el quadrat construït sobre el costat 2 és 4, i el quadrat de la diagonal es 9, el qual és més gran en una unitat que el doble del quadrat de 2.

De la mateixa manera afegim al costat 2 la diagonal 3, el costat esdevindrà 5. Si a la diagonal 3 afegim dos costats, és a dir 2 vegades 2, tindrem 7 unitats. El quadrat construït sobre el costat 5 es 25, i el que és construït sobre la diagonal 7 és 49, el qual és menor en una unitat que el doble del quadrat 25. Novament, si al costat 5 s'afegeix la diagonal 7, s'obtenen 12 unitats; i si a la diagonal 7 s'ajunten 2 vegades el costat 5, s'obtindrà 17, el quadrat del qual és més gran en una unitat que el doble del quadrat de 12. I així successivament es continua l'addició. La proporció alterna: el quadrat construït sobre la diagonal serà adés més petit, adés més gran, en una unitat, que el doble del quadrat construït sobre el costat, de manera que aquestes diagonals i aquests costats sempre es podran expressar.

⁵Aquí hi ha una nota del traductor: És a dir que dues vegades al quadrat del costat iguala una vegada el quadrat de la diagonal.

Inversament, les diagonals comparades amb els costats, en potència són adés més grans en una unitat que els dobles, adés més petits en una unitat. Totes les diagonals són llavors, en relació als quadrats dels costats, alternativament dobles per excés i per defecte, essent la mateixa unitat combinada igualment amb tots la que restableix la igualtat, de manera que el doble no peca ni per excés ni per defecte; en efecte, allò que falta en la diagonal precedent es troba en excés, en potència en la diagonal que segueix.

Capítol 9

Indicacions i resolució de les activitats

En aquest capítol s'ofereixen indicacions i desenvolupaments de les activitats proposades en els set primers capítols de l'obra. Quant al desenvolupament amb el programari informàtic, s'indiquen els noms del fitxers associats a les activitats, (extensions `FIG` i `MAC` per al programa `CABRI` i `MTH` per al `DERIVE`). Es troben a l'adreça http://www.iecat.net/scm/Publicacions/pubs_3.asp, a les carpetes `Activitats\Actx`, en què x és el nombre del capítol on s'han plantejat.

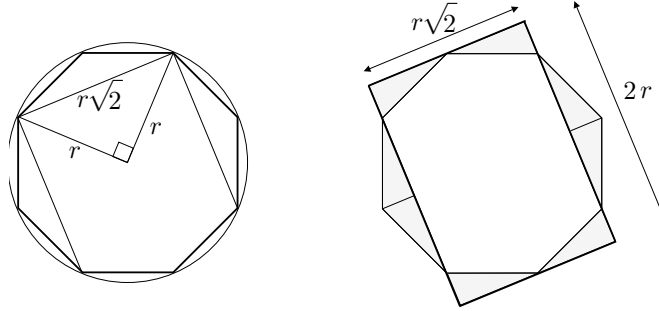
Alguns dels desenvolupaments amb el programa `CABRI`, contenen construccions “pas a pas”, en què es visualitza el traçat de segments i corbes en temps real. En la creació dels interruptors que controlen l'execució de les construccions s'han utilitzat les macros de la carpeta `Activitats\Traçar` creades a partir del fitxers `FIG` que els acompanyen. La creació d'aquestes macros i interruptors és un afer gens trivial. L'extensió del treball i el temps disponible m'han impedit dedicar un apèndix a aquest tema tècnic, i fer una presentació dels fitxers `FIG` —on s'han creat les macros— que facilités la seva comprensió. Confio que l'estudi dels fitxers d'aquesta carpeta, així com l'observació del funcionament dels interruptors a les diferents activitats, permeti esbrinar la manera de crear-los i la construcció de nous interruptors que simplifiquin la complexitat dels presentats.

A la carpeta `Altres` hi ha algunes macros que s'han utilitzat en algun dels fitxers presentats a les activitats. Les hem inclòs sense parar cura en la presentació i explicació, per si es volen estudiar.

9.1 Activitats del capítol 1

1.1.1 Sigui r el radi de la circumferència i observem l'octàgon inscrit. Considerem el triangle determinat per dos costats consecutius de l'octàgon, i el deter-

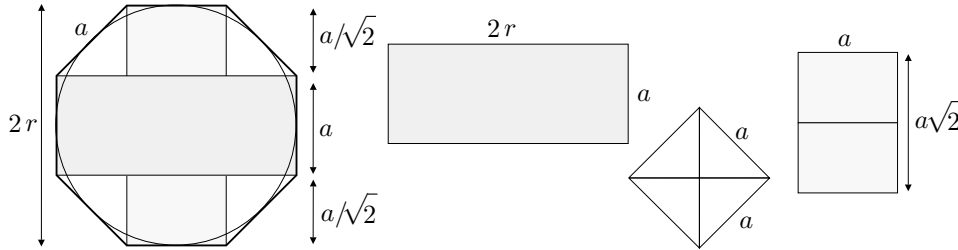
minat per la seva parella de costats oposats. Els partim per l'altura corresponent al costat desigual, els retallem i els col·loquem tal com s'indica a la figura. Obtenim un rectangle de costats $2r$ i $r\sqrt{2}$ —aquest últim costat obtingut amb l'ajut del teorema de Pitàgores—.



Llavors, l'àrea de l'octàgon inscrit és $2r \cdot r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}r^2$.

Quant a l'octàgon circumscrit observem que si el seu costat val a , llavors $2r = a + \frac{2a}{\sqrt{2}} = a(\sqrt{2} + 1)$ i $a = \frac{2r}{\sqrt{2}+1} = 2(\sqrt{2} - 1)r$. A partir d'aquí presentem dues maneres de portar el càlcul, una additiva i una sostractiva:

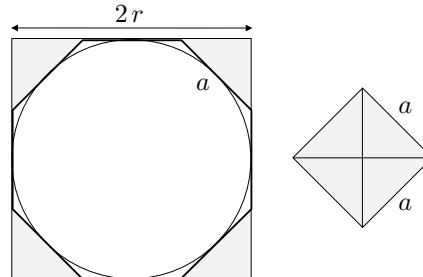
Additiva: L'àrea de l'octàgon es pot obtenir com a suma de les àrees de la figura adjunta:



$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= 2ra + a^2 + \sqrt{2}a^2 = 4(\sqrt{2} - 1)r^2 + 4(\sqrt{2} - 1)^2r^2 + 4\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)^2r^2 \\ &= (4\sqrt{2} - 4 + 12 - 8\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 16)r^2 = (8\sqrt{2} - 8)r^2 = 8(\sqrt{2} - 1)r^2. \end{aligned}$$

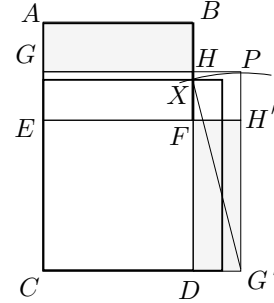
Sostractiva: L'àrea de l'octàgon es pot obtenir restant-li al quadrat de costat $2r$, el quadrat de costat a .

$$\begin{aligned} 4r^2 - a^2 &= 4r^2 - 4(\sqrt{2} - 1)^2r^2 = \\ &= (4 - 4(3 - 2\sqrt{2}))r^2 = \\ &= (-8 + 8\sqrt{2})r^2 = 8(\sqrt{2} - 1)r^2 \end{aligned}$$



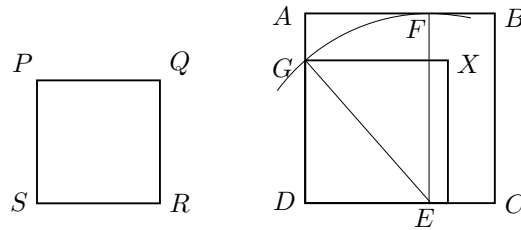
Consegüentment $2.82842 < 2\sqrt{2} < \pi < 8(\sqrt{2} - 1) < 3.31371$. Si es fes una aproximació, mitjançant el càlcul de la mitjana aritmètica, en resultaria $\pi \approx 3.071068$.

1.1.2.i En ser $ABCD = CG'PG - FH'PH$, falta trobar un quadrat igual a la diferència dels dos quadrats de la part dreta de la igualtat. Hem vist a la construcció 1 que això s'ha aconsegueix construint la intersecció X de la circumferència $(G', G'P)$ amb el segment DB . Llavors, el quadrat buscat és el que té els seus costats de longitud igual a DX .



1.1.2.ii Construcció 1: Suposem construït el quadrat DX diferència dels quadrats $ABCD$ i $PQRS$. Llavors $PQRS + DX = ABCD$, i això significa, pel recíproc del teorema de Pitàgores, que es pot formar un triangle rectangle amb els seus costats.

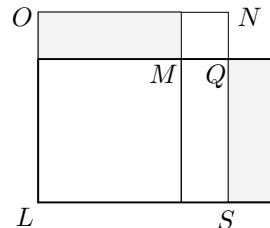
Un catet serà RS i la hipotenusa serà BC , els quals són coneguts. Per tant l'anàlisi s'ha acabat perquè aquest triangle es pot construir i, consegüentment, tindrem el costat del quadrat cercat, el qual és l'altre catet del triangle. Això es el que fa Baudhayana amb la construcció del triangle GDE en què $DE = SR$ és un catet conegut i $EG = BC$ és la hipotenusa també coneguda; llavors obté com a resultat GD que és, pel teorema de Pitàgores, el costat del quadrat buscat.



Construcció 2: Suposem que tenim el quadrat solució del problema. Aquest es pot expressar com a diferència de dos quadrats de moltes maneres, —només cal construir un triangle rectangle amb un catet coincident amb un costat del quadrat—, i aquestes diferències sempre es poden transformar en un rectangle.

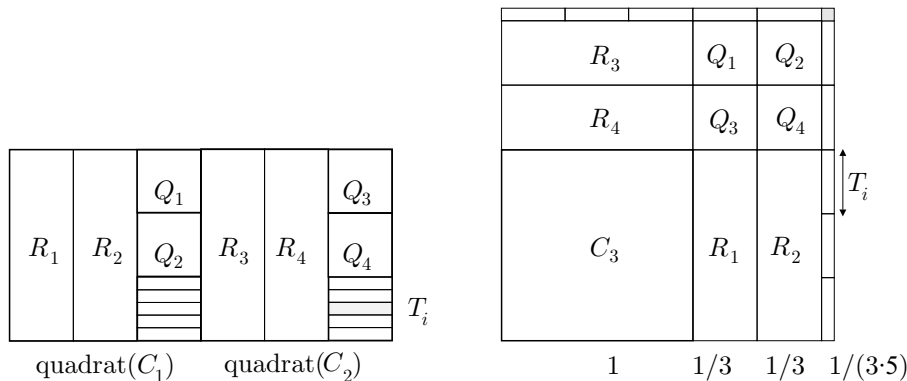
Efectivament, la transformació de la diferència de quadrats $LN - LM$ s'aconsegueix expressar com un rectangle, retallant OM , girant-lo 90° i fent-ne l'aplicació sobre QS .

L'anàlisi s'ha acabat perquè el rectangle és conegut i la seva conversió en diferència de dos quadrats es fa seguint el camí invers. Això és el que fa Baudhayana en la seva construcció.



1.1.2.iii Vegeu el fitxer **Baudhrq.FIG**.

1.1.3 Considerem els tres quadrats C_1 , C_2 i C_3 de costats 1 de la figura, i tractem de construir un quadrat d'àrea 3 afegint al C_3 els quadrats C_1 i C_2 després d'haver-los partit adequadament en els quatre rectangles R_i , els quatre quadrats Q_i i els deu rectangles T_i . Un cop col·locats obtenim un gnòmon, tal com es veu a la figura. Llavors completem el quadrat amb el quadrat ombrejat de costat $1/(3 \cdot 5)^2$.



Hem obtingut un quadrat d'àrea $3 + \frac{1}{15^2}$, per tant el seu costat aproxima per excés $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} \lesssim 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = 1.7333 \dots$$

Si apliquem el procediment de retallar dues tiretes de costats x i $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5}$, i x i $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - x$, i les igulem a l'excés, obtenim

$$2x \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} \right) - x^2 = \left(\frac{1}{3 \cdot 5} \right)^2,$$

i llavors,

$$x = \frac{\left(\frac{1}{3 \cdot 5}\right)^2}{2 \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5}\right)} + \frac{x^2}{2 \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5}\right)}.$$

Si prescindim del segon sumand obtenim

$$x \gtrsim \frac{1}{2 \cdot (15 + 10 + 1) \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52},$$

i l'aproximació per excés

$$\sqrt{3} \lesssim 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52} = 1.73205128 \dots$$

Si tenim en compte que $1.732050807 < \sqrt{3} < 1.732050808$, l'error comès és menor que $5 \cdot 10^{-7}$.

1.1.4.i

$$\sqrt{2} \lesssim a_1 = \frac{a_0^2 + 2}{2a_0} = \frac{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{408}\right)^2 + 2}{2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{408}\right)} = 1.41421356237\dots,$$

en què tots els decimals presentats són correctes.

1.1.4.ii El procediment ve definit per l'equació $a_1 = \frac{a_0^2 + N}{2a_0}$ i, si $a_0^2 < N$, tenim

$$a_1^2 - N = \frac{(a_0^2 + N)^2}{4a_0^2} - N = \frac{(a_0^2 - N)^2}{4a_0^2} > 0.$$

O sigui que $a_1^2 > N$ i hem obtingut una aproximació a_1 per excés. A partir d'aquí podríem repetir el procés per aconseguir aproximacions per excés més òptimes, i queda clar que el procediment es pot iniciar amb qualsevol valor positiu major o menor que \sqrt{N} .

1.1.4.iii Vegeu la funció `ARRQU2(n,a,p)` del fitxer `C1arrel.MTH`.

1.1.4.iv Vegeu la funció `GRARRQU2(n,a,p)` del fitxer `C1arrel.MTH`.

1.1.5.i $a_1 = \frac{7}{5} + \frac{2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2}{2 \cdot \frac{7}{5} + 1} = \frac{7}{5} + \frac{1}{5 \cdot 19} = 1.410526\dots$

1.1.5.ii Si partim del fet que $a_0^2 < (a_0 + 1)^2 < N$, llavors

$$\begin{aligned} a_1^2 - N &= \left(a_0 + \frac{N - a_0^2}{2a_0 + 1}\right)^2 - N = \\ &= a_0^2 + \frac{2a_0}{2a_0 + 1}(N - a_0^2) + \left(\frac{N - a_0^2}{2a_0 + 1}\right)^2 - N = \\ &= \frac{N - a_0^2}{(2a_0 + 1)^2} (N - a_0^2 + 2a_0(2a_0 + 1) - (2a_0 + 1)^2) = \\ &= \frac{N - a_0^2}{(2a_0 + 1)^2} (N - a_0^2 - 2a_0 - 1) = \frac{N - a_0^2}{(2a_0 + 1)^2} (N - (a_0 + 1)^2) > 0. \end{aligned}$$

Consegüentment tenim $a_1^2 > N$, i a_1 és una aproximació per excés de \sqrt{N} .

1.1.5.iii Partim de que $a_0 > \sqrt{N}$, i hem vist a l'apartat anterior que

$$a_1^2 - N = \frac{N - a_0^2}{(2a_0 + 1)^2} (N - (a_0 + 1)^2).$$

En ser els dos factors negatius obtenim $a_1^2 > N$ i, per tant,

$$\sqrt{N} < a_1 < a_0.$$

De tot el que hem vist fins ara en aquest grup d'activitats podem concloure que, utilitzant iteradament qualsevol dels dos procediments definits per les equacions

$$a_1 = \frac{a_0^2 + N}{2a_0} \quad \text{o bé} \quad a_1 = a_0 + \frac{N - a_0^2}{2a_0 + 1} \quad \text{en què } a_0 > 0,$$

es pot aproximar el valor de \sqrt{N} .

1.1.6.i Vegeu les funcions `ARRQD2(n,a,p)` i `GRARRQD2(n,a,p)` del fitxer `C1arrel.MTH`.

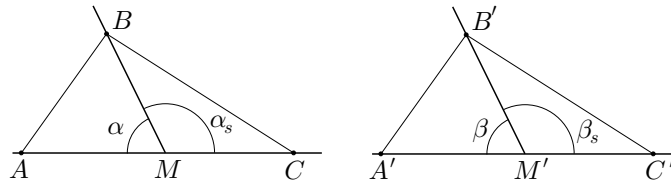
1.1.6.ii Vegeu la funció `ARRQERRORED2(n,a,k)` del fitxer `C1arrel.MTH`.

1.1.7.i

$$\begin{aligned} a_{p+1} - a_p &= \frac{N - a_p^2}{2a_p} = \frac{(\sqrt{N} - a_p)(\sqrt{N} + a_p)}{2a_p} \implies \\ &\implies \frac{(a_p - a_{p+1})2a_p}{\sqrt{N} + a_p} = a_p - \sqrt{N} \implies \\ a_{p+1} - \sqrt{N} &= a_{p+1} - a_p + a_p - \sqrt{N} = \frac{(a_p - a_{p+1})2a_p}{\sqrt{N} + a_p} - (a_p - a_{p+1}) = \\ &= \left(\frac{2a_p}{\sqrt{N} + a_p} - 1 \right) (a_p - a_{p+1}) = \\ &= \frac{a_p - \sqrt{N}}{a_p + \sqrt{N}} (a_p - a_{p+1}) < a_p - a_{p+1}. \end{aligned}$$

1.1.7.ii Vegeu la funció `ARRQERROR2(n,k)` del fitxer `C1arrel.MTH`.

1.2.1.i

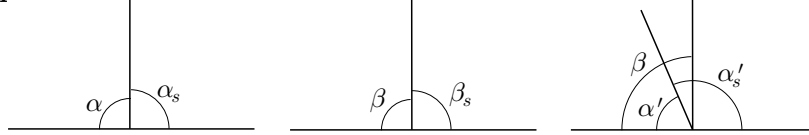


Els triangles \widehat{AMB} i $\widehat{A'M'B'}$ són congruents, pel teorema I.4, i es compleix $AB = A'B'$ i $\widehat{MAB} = \widehat{M'A'B'}$.

Pel mateix teorema, els triangles \widehat{CAB} i $\widehat{C'A'B'}$ són congruents i es compleix $BC = B'C'$ i $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

Finalment, també per I.4, els triangles \widehat{MCB} i $\widehat{M'C'B'}$ són congruents i, per tant, $\alpha_s = \beta_s$.

1.2.1.ii



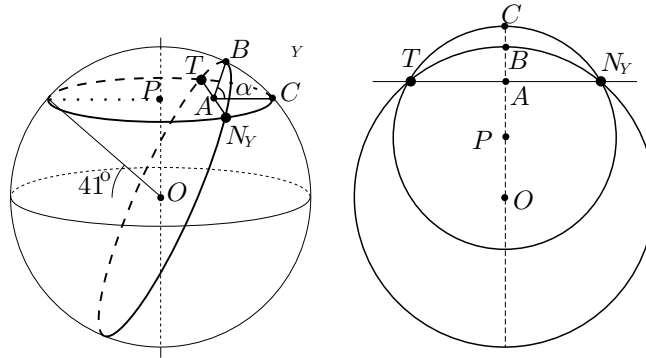
Suposem $\alpha \neq \beta$, i considerem $\alpha < \beta$, — $\alpha > \beta$ es faria semblant—.

Si apliquem α sobre β en resulta l'angle aplicat α' tal que $\alpha = \alpha' < \beta$. Llavors, si α'_s és l'adjacent de α' , es compleix $\alpha'_s > \beta_s$ i —per l'apartat anterior— $\alpha_s = \alpha'_s$. O sigui que:

$$\alpha = \alpha' < \beta = \beta_s < \alpha'_s = \alpha_s \implies \alpha < \alpha_s,$$

la qual cosa no pot ser perquè, en ser angles rectes, $\alpha = \alpha_s$.

1.2.2.i Si girem el pla del paral·lel PTN_Y un angle α , al voltant de la corda TN_Y , observem que l'arc TCN_Y del paral·lel és exterior a l'arc TBN_Y del cercle màxim. Per tant, aquest últim determinarà la distància més curta entre les dels dos arcs.



1.2.2.ii Hem utilitzat un globus de la Terra de 25 cm de diàmetre. La mesura aproximada, amb un cordill, seguint el paral·lel ha sigut de 12.4 cm, i seguint el cercle màxim ha sigut de 12 cm. Per tant, les mesures aproximades de les distàncies cercades són, per arguments de semblança:

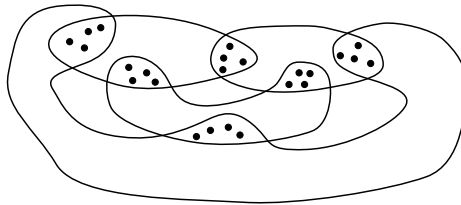
$$\begin{aligned} \text{Pel paral·lel:} & \quad \frac{12.4 \cdot 6367}{12.5} = 6316,1 \text{ km} \\ \text{Pel cercle màxim:} & \quad \frac{12 \cdot 6367}{12.5} = 6112,3 \text{ km} \end{aligned}$$

1.2.3.i El conjunt de rectes perpendiculars a una recta l donada, ve determinat per la família de plans perpendiculars al pla que conté l . Les interseccions d'aquests plans amb l'esfera són els cercles màxims o rectes perpendiculars a l . Totes aquestes passen per les interseccions P i Q de l'eix de la família de plans

amb l'esfera; és a dir, pels extrems P i Q del diàmetre perpendicular al pla que conté l . O sigui que el conjunt de rectes perpendiculars a l comparteix dos punts P i Q de l'esfera. Així, en aquesta geometria no es compleix, en general, la unicitat de la recta per dos punts.

1.2.3.ii Si considerem el triangle que formen una recta l i dues rectes perpendiculars, la suma dels seus angles és $180^\circ + \alpha > 180^\circ$, en què α és l'angle que formen les dues perpendiculars. Per tant, en aquesta geometria no es compleix, en general, que la suma d'angles d'un triangle sigui 180° .

1.2.4.i Es poden obtenir intuïcions per a aquest exercici, treballant en un cas més senzill, per exemple amb 4 esports. Així, podríem construir un gràfic com el que adjuntem i, després, elaborar els arguments per al cas de 5 esports, on el gràfic no es tan clar.



L'axioma \mathbf{A}_1 es pot demostrar a partir de l'axioma \mathbf{A}_2 . Aquest últim assegura que hi ha persones que coincideixen en la pràctica de qualsevol parella d'esports, la qual cosa garanteix que tots els esports són practicats per alguna persona. Per tant, dels axiomes \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 i \mathbf{A}_4 , es poden deduir els mateixos teoremes que si els considerem tots quatre.

Teorema \mathbf{T}_1 : A partir dels axiomes \mathbf{A}_2 i \mathbf{A}_3 , podem classificar les persones per la parella d'esports que practiquen. Aquesta classificació “parteix” el conjunt de persones en grups de 4 persones. D'aquests grups n'hi ha tants com de parelles d'esports, dels quals podem fer el recompte amb l'ajut de l'axioma \mathbf{A}_4 :

$$\begin{aligned} \text{Nombre de parelles d'esports:} & \quad \binom{5}{2}. \\ \text{Nombre total de persones:} & \quad \binom{5}{2} \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40. \end{aligned}$$

Teorema \mathbf{T}_2 : Els practicants d'un esport es poden classificar a partir del segon esport que practiquen. Això dona 4 possibilitats, amb 4 persones a cada possibilitat.

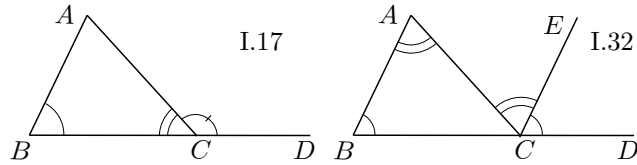
$$\text{Nombre de persones que practica cada esport:} \quad 4 \cdot 4 = 16.$$

1.2.4.ii Per l'últim resultat de l'apartat anterior, cada persona coincideix amb $16 - 1 = 15$ persones més en la pràctica d'un esport. Així, una persona coincideix, en la pràctica dels dos esports que fa, amb $15 + 15 - 3 = 27$ persones, perquè n'hi han 3 que estan en els dos grups de 15. Per tant només hi ha $40 - 27 - 1 = 12$ persones que no coincideixen amb ella en la pràctica d'algun esport. Consegüentment, els axiomes $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ i \mathbf{A}_5 , són incompatibles, i no pot haver-hi cap teorema que impliqui el seu concurs.

1.3.1.i Sigui ABC el triangle, i prolonguem el segment BC fins el punt D . Llavors, $\widehat{ACD} > \widehat{ABC}$, per I.16, i $\widehat{ACD} + \widehat{ACB} = \pi$, per I.13. Per tant,

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < \widehat{ACD} + \widehat{ACB} = \pi.$$

Per a les altres parelles d'angles, la demostració es fa igual.



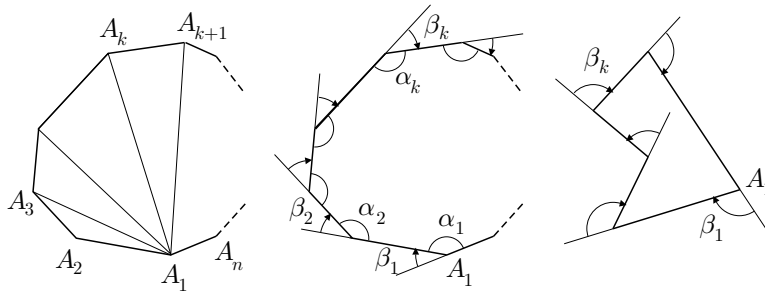
1.3.1.ii Sigui ABC el triangle, i prolonguem el segment BC fins el punt D . Tracem, pel punt C , la paral·lela CE a AB , mitjançant I.31. Llavors, en ser AC i BC secants a aquestes paral·leles, es compleix, per I.29, $\widehat{BAC} = \widehat{ACE}$ i $\widehat{ECD} = \widehat{ABC}$. Per tant,

$$\widehat{ACD} = \widehat{ACE} + \widehat{ECD} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}.$$

D'altra banda, si afegim \widehat{ACB} a la igualtat anterior, i apliquem I.13,

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{ACD} + \widehat{ACB} = \pi.$$

1.3.2 Mètode 1: Sigui el polígon convex $A_1A_2 \dots A_n$. Tracem les diagonals que surten de A_1 , és a dir $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$. Llavors, queden determinats els triangles $A_1A_kA_{k+1}$, on $2 \leq k \leq n - 1$, els angles dels quals sumen els angles interiors del polígon. En haver-hi $n - 2$ triangles, la suma d'angles del polígon és $(n - 2) \cdot \pi$.



Mètode 2: Si recorrem el perímetre del polígon, donant una volta completa des del vèrtex A_1 , la suma dels angles β_k , —vegeu el gràfic—, és 2π . Per tant, en ser

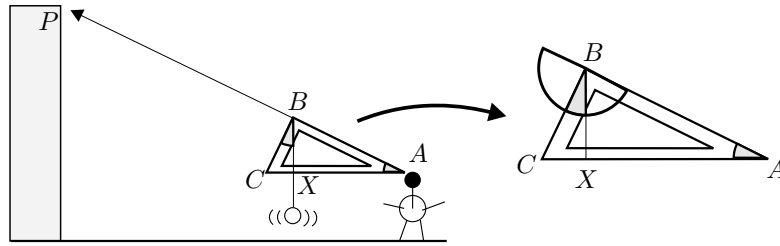
$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) = n \cdot \pi,$$

obtenim

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n \cdot \pi - \sum_{k=1}^n \beta_k = n \cdot \pi - 2\pi = (n - 2) \cdot \pi.$$

Aquest resultat també és vàlid si hi ha algun angle còncau perquè, en la segona demostració, si considerem els angles β_k amb signe, se segueix complint $\sum_{k=1}^n \beta_k = 2\pi$ i $\alpha_k + \beta_k = \pi$.

1.3.3.i Primerament disposem el pla de l'escaire perpendicular al terra, i dirigim un raig visual, seguint un dels seus catets AB , envers el punt P del qual volem mesurar l'elevació.

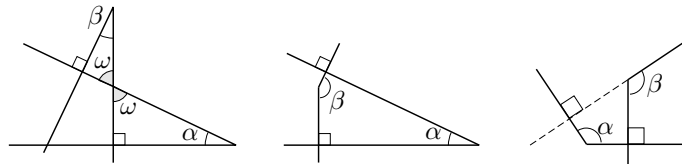


En segon lloc, fem un senyal en el punt X de la hipotenusa determinat per la plomada. Finalment, mesurem amb el semicercle graduat, l'angle \widehat{CBX} , el qual coincideix amb l'angle d'elevació \widehat{CAB} cercat.

1.3.3.ii Cas 1: Pel teorema I.32 dels *Elements*, la suma d'angles d'un triangle val 180° . Llavors,

$$\omega + \alpha + 90^\circ = \omega + \beta + 90^\circ \implies \alpha = \beta.$$

És a dir que, els angles aguts de costats perpendiculars són iguals.



Cas 2: Sabem que la suma d'angles d'un quadrilàter és igual a $(4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Llavors,

$$\alpha + \beta + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ \implies \alpha + \beta = 180^\circ.$$

És a dir que, un angle agut i un angle obtús de costats perpendiculars són suplementaris.

Cas 3: En ser la suma d'angles d'un quadrilàter igual a 360° tenim,

$$180^\circ - \beta + \alpha + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ \implies \alpha = \beta.$$

És a dir que, els angles obtusos de costats perpendiculars són iguals.

1.3.4.i Construïm una taula amb les dades numèriques dels moviments d'Aquil·les i la tortuga:

El que corre Aquil·les (m)	El que corre la tortuga (m)	Separació (m)	Temps trans- corregut (s)
$d_1 = A_1T_1 = 90$	$A_2T_2 = 9$	$A_2T_2 = 9$	$t_1 = 9$
$d_2 = A_2T_2 = 9$	$A_3T_3 = 0.9$	$A_3T_3 = 0.9$	$t_2 = 0.9$
$d_3 = A_3T_3 = 0.9$	$A_4T_4 = 0.09$	$A_4T_4 = 0.09$	$t_3 = 0.09$
$d_4 = A_4T_4 = 0.09$	$A_5T_5 = 0.009$	$A_5T_5 = 0.009$	$t_4 = 0.009$
...
$d_n = A_nT_n = 9/10^{n-2}$	$A_nT_n = 9/10^{n-2}$	$A_nT_n = 9/10^{n-2}$	$t_n = 9/10^{n-1}$
...

De la primera columna de la taula traurem la suma de distàncies recorreguda per Aquil·les, i de l'última columna traurem el total de temps invertit.

Els termes de les successions de nombres resultants, formen dues progressions geomètriques de raó $r = 0.1$. La suma dels n termes serà

$$\sum_{k=1}^n d_k = \frac{90 \cdot [(0.1)^n - 1]}{0.1 - 1}, \quad \sum_{k=1}^n t_k = \frac{9 \cdot [(0.1)^n - 1]}{0.1 - 1}.$$

Si s'admet l'existència actual de la suma infinita,

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \frac{90(0 - 1)}{0.1 - 1} = \frac{90}{0.9} = 100 \text{ m} \quad \sum_{k=1}^{\infty} t_k = \frac{9(0 - 1)}{0.1 - 1} = \frac{9}{0.9} = 10 \text{ s}.$$

1.3.4.ii Plantegem el problema des d'un punt de vista algebraic, suposant que Aquil·les agafa la tortuga, sense introduir-nos en el càlcul de sumes infinites. En el moment en què la tortuga és agafada ha passat un temps t en el qual Aquil·les ha recorregut x metres i la tortuga $x - 90$ metres. Observem el quadre adjunt

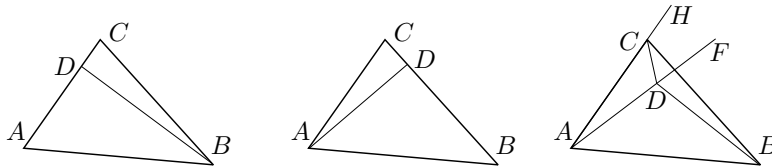
	espai	velocitat	temps
Aquil·les	x	10	t
tortuga	$x - 90$	1	t
	m	m/s	s

En resulta el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x = 10t \\ x - 90 = t \end{cases}$$

del qual obtenim $t = 10$ s, i $x = 10 \cdot 10 = 100$ m.

1.4.1 Cas 1: Si D és interior a AC o a CB , llavors, $AD < AC$ o $BD < BC$. Cap d'aquestes dues possibilitats es pot donar perquè $AD = AC$ i $BD = BC$.

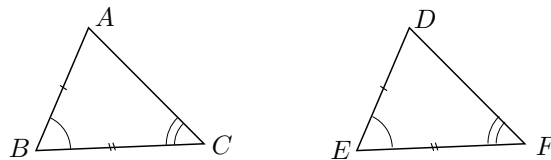


Cas 2: Si D és interior al triangle,

- 1) $AD = AC \implies \widehat{HCD} = \widehat{FDC}$ —per la 2a. part de I.5—,
- 2) $DB = CB \implies \widehat{BDC} = \widehat{BCD}$ —per la 1a. part de I.5—.

Llavors, $\widehat{BCD} < \widehat{HCD} = \widehat{FDC} < \widehat{BDC}$, la qual cosa contraduïx la segona igualtat anterior.

1.4.2 Cas 1: Si transportem ABC sobre DEF de manera que coincideixin BC i EF i els dos angles iguals, llavors el punt A ha de caure sobre les rectes DE i DF , les quals són diferents. Per tant, ha de caure sobre la seva intersecció D perquè és única —si existissin dues interseccions hi hauria dues rectes diferents per dos punts diferents—. Finalment, en coincidir A , B i C amb D , E i F han de coincidir AB i AC amb DE i DF , si no es vol contradir la unicitat de les rectes per dos punts.

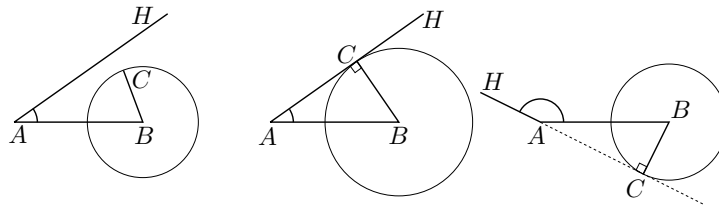


Cas 2: Transportem ABC sobre DEF i fem coincidir AB sobre DE i l'angle \widehat{ABC} sobre \widehat{DEF} . Llavors el segment BC cau sobre la recta per EF i B sobre E . Per no contradir I.16, C ha de caure sobre F i, pel mateix motiu que abans, AB i AC coincideixen amb DE i DF .

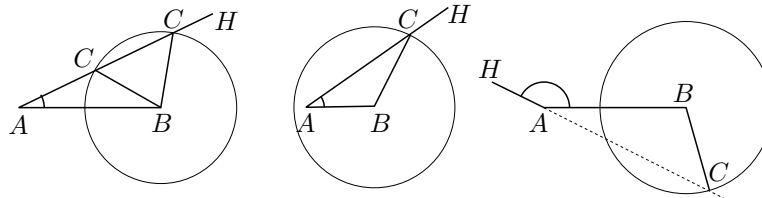
1.4.3.i El triangle de costat AB i angle $\widehat{BAH} < \pi$ donats, i costat BC de longitud donada i extrem C variable, es pot construir si i només si la circumferència (B, BC) i la semirecta AH tenen punts en comú.

Estudiem les possibilitats d'intersecció de les dues línies:

- 1) Si la circumferència (B, BC) no talla la recta AH , tampoc tallarà la semirecta AH . Això implica que no existeix cap triangle amb les dades donades.



- 2) Si la circumferència (B, BC) és tangent a la recta AH , pot passar que:
 - a) El punt de tangència sigui interior a la semirecta AH . Llavors, només es podrà construir un triangle amb les condicions donades i, per la tangència, el triangle serà rectangle.
 - b) El punt de tangència no sigui interior a la semirecta AH . Llavors, no existeix cap triangle.
- 3) Si la circumferència (B, BC) talla la recta AH en dos punts, pot passar que:



- a) Els dos punts siguin interiors a la semirecta AH . Llavors, existiran dos triangles amb les dades donades.
- b) Un punt sigui interior a la semirecta AH i l'altre no. Llavors, existirà un sol triangle.
- c) Cap dels dos punts sigui interior a la semirecta AH . En aquest cas no existirà cap triangle.

Aquesta discussió implica que C-C-A és un criteri d'igualtat si tenim dos triangles amb les dades sotmeses a les condicions (2a) o (3b).

Ara determinarem les condicions de validesa del criteri en funció dels valors de \widehat{BAH} , BA i BC :

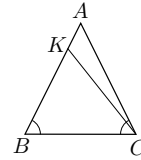
- Si $\widehat{BAH} < 90^\circ$, es produeix (2a) quan $\sin(\widehat{BAH}) = \frac{BC}{BA}$, i es produeix (3b) quan $BC > BA$.
- Si $\widehat{BAH} \geq 90^\circ$, mai es produeix (2a) i es produeix (3b) quan $BC > BA$.

En definitiva, les condicions que determinen la validesa de C-C-A es poden presentar en quatre casos:

1. \widehat{BAH} agut i $\sin(\widehat{BAH}) = BC/BA$.
2. \widehat{BAH} agut i $BC > BA$.
3. \widehat{BAH} recte i $BC > BA$.
4. \widehat{BAH} obtús i $BC > BA$.

1.4.3.ii Vegeu el fitxer Cca.FIG.

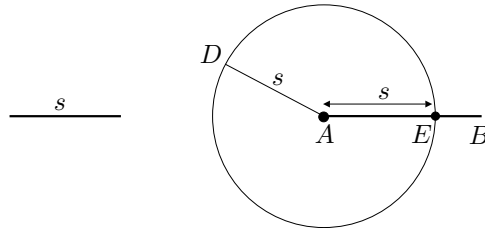
1.4.4 Si $AB > AC$, considerem —per I.3— K interior a AB tal que $BK = CA$. Els triangles BKC i BAC compleixen $BK = CA$, BC comú i $\widehat{KBC} = \widehat{ACB}$. Llavors —per I.4—, aquests triangles seran iguals amb tots els seus elements iguals, la qual cosa no és certa perquè un és més petit que l'altre.



1.5.1 Siguin AB el segment major i s el segment menor. Construïm,

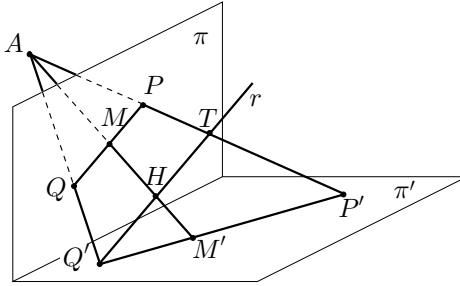
- El segment $AD = s$, sobre el punt A .
- La circumferència (A, AD) de centre A i radi AD .
- El punt E d'intersecció de AB i (A, AD) .

Aquest punt E , determina el segment $AE = AD = s$ sobre AB .



1.5.2 Vegeu el fitxer eui2.FIG.

1.6.1 Havíem considerat el punt A , de manera que PQ i $P'Q'$ no eren paral·leles. Tracem una paral·lela r , per Q' , a PQ , i suposem que M' és punt mitjà de $P'Q'$; veurem que això condueix a una contradicció.



Efectivament, la recta r determina els punts

$$H = AM' \cap r \quad \text{i} \quad T = AP' \cap r.$$

Llavors, de les semblances de triangles $AMQ \sim AHQ'$ i $AMP \sim AHT$, obtenim

$$\frac{QM}{Q'H} = \frac{AM}{AH} = \frac{MP}{HT}.$$

Per tant, en ser M el punt mitjà de PQ , tenim

$$\frac{Q'H}{HT} = \frac{QM}{MP} = 1 \implies Q'H = HT.$$

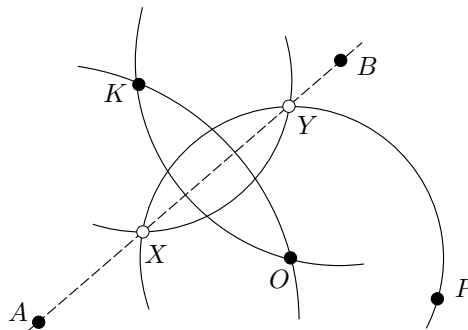
D'aquí obtenim que els triangles $HQ'M'$ i $TQ'P'$ són semblants, perquè $\widehat{HQ'M'} = \widehat{TQ'P'}$ i

$$\frac{Q'T}{Q'H} = \frac{2Q'H}{Q'H} = 2 = \frac{2Q'M'}{Q'M'} = \frac{Q'P'}{Q'M'}.$$

Consegüentment, les rectes HM' i TP' són paral·leles; però això no pot ser perquè es troben en el punt A .

1.6.2.i Notem que, amb el compàs, podem traçar els cercles (B, BO) i (A, AO) . Aquests, quan es tallen, determinen el segment OK , del qual la recta AB és la mediatriu. Llavors, els punts X i Y d'intersecció entre la recta AB i el cercle (O, OP) compleixen

$$KX = OX = OP = OY = KY.$$



Consegüentment, X i Y , si existeixen, són les interseccions de les circumferències (O, OP) i (K, OP) . Notem que el problema pot tenir dues, una o cap solució, segons les interseccions que tinguin aquestes dues circumferències.

1.6.2.ii Vegeu el fitxer `Recics.FIG`.

1.7.1.i **I.9:** En els triangles HDF i HEF tenim, $HD = HE$ i $DF = DE = EF$, per la construcció dels teoremes I.3 i I.1, i $HF = HF$. Llavors, pel teorema I.8 [C-C-C], es compleix $\widehat{DHF} = \widehat{EHF}$.

I.10: En els triangles AHD i BHD tenim, $AH = BH$ i $\widehat{AHD} = \widehat{BHD}$, per la construcció dels teoremes I.1 i I.9, i $HD = HD$. Llavors, pel teorema I.4 [C-A-C], es compleix $AD = DB$.

I.11: En els triangles DCF i ECF tenim, $CD = CE$ i $DF = DE = EF$, per la construcció dels teoremes I.3 i I.1, i $CF = CF$. Llavors, pel teorema I.8 [C-C-C], es compleix $\widehat{DCF} = \widehat{ECF}$. Consegüentment, en ser aquests dos angles iguals i adjacents, són angles rectes.

I.12: En els triangles AMC i BMC tenim les igualtats, $CA = CB$ i $MA = MB$; la primera per ser radis d'una circumferència, i la segona per la construcció de I.10. A més, $CM = CM$. Llavors, pel teorema I.8 [C-C-C], es compleix $\widehat{CMA} = \widehat{CMB}$. Consegüentment, en ser aquests dos angles iguals i adjacents, són angles rectes.

1.7.1.ii Vegeu el fitxer `Eui12.FIG`.

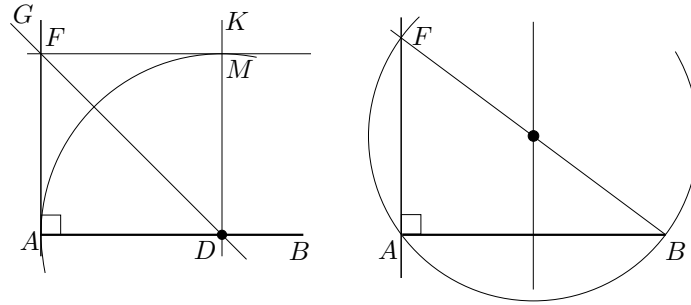
1.7.2 Primerament farem una anàlisi basada en una construcció de Procle,¹ la qual intentarem després optimitzar.

• **Construcció 1:**

Sigui AB el segment donat i suposem la perpendicular per A construïda. Considerem D interior a AB i el quadrat $ADMF$ sobre AD llavors la diagonal FD és la bisectriu de l'angle \widehat{ADM} . Si tenim en compte que sabem construir bisectrius i perpendiculars per un punt interior, el camí de la construcció queda marcat, encara que és una mica llarg:

- Agafem D sobre l'interior de AB i construïm, mitjançant I.12, la perpendicular DK a AB .
- Construïm la bisectriu DG de l'angle \widehat{ADK} .
- Intersequem la circumferència (D, DA) amb DK , i en resulta el punt M .
- Intersequem la perpendicular a DK per M amb la bisectriu DG , d'on resulta el punt F que determina la perpendicular AF cercada.

¹Vegeu MORROW [1970], 219.

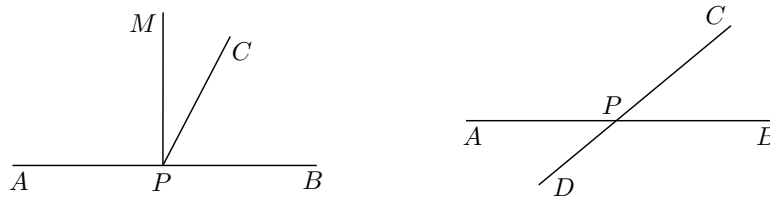


• **Construcció 2:**

Una anàlisi que ens portarà a una construcció més simple pot consistir en considerar una circumferència que passi per A i B , i llavors la intersecció F del diàmetre per B amb la circumferència està sobre la recta perpendicular buscada. L'inconvenient d'aquesta construcció és que hem utilitzat un resultat no demostrat per Euclides en el llibre I, però immediat de demostrar a partir dels teoremes d'aquest llibre, tot i que ell no ho fa fins el teorema III.31.

1.7.3 I.11 \implies I.13: Sigui CP aixecada sobre AB pel punt P . Si $\widehat{APC} = \widehat{BPC}$, seran rectes en ser adjacents. Si $\widehat{APC} > \widehat{BPC}$, per P aixequem una perpendicular —com explica I.11— i llavors,

$$\widehat{BPC} + \widehat{APC} = \widehat{BPC} + \widehat{CPM} + \widehat{MPA} = \widehat{BPM} + \widehat{MPA} = \pi.$$



I.13 \implies I.15: Si AB i CD es tallen en P , llavors

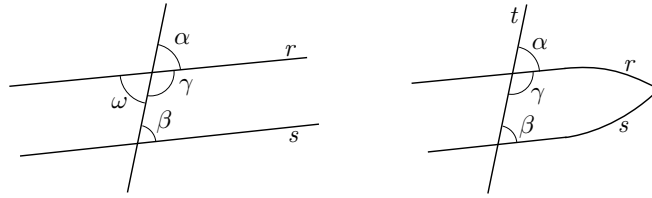
$$\widehat{APC} = \pi - \widehat{BPC} = \widehat{BPD},$$

en ser —per I.13— $\widehat{APC} + \widehat{BPC} = \widehat{BPD} + \widehat{BPC} = \pi$.

1.7.4.i I.13, I.15 i I.27 \implies I.28

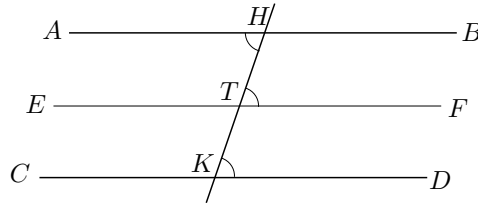
Cas 1: Si $\alpha = \beta$, en ser per I.15 $\alpha = \omega$, es compleix $\omega = \alpha = \beta$. Conseqüentment, per I.27, r i s són paral·leles.

Cas 2: Si $\gamma + \beta = \pi$, en ser per I.13 $\alpha + \gamma = \pi$, es compleix $\alpha = \beta$. A més, per I.15, $\alpha = \omega$. Conseqüentment $\beta = \omega$ i, per I.27, r i s són paral·leles.



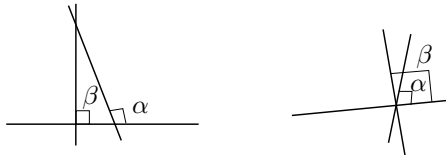
1.7.4.ii Si r i s no fossin paral·leles es tallarien d'algun costat de la secant t . Llavors, per I.16, $\alpha > \beta$ i també $\gamma + \beta < \gamma + \alpha = \pi$.

1.7.5 Siguin AB i CD paral·leles a EF .



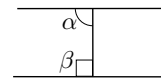
Tracem la recta HK secant a les rectes anteriors. Llavors, $\widehat{AHK} = \widehat{HTF} = \widehat{HKD}$, per I.29. Consegüentment, per I.27, AB és paral·lela a CD .

1.7.6.i Si el punt és exterior i existissin dues rectes perpendiculars tindríem, en ser tots els angles rectes iguals per P4, $\alpha = \beta$. Pel teorema de l'angle exterior tindríem $\alpha > \beta$, la qual cosa contradiu la igualtat anterior.



Si el punt és interior i existissin dues rectes perpendiculars, tindríem dos angles rectes diferents contra el que postula P4.

1.7.6.ii Si no fos perpendicular tindríem $\alpha < \beta = \pi/2$ i, per tant, $\alpha + \beta < \pi$. Llavors, per P5, les dues paral·leles es tallarien, la qual cosa no pot ser.



1.7.6.iii La perpendicular comuna a AB i CD per O existeix perquè:

- Es pot construir, per I.10, el punt mitjà.
- Existeix, per I.12 la perpendicular a AB per O .
- Aquesta perpendicular, per l'apartat anterior de l'activitat deduïda de P5, també es perpendicular a CD .

Si seguim el passos del raonament:

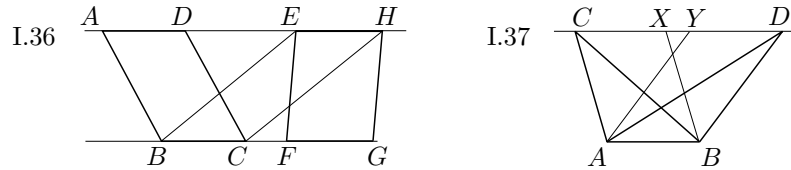
- Els segments OI i OK cauen dins dels angles aguts perquè sinó fos així, per I.16, un angle agut seria més gran que un angle recte i això no pot ser.
- Els angles \widehat{IOG} i \widehat{KOH} oposats pel vèrtex són iguals com afirma I.15.
- Els triangles OGI i OHK , per I.26, són congruents.

1.8.1 Vegeu els fitxers `Eui23.FIG`, `Trangpos.MAC` i `Trangneg.MAC`; els dos últims han estat creats a partir del fitxer `Tr_angle.FIG`.

1.8.2 Vegeu el fitxer `eui31.FIG`.

1.9.1 **I.36:** Observem que, en ser $BC = FG = EH$ i BC paral·lel a EH , llavors, per I.33, es compleix BE paral·lel a CH . Conseqüentment, per I.35,

$$\text{àrea}(ABCD) = \text{àrea}(EBCH) = \text{àrea}(EFGH).$$

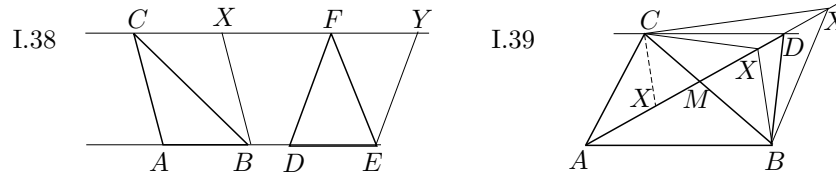


I.37: Completem els paral·lelograms $CABX$ i $DBAY$, mitjançant I.31. Llavors, per I.34 i I.35, tenim

$$\text{àrea}(ABC) = \frac{1}{2} \text{àrea}(CABX) = \frac{1}{2} \text{àrea}(DBAY) = \text{àrea}(ABD).$$

I.38: Completem els paral·lelograms $CABX$ i $FDEY$, mitjançant I.31. Llavors, per I.34 i I.36, tenim

$$\text{àrea}(ABC) = \frac{1}{2} \text{àrea}(CABX) = \frac{1}{2} \text{àrea}(FDEY) = \text{àrea}(DEF).$$



I.39: Suposem AB i CD no paral·lels. Tracem, per I.31, una paral·lela, per C , a AB . Aquesta tallarà AD en un punt $X \neq D$. Suposem X interior a AD . Llavors, per I.37 i per hipòtesi,

$$\text{àrea}(AXB) = \text{àrea}(ACB) = \text{àrea}(ADB) > \text{àrea}(AXB),$$

la qual cosa és una contradicció.

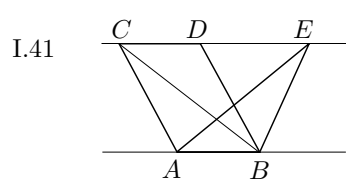
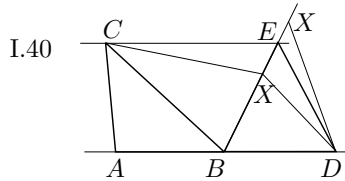
Si es considera X exterior a AD , i cau més enllà de D , s'arriba a la mateixa contradicció. Observem que entre els casos X interior a AD no hem estudiat el cas X interior a AM , en què $M = AD \cap BC$. Aquesta situació no es pot donar perquè CX i AB són paral·leles i, llavors, no pot ser que $\widehat{BAC} + \widehat{XCA} < \widehat{BAC} + \widehat{BCA} < \pi$.

I.40: Suposem AD i CE no paral·lels. Llavors, per I.31, tracem la paral·lela, per C , a AB . Aquesta talla BE en $X \neq E$. Si X és interior a BE , tenim

$$\text{àrea}(BDX) = \text{àrea}(ABC) = \text{àrea}(BDE) > \text{àrea}(BDX),$$

la qual cosa no pot ser.

Per a X exterior a BE , del costat de E , s'arriba a la mateixa contradicció.



I.41: Tracem la diagonal BC del paral·lelogram $ABCD$. Llavors, per I.34 i I.37,

$$\text{àrea}(ABCD) = 2 \text{àrea}(ABC) = 2 \text{àrea}(ABE).$$

1.9.2 Vegeu el fitxer `Dif2tr.FIG`.

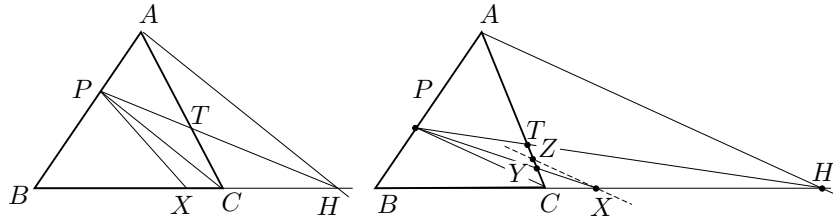
1.9.3.i Anàlisi: Sigui ABC el triangle i P el punt des del qual volem traçar la partició. Suposem, en primer lloc, que existeix un punt X interior al segment BC que compleix $\text{àrea}(PBX) = \text{àrea}(APXC)$. Considerem,

- El punt H sobre la prolongació de BC tal que $BH = 2BX$. Llavors, tenim que $\text{àrea}(PBX) = \text{àrea}(PXH)$.
- El punt T d'intersecció dels segments PH i AC . Llavors,

$$\begin{aligned} \text{àrea}(APT) &= \text{àrea}(APXC) - \text{àrea}(PTXC) = \\ &= \text{àrea}(PBX) - \text{àrea}(PTXC) = \\ &= \text{àrea}(PXH) - \text{àrea}(PTXC) = \text{àrea}(TCH). \end{aligned}$$

Consegüentment,

$$\begin{aligned} \text{àrea}(APH) &= \text{àrea}(APT) + \text{àrea}(ATH) = \text{àrea}(TCH) + \text{àrea}(ATH) = \\ &= \text{àrea}(ACH). \end{aligned}$$



Per tant, pel teorema I.37, les rectes PC i AH són paral·leles. O sigui que l'anàlisi per al cas X interior a BC s'ha acabat, perquè PC i AH són conegudes. Si refem els passos enrere, en resulta el mètode següent. Tracem:

- El segment PC .
- La paral·lela, per A , a PC que talla la recta BC en H .
- El punt mitjà X del segment BH .

Llavors, si el punt X cau a l'interior de BC , la recta PX parteix el triangle en dos figures d'igual àrea.

Si en la construcció anterior, X és exterior a BC , haurem de fer alguna correcció. Efectivament, si $Y = AC \cap PX$, tenim,

$$\begin{aligned}
 \text{àrea}(PYBC) + \text{àrea}(YCX) &= \text{àrea}(PYT) + \text{àrea}(TYXH) = \\
 &= \text{àrea}(PYT) + \text{àrea}(TCH) - \text{àrea}(YCX) = \\
 &= \text{àrea}(PYT) + \text{àrea}(APT) - \text{àrea}(YCX) = \\
 &= \text{àrea}(APY) - \text{àrea}(YCX).
 \end{aligned}$$

Consegüentment, l'únic que hem de fer és restar un triangle ZPY del triangle APY , tal que Z sigui interior a AY , i $\text{àrea}(ZPY) = \text{àrea}(YCX)$. Així:

$$\begin{aligned}
 \text{àrea}(APZ) &= \text{àrea}(APY) - \text{àrea}(ZPY) = \text{àrea}(APY) - \text{àrea}(YCX) = \\
 &= \text{àrea}(PYBC) + \text{àrea}(YCX) = \text{àrea}(PYBC) + \text{àrea}(PYZ) = \\
 &= \text{àrea}(PZBC).
 \end{aligned}$$

El punt Z serà la intersecció de AC amb la paral·lela, per X , a PC .

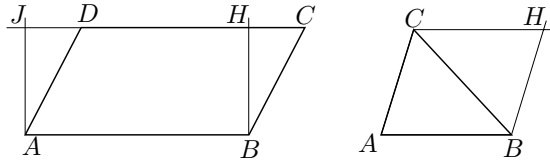
1.9.3.ii A partir del fitxer `Partri.FIG`, en què es visualitza la solució del problema, s'ha elaborat la macro `Partri.MAC`. El fitxer `Partri2.FIG` proporciona la construcció de la solució pas a pas.

1.9.4.i Sigui el paral·lelogram $ABCD$. Tracem BH perpendicular a CD , i AJ paral·lel a BH , en què H i J estan sobre la recta CD . Els triangles BCH i

ADJ són, per I.8 (C-C-C), congruents; perquè, per I.34, $BC = AD$, $BH = AJ$ i $CH = JC - JH = JC - AB = JC - DC = JD$. Per tant,

$$\begin{aligned} \text{àrea}(ABCD) &= \text{àrea}(ABHD) + \text{àrea}(BCH) = \text{àrea}(ABHD) + \\ &+ \text{àrea}(ADJ) = \text{àrea}(ABHJ) = AB \cdot BH. \end{aligned}$$

És a dir, que l'àrea del paral·lelogram $ABCD$ és el producte d'un dels seus costats per la separació entre aquest i el seu oposat.



Sigui el triangle ABC . Tracem BH i CH paral·leles a AC i AB . Pel teorema I.34, $\text{àrea}(ABC) = \text{àrea}(HCB)$. Llavors,

$$\text{àrea}(ABC) = \text{àrea}(ABCH) - \text{àrea}(HCB) = \text{àrea}(ABCH) - \text{àrea}(ABC).$$

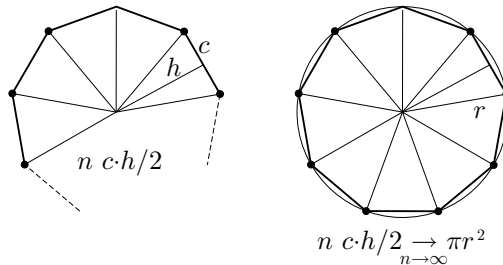
Per tant, $\text{àrea}(ABC) = \frac{1}{2} \text{àrea}(ABCH)$.

És a dir, que l'àrea del triangle ABC és la meitat del producte d'un dels seus costats, per la separació entre aquest i el seu vèrtex oposat.

Cada polígon regular de n costats, es pot partir en n triangles isòsceles iguals, amb un vèrtex sobre el centre de la circumferència circumscriu, i els altres dos vèrtexs sobre els extrems d'un costat del polígon. Llavors, l'àrea del polígon s'obté com a suma de les n àrees de la partició. Si anomenem c el costat del polígon, i h la distància del centre a cada costat —també anomenada *apotema*—, obtenim

$$\text{àrea} = n \left(\frac{1}{2} c \cdot h \right) = \frac{nc \cdot h}{2}.$$

En unes altres paraules, l'àrea resulta de multiplicar el semiperímetre per l'apotema.



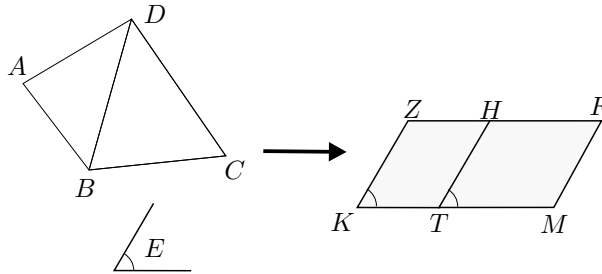
1.9.4.ii Només es tracta de fer una aproximació poc rigorosa a la fórmula de l'àrea. Se suposa que, prèviament, s'ha desenvolupat alguna activitat en què

s'ha comprovat aproximadament la invariància del quocient entre el perímetre i el diàmetre d'una circumferència. Partim, doncs, de que en una circumferència de perímetre p i diàmetre d , es compleix $p/d = \pi$. Considerem l'àrea del cercle de radi r , com la superfície límit de les superfícies dels polígons regulars inscrits, quan el seu nombre de costats augmenta indefinidament. Llavors, l'àrea d'un polígon inscrit de n costats, perímetre p_n i apotema h_n és $p_n \cdot h_n/2$. Per tant, l'àrea del cercle és,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n \cdot h_n}{2} = \frac{\pi d \cdot r}{2} = \pi r^2.$$

1.10.1 Vegeu el fitxer Eui44.FIG.

1.10.2 Sigui $ABCD$ la figura rectilínia donada. Tracem la diagonal BD . Construïm, per I.42, un paral·lelogram $TKZH$, tal que àrea $(TKZH) = \text{àrea}(ADB)$ i $\widehat{TKZ} = \widehat{E}$.



Llavors, per I.44, podem construir un paral·lelogram $HTMF$, sobre HT , tal que àrea $(HTMF) = \text{àrea}(BDC)$ i $\widehat{HTM} = \widehat{ZKT}$. Finalment, el paral·lelogram $ZKMF$, és el paral·lelogram cercat.

1.11.1 Per la desigualtat triangular, I.20, només cal trobar a , b i c tals que la suma de dos qualssevol d'ells sigui més gran que 6, i $a + b + c = 12$. Com es comprova fàcilment només hi ha tres possibilitats. Es poden construir triangles de costats $(2, 5, 5)$, $(3, 4, 5)$, $(4, 4, 4)$. Podem comprovar si ni'hi ha cap de rectangle, utilitzant I.48:

$$\begin{array}{l} 2^2 + 5^2 \neq 5^2 \quad 5^2 + 5^2 \neq 2^2 \\ \boxed{3^2 + 4^2 = 5^2} \quad 4^2 + 5^2 \neq 3^2 \quad 3^2 + 5^2 \neq 4^2 \\ 4^2 + 4^2 \neq 4^2. \end{array}$$

Efectivament, el triangle $(3, 4, 5)$ és rectangle.

1.11.2 Anomenem x i y , respectivament, els costats del primer i segon quadrats. Llavors, de les condicions de l'enunciat tenim

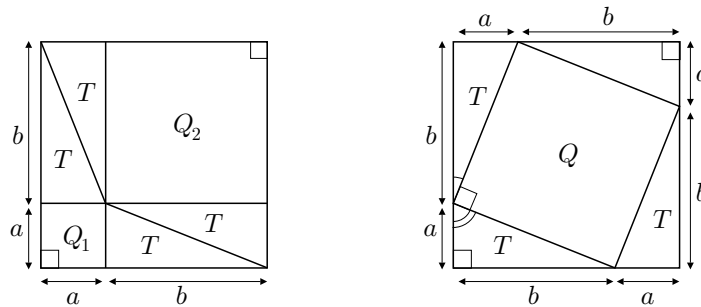
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 100 \\ \frac{x}{2} + \frac{x}{4} &= y.\end{aligned}$$

Per tant, si operem per substitució, obtenim

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 100 \implies 25x^2 = 1600 \implies \boxed{x = 8, y = 6}.$$

El tern pitagòric implicat és $(8, 6, 10)$, $[8^2 + 6^2 = 10^2]$.

1.11.3 Es parteix dels dos quadrats iguals adjunts, sobre els que es fan les particions determinades per a i b .



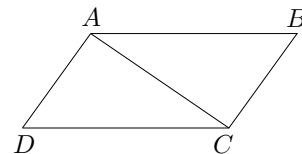
A les figures resultants observem:

- Els quadrilàters Q_1 i Q_2 són quadrats, perquè tots els seus costats són iguals i tenen un angle de 90° .²
- Els triangles T són rectangles. A més, són congruents, per I.4 (C-A-C).
- El quadrilàter Q té els costats iguals, perquè els triangles T són congruents. A més, cadascun dels seus angles és el suplementari de dos angles complementaris, per tant és recte. És a dir que Q és un quadrat.

²Si un quadrilàter $ABCD$ té els costats oposats iguals, llavors és un paral·lelogram. Això es pot justificar amb el traçat d'una diagonal AC , de la qual resulten ADC i CBA congruents, per I.8 (C-C-C). Llavors,

$$\begin{aligned}\widehat{DAB} + \widehat{ABC} &= \widehat{DAC} + \widehat{CAB} + \widehat{ABC} = \\ &= \widehat{ACB} + \widehat{CAB} + \widehat{ABC} = \pi.\end{aligned}$$

Això implica que AD i BC són paral·leles, per tant, per I.33, AB i DC també ho són.



Consegüentment,

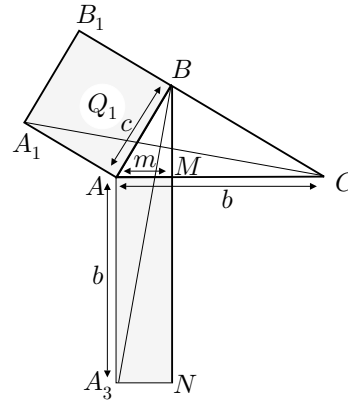
$$\begin{aligned} 4 \text{ àrea}(T) + \text{àrea}(Q_1) + \text{àrea}(Q_2) &= 4 \text{ àrea}(T) + \text{àrea}(Q) \implies \\ \implies \text{àrea}(Q_1) + \text{àrea}(Q_2) &= \text{àrea}(Q). \end{aligned}$$

1.11.4 Efectivament, Euclides demostra que

$$\begin{aligned} \text{àrea}(Q_1) &= 2 \text{ àrea}(A_1AC) = \\ &= 2 \text{ àrea}(BAC) = \\ &= \text{àrea}(A_3M). \end{aligned}$$

Si utilitzem el llenguatge algebraic actual, tenim

$$c^2 = \text{àrea}(Q_1) = \text{àrea}(A_3M) = m \cdot b.$$



1.11.5 Vegeu el fitxer Eui47tr.FIG.

1.11.6 Vegeu el fitxer Teorpit1.FIG en el qual hi ha el puzzle. En els fitxers Teorpit2.FIG i Teorpit3.FIG hi ha la solució. S'han utilitzat les macros `Quadril_ter.MAC` i `TriangPitag`. Aquesta última no s'ha guardat en un fitxer, però és equivalent a la macro `Triangletg.MAC`.

9.2 Activitats del capítol 2

2.1.1.i Hem de mirar l'extrem dret de la regió M_3 . Seran entre les 9 i les 10 del matí, o bé entre les 2 i les 3 de la tarda.

2.1.1.ii Coincidirà amb MN des de principis de març fins a meitat d'octubre. Coincidirà amb CD , sempre, dues vegades al dia.

2.1.1.iii El rectangle determinat per A , B i la intersecció del costat dret de M_6 amb la línia H_1 de les 12 hores.

2.1.2 Vegeu el fitxer **Merkhet.FIG**.

2.2.1.i Del gràfic adjunt obtenim

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

a	a^2	ba	ca
b	ab	b^2	cb
c	ac	bc	c^2
	a	b	c

2.2.1.ii

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= ((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + c^2 + 2(a + b)c = \\ &= a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2ac + 2bc = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.\end{aligned}$$

2.2.1.iii Vegeu el fitxer **Quadtrin.FIG**.

2.2.2.i

$$\begin{aligned}(a + b + c + d)^2 &= ((a + b + c) + d)^2 = (a + b + c)^2 + d^2 + 2(a + b + c)d = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + d^2 + 2ad + 2bd + 2cd = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.\end{aligned}$$

2.2.2.ii Si observem els casos dels quadrats del binomi, trinomi i tetranomi, observem que apareixen tots els quadrats dels sumands implicats i tots els dobles productes de les seves possibles parelles no ordenades. A partir d'això conjecturem:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1}}^n 2a_i a_j.$$

El raonament per inducció diu que verifiquem la fórmula pel primer valor de n , en el nostre cas $n = 2$. Efectivament és certa

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2.$$

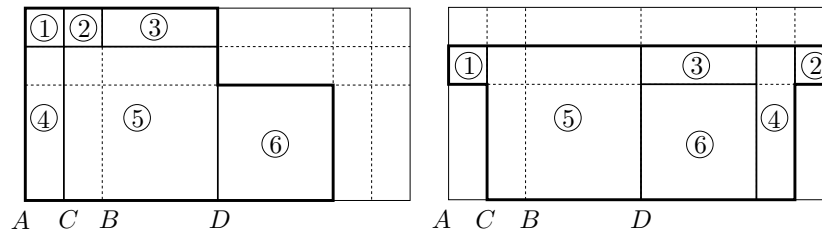
Després hem de verificar-la per a $n + 1$, si suposem que és certa per a n .

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)a_{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1}}^n 2a_i a_j + a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^n 2a_k a_{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1}}^{n+1} 2a_i a_j. \end{aligned}$$

2.2.2.iii Si expandim la successió $s_n = s_{n-1} + an + b$. donada, obtenim,

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-1} + an + b = s_{n-2} + a(n-1) + an + 2b = \\ &= s_{n-3} + a(n-2) + a(n-1) + an + 3b = \\ &= s_1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + \dots + a(n-1) + an + (n-1)b = \\ &= s_1 + a(2 + 3 + \dots + n) + (n-1)b = s_1 + a \cdot \frac{2+n}{2}(n-1) + (n-1)b = \\ &= s_1 + \frac{a}{2}(n^2 + n - 2) + b(n-1) = \\ &= s_1 + \frac{1}{2}(an^2 + (a+2b)n - 2a - 2b) \end{aligned}$$

2.3.1 La demostració de II.10 es pot completar observant la igualtat dels rectangles i quadrats marcats amb el mateix nombre en el gràfic adjunt.



2.3.2.i

c_n	d_n	d_n/c_n	c_n	d_n	d_n/c_n
1	2	2	1	10	10
3	4	1.3333333	11	12	1.090909
7	10	1.4285714	23	34	1.478260
17	24	1.4117647	57	80	1.403508
41	58	1.4146341	137	194	1.416058
99	140	1.4141414	331	468	1.413897
239	338	1.4142259	799	1130	1.414267
577	816	1.4142114	1929	2728	1.414204
1393	1970	1.4142139	4657	6586	1.414215
3363	4756	1.4142134	11243	15900	1.414213

El valor que dona la calculadora és $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$

2.3.2.ii

c_n	d_n	d_n/c_n
1	5	5
6	26	4.333
32	152	4.75
184	824	4.478
1008	4688	4.650
5696	2.5856	4.539
31552	145472	4.610
177024	808064	4.564
985088	4525568	4.594
5510656	25212416	4.575

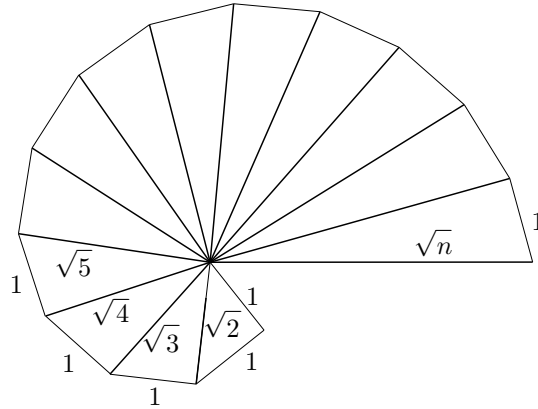
L'arrel buscada complirà

$$4.575 < \sqrt{21} < 4.594.$$

Podem aconseguir una cota de l'error comès en les dues últimes aproximacions, a partir de la seva diferència

$$\text{Error} < 4.595 - 4.575 = 0.02.$$

2.3.3.i Cada segment amb mesura \sqrt{A} és la hipotenusa del triangle rectangle de catets 1 i $\sqrt{A-1}$.



2.3.3.ii Vegeu els fitxers `Trireccu.MAC` i `Arrela.FIG`.

2.3.4.i

$$x_n = \frac{d_n}{c_n} = \frac{\frac{Ac_{n-1} + d_{n-1}}{c_{n-1}}}{\frac{c_{n-1} + d_{n-1}}{c_{n-1}}} = \frac{A + \frac{d_{n-1}}{c_{n-1}}}{1 + \frac{d_{n-1}}{c_{n-1}}} = \frac{A + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}.$$

2.3.4.ii Vegeu el fitxer `Codiarre.MTH` i les funcions `COSTDIAG(c1, d1, k, n)`, `ARRELAP1(x1, a, n)` i `GRARR1(x1, a, n)`.

2.3.5.i

$$\begin{aligned} x_n &= a \cdot \frac{d_n}{c_n} = a \cdot \frac{\frac{A_1 c_{n-1} + d_{n-1}}{c_{n-1}}}{\frac{c_{n-1} + d_{n-1}}{c_{n-1}}} = a \cdot \frac{\left(1 + \frac{b}{a^2}\right) + \frac{d_{n-1}}{c_{n-1}}}{1 + \frac{1}{a} \cdot a \cdot \frac{d_{n-1}}{c_{n-1}}} = \\ &= \frac{(a^2 + b) + a^2 \cdot \frac{d_{n-1}}{c_{n-1}}}{a + a \cdot \frac{d_{n-1}}{c_{n-1}}} = \frac{A + ax_{n-1}}{a + x_{n-1}} \end{aligned}$$

2.3.5.ii Vegeu el fitxer `Codiarre.MTH` i les funcions `PEA(a)`, `ARRELAP2(x1, a, n)` i `GRARR2(x1, a, n)`.

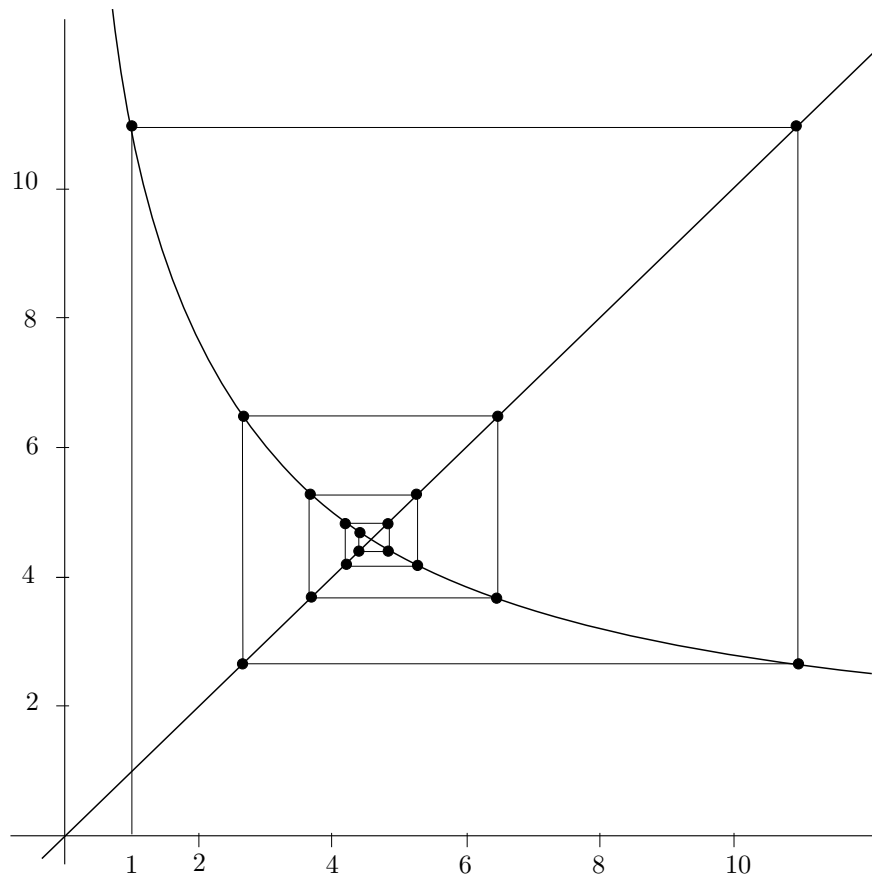
2.3.6 Per obtenir 9 valors aproximats a partir de

$$f(x) = \frac{A + x}{1 + x},$$

apliquem ARRELAUX1(1, 21, 9) i obtenim

1, 11, 2.66666, 6.45454, 3.68292, 5.27083, 4.18936, 4.85403, 4.41644, 4.69245 .

Per visualitzar-los apliquem GRARR1(1, 21, 16) i obtenim:



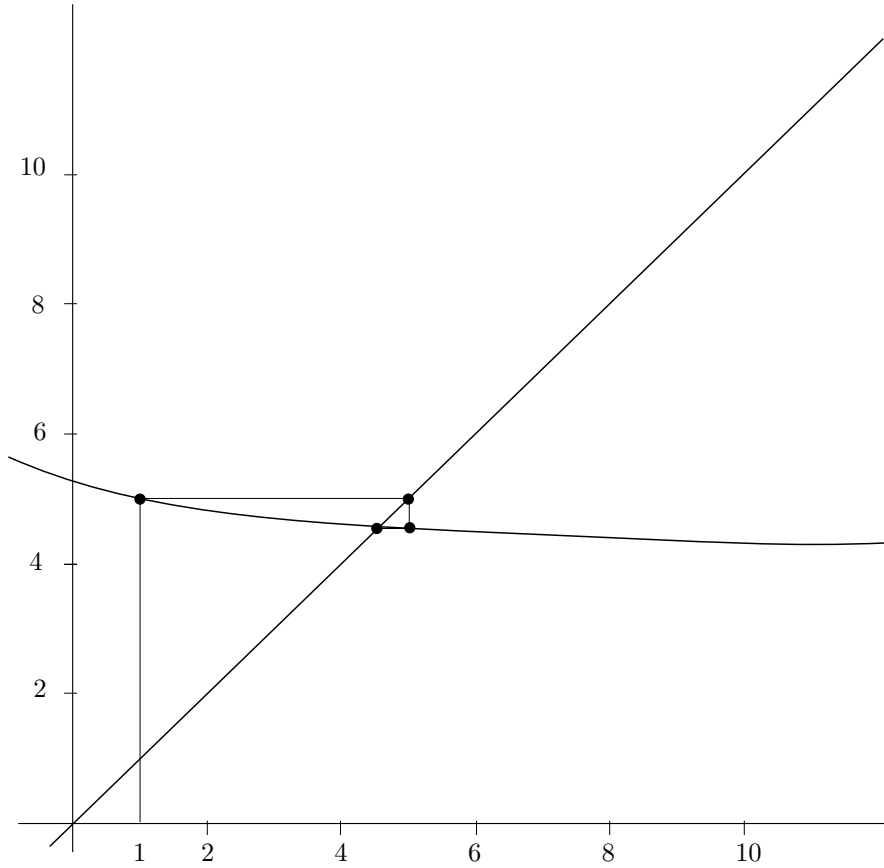
Per obtenir 9 valors aproximats a partir de

$$f(x) = \frac{A + ax}{a + x},$$

apliquem ARRELAUX2(1, 21, 9) i obtenim

1, 5, 4.55555, 4.58441, 4.58245, 4.58258, 4.5825751, 4.5825757,
4.582575692, 4.582575695 .

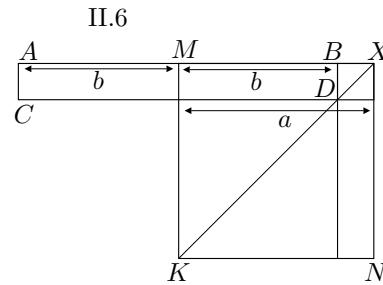
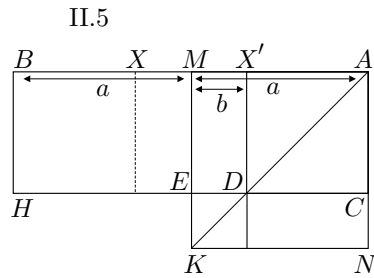
Per visualitzar-los apliquem GRARR2(1, 21, 16) i obtenim



2.4.1 – Si partim del teorema II.5:

Fem $BM = MA = a$ i $MX' = b$. Llavors:

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= BX' \cdot AX' = BX' \cdot X'D = X'H = \\ &= AK - DK = AM^2 - MX'^2 = a^2 - b^2. \end{aligned}$$



– Si partim del teorema II.6:

Fem $BM = MA = b$ i $MX = a$. Llavors:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= AX \cdot BX = AX \cdot AC = XC = \\ &= XK - DK = MX^2 - MB^2 = a^2 - b^2.\end{aligned}$$

2.4.2 Vegeu el fitxer Ii11.FIG.

2.4.3 Vegeu el fitxer Equ2n1.FIG.

2.5.1 Hem de veure que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AC \cdot AD$.

Aplicarem I.47 sobre els triangles rectangles ADB i CDB , i utilitzarem II.7 per desenvolupar $CD^2 = (AC - AD)^2$:

$$- \text{I.47} \implies BC^2 = CD^2 + BD^2.$$

$$- \text{II.7} \implies CD^2 = (AC - AD)^2 = AC^2 - 2 AC \cdot AD + AD^2.$$

$$- \text{I.47} \implies AB^2 = AD^2 + BD^2.$$

$$\text{Per tant, } BC^2 = AC^2 - 2 AC \cdot AD + AD^2 + BD^2 = AC^2 - 2 AC \cdot AD + AB^2.$$

2.5.2 Vegeu el fitxer Qurra.FIG.

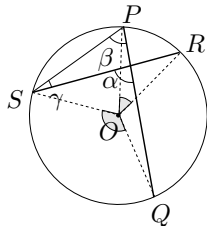
2.5.3

$$\begin{aligned}\text{II.12: } BC^2 &= AB^2 + AC^2 + 2 AC \cdot AD = \\ &= AB^2 + AC^2 + 2 AC \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAD} = \\ &= AB^2 + AC^2 + 2 AB \cdot AC \cdot (-\cos \widehat{BAC}) = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2 AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}.\end{aligned}$$

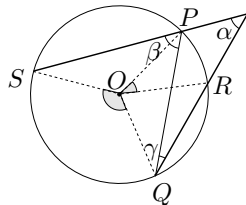
$$\begin{aligned}\text{II.13: } BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 AC \cdot AD = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2 AC \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAD} = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2 AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}.\end{aligned}$$

2.6.1.i Sigui l'angle α que subtendeix els arcs \widehat{SQ} i \widehat{PR} .

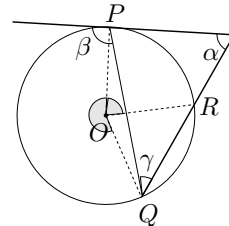
$$\alpha = \beta + \gamma = \frac{1}{2} \widehat{SOQ} + \frac{1}{2} \widehat{POR} = \frac{1}{2} (\widehat{SOQ} + \widehat{POR}).$$



angle interior



angle exterior (secant)



angle exterior (tangent)

2.6.1.ii Sigui l'angle α que subtendeix els arcs \widehat{SQ} i \widehat{PR} .

$$\alpha = \beta - \gamma = \frac{1}{2}\widehat{SOQ} - \frac{1}{2}\widehat{POR} = \frac{1}{2}(\widehat{SOQ} - \widehat{POR}).$$

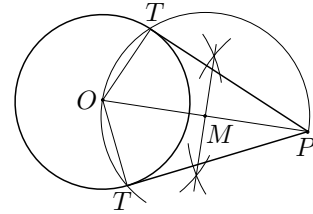
En el cas d'existir algun costat tangent al cercle, —en la figura $P = S$ —, hem d'aplicar el teorema III.32 estudiat a la secció 2.6.2. Obtenim,

$$\alpha = \beta - \gamma = \frac{1}{2}\widehat{POQ} - \frac{1}{2}\widehat{POR} = \frac{1}{2}(\widehat{POQ} - \widehat{POR}).$$

2.6.1.iii Vegeu els fitxers *Angint.FIG* i *Angext.FIG*.

2.6.2.i Sigui O el centre de la circumferència i P el punt exterior. Suposem el problema resolt, és a dir que tenim la tangent PT construïda, essent T el punt de contacte.

Llavors, $\widehat{OTP} = \pi/2$. Per tant, —per III.20—, la circumferència que passa per O, T i P , tindrà OP com a diàmetre. Amb això s'ha acabat l'anàlisi perquè aquesta circumferència és coneguda. La construcció consistirà doncs a traçar:



- El punt mitjà M de OP , el qual serà el centre de la circumferència per O, T i P .
- La circumferència (M, MO) .
- El punt T d'intersecció entre la circumferència (M, MO) i la circumferència donada.

Llavors, la recta PT és la recta tangent cercada. N'hi haurà dues perquè les dues circumferències es tallen en dos punts diferents.

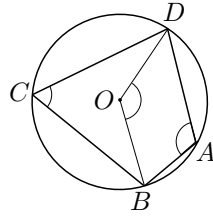
2.6.2.ii Vegeu els fitxers *Tanpex.FIG* i *Tanpex.MAC*.

2.6.3.i Cas directe:

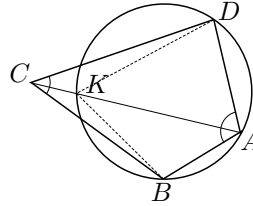
$$\begin{cases} \widehat{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{BOD} \\ \widehat{BAD} = \frac{1}{2}(2\pi - \widehat{BOD}) \end{cases} \implies \widehat{BCD} + \widehat{BAD} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

A més, en ser la suma d'angles d'un quadrilàter igual a dos angles rectes,

$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 2\pi - (\widehat{BCD} + \widehat{BAD}) = 2\pi - \pi = \pi.$$



III.32



Recíproc de III.32

Cas recíproc:

Suposem el punt C exterior al cercle i $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = \pi$. Sigui K el punt d'intersecció de la recta AC amb la circumferència per A , D i B . Llavors, tenint en compte l'última observació de la secció prèvia,

$$\pi = \widehat{DAB} + \widehat{DCB} < \widehat{DAB} + \widehat{DKB} = \pi,$$

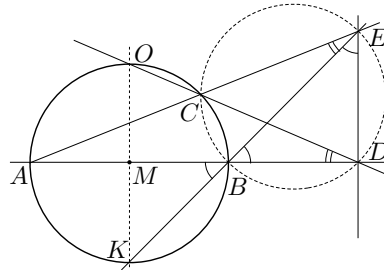
la qual cosa és contradictòria.

Si C fos interior al cercle, s'arriba a la contradicció $\pi > \pi$ considerant, igual que abans, el punt K .

2.6.3.ii Anàlisi:

Sigui M el centre de la circumferència i tracem BE , prolongant-la fins que la talli en K . Si suposem el problema resolt, tenim $BD = ED$. Llavors, en ser BDE rectangle,

$$\widehat{ABK} = \widehat{DBE} = \widehat{DEB} = 45^\circ.$$



Per tant, $\widehat{AMK} = 2 \cdot \widehat{ABK} = 90^\circ = \widehat{AMO}$. Llavors, $\widehat{ODA} = \widehat{AEK}$, perquè subtendeixen els arcs iguals $\widehat{AO} = \widehat{AK}$, i comparteixen \widehat{BC} .

D'altra banda, si examinem els punts C , B , D i E , es compleix

$$\widehat{ECB} + \widehat{BDE} = (180^\circ - \widehat{BCA}) + 90^\circ = (180^\circ - 90^\circ) + 90^\circ = 180^\circ$$

i, per tant, són concíclics. Consegüentment la igualtat $\widehat{ODA} = \widehat{AEK}$ és coneguda, perquè aquests angles estan inscrits en la circumferència $CBDE$ i subtendeixen el mateix arc \widehat{BC} . L'anàlisi s'ha acabat i podem refer el camí enrere per donar la demostració que demana el problema.

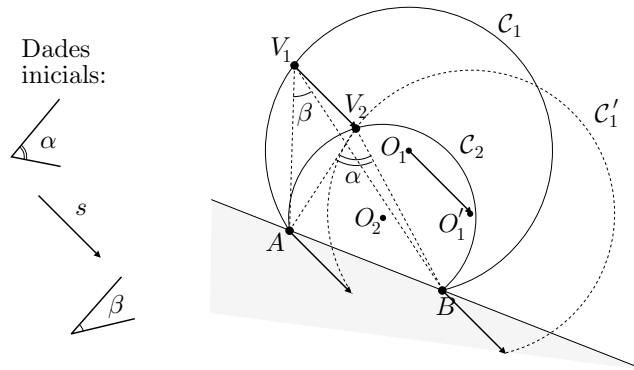
Síntesi:

En ser C, B, D i E concíclics, tenim $\widehat{ODA} = \widehat{AEK}$, per ser angles inscrits en la circumferència $CBDE$ que subtendeixen el mateix arc \widehat{BC} . Llavors,

$$\begin{aligned} \widehat{ODA} = \widehat{AEK} &\implies \frac{\widehat{AMK} - \widehat{CMB}}{2} = \frac{\widehat{AMO} - \widehat{CMB}}{2} \implies \\ &\implies \widehat{AMK} = \widehat{AMO} = 90^\circ \implies \widehat{DBE} = \widehat{ABK} = \frac{\widehat{AMK}}{2} = 45^\circ \\ &\implies \widehat{DEB} = 90^\circ - \widehat{DBE} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \widehat{DBE} \implies \\ &\implies BD = ED. \end{aligned}$$

2.7.1 Anàlisi:

Suposem el problema resolt. Llavors, V_1 pertany a l'arc capaç \mathcal{C}_1 de l'angle β sobre AB , i V_2 a l'arc capaç \mathcal{C}_2 de α sobre AB . A més, $V_1V_2 = s$ en magnitud, direcció i sentit. Si sotmetem l'arc $\widehat{AV_1B}$ al desplaçament determinat per s , el desplaçat del punt V_1 és V_2 , el qual coincideix amb la intersecció entre l'arc \mathcal{C}'_1 desplaçat i l'arc AV_2B . Però aquesta intersecció és coneguda, en ser-ho \mathcal{C}'_1 i \mathcal{C}_2 , i l'anàlisi s'ha acabat.



Construcció:

Per aconseguir els punts V_1 i V_2 tracem:

- L'arc capaç \mathcal{C}_1 de β sobre AB .
- L'arc capaç \mathcal{C}_2 de α sobre AB .
- El traslladat O'_1 del centre O_1 de l'arc \mathcal{C}_1 i, amb el mateix radi que \mathcal{C}_1 , l'arc \mathcal{C}'_1 desplaçat.
- El punt V_2 d'intersecció de \mathcal{C}'_1 i \mathcal{C}_2 .
- El punt V_1 tal que $V_1V_2 = s$.

La prova sintètica que V_1 i V_2 són els punts demanats, és immediata refent enrere l'anàlisi.

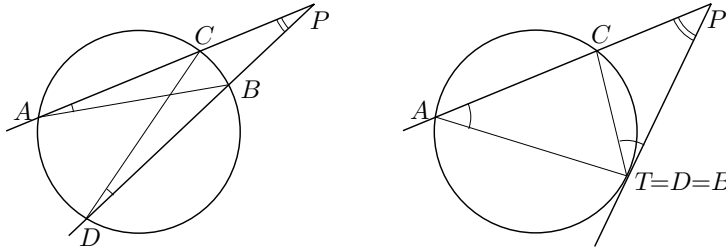
Per a la visualització de la solució, vegeu el fitxer **Vaixell3.FIG**.

2.8.1 Siguin P el punt exterior al cercle, PA una secant en C i A , i PD l'altra secant en B i D . Volem demostrar, segons la figura adjunta, que $PC \cdot PA = PB \cdot PD$. Això quedaria demostrat si poguéssim establir

$$\frac{PC}{PB} = \frac{PD}{PA}.$$

Per aconseguir-ho, interessa trobar dos triangles semblants en què estiguin implicats aquests segments. Els triangles indicats són APB i DPC . Són semblants perquè,

- $\widehat{PAB} = \widehat{PDC}$, en ser inscrits i subtendir el mateix arc \widehat{BC} .
- $\widehat{APB} = \widehat{DPC}$, en ser el mateix angle.



La demostració segueix essent vàlida per al cas en què hi ha un costat tangent, és a dir $D = B = T$. Llavors els triangles PCT i PTA també són semblants, i en resulta

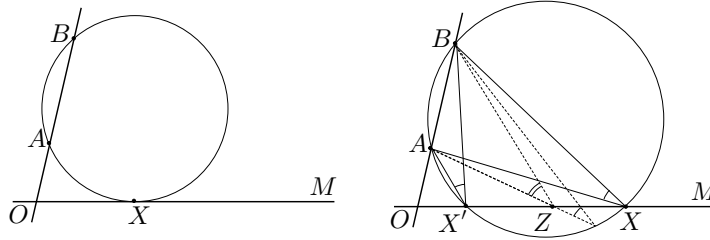
$$\frac{PC}{PT} = \frac{PT}{PA}, \quad \text{és a dir} \quad PT^2 = PA \cdot PC.$$

2.8.2.i Anàlisi del problema:

Suposem el problema resolt, és a dir que tenim el punt X construït de manera que \widehat{AXB} és màxim. En aquest cas, la circumferència ABX només pot tocar en un punt la recta OM . Això és així, perquè si la tallés en dos punts X i X' , llavors qualsevol punt Z de OM , situat entre X i X' , compliria

$$\widehat{AZB} > \widehat{AXB} = \widehat{AX'B}.$$

Però això no podria ser perquè \widehat{AXB} és màxim.

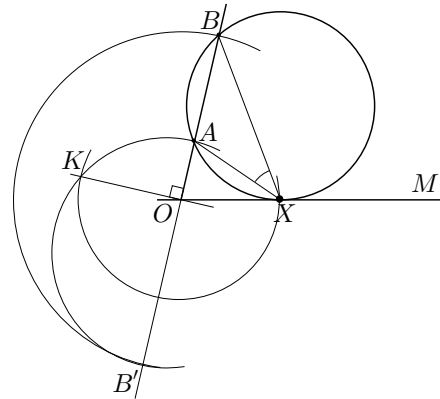


Consegüentment la circumferència per A i B , tangent a la recta OM , determina la solució del problema mitjançant el seu punt X de contacte amb OM .

Ara, pel teorema III.36, el punt X compleix $OX^2 = OA \cdot OB$. Per tant OX és conegut gràcies a la construcció que fa II.14, i l'anàlisi s'ha acabat.³

Construcció de la solució:⁴ A partir de les indicacions obtingudes de l'anàlisi,

- Prolonguem la recta OB , pel costat de O , la tallem amb la circumferència (O, OB) , i surt B' .
- Tracem la circumferència de diàmetre AB' i la tallem amb la perpendicular, per O , a AB' . Surt el punt K .
- Tallem la circumferència (O, OK) amb la recta OM , i surt X .



Síntesi:

El punt X és el punt buscat perquè, pel teorema III.37, OX és tangent a la circumferència ABX , en ser $OX^2 = OA \cdot OB$ per la construcció que hem fet proporcionada per II.14.

2.8.2.ii Vegeu el fitxer **Cinema.FIG**.

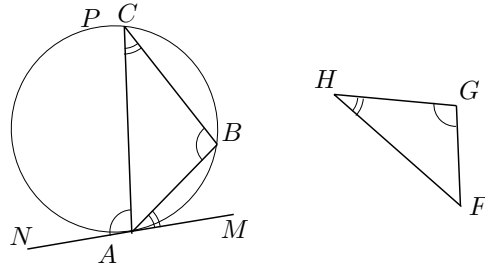
2.9.1 Donat el triangle FGH , volem construir el triangle ABC inscrit en un cercle donat tal que $\widehat{A} = \widehat{F}$, $\widehat{B} = \widehat{G}$ i $\widehat{C} = \widehat{H}$.

Suposem el problema resolt i tracem una tangent MN pel vèrtex A . Llavors,

$$\widehat{MAB} = \widehat{BCA} = \widehat{GHF} \quad \text{i} \quad \widehat{NAC} = \widehat{ABC} = \widehat{FGH}.$$

³També es pot construir OX pel teorema del catet, que es posa de manifest en la demostració, d'Euclides, del teorema de Pitàgores [I.47].

⁴Utilitzem II.14.

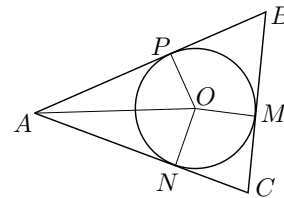


L'anàlisi s'ha acabat perquè sabem construir:

- La tangent pel punt A , traçant la perpendicular per l'extrem del radi que passa per A .
- Un angle igual al \widehat{GHF} sobre AM , i un angle igual al \widehat{FGH} sobre AN .

2.9.2 Suposem el cercle, inscrit en el triangle ABC , construït amb el seu centre en el punt O . Siguin M , N i P , els punts de tangència sobre els costats BC , CA i AB . Llavors, els triangles PAO i NAO són iguals, perquè:

- $ON = OP$, en ser els radis.
- OA és un costat comú.
- $\widehat{ONA} = \widehat{OPA} = \pi/2$, en ser ON i OP radis.

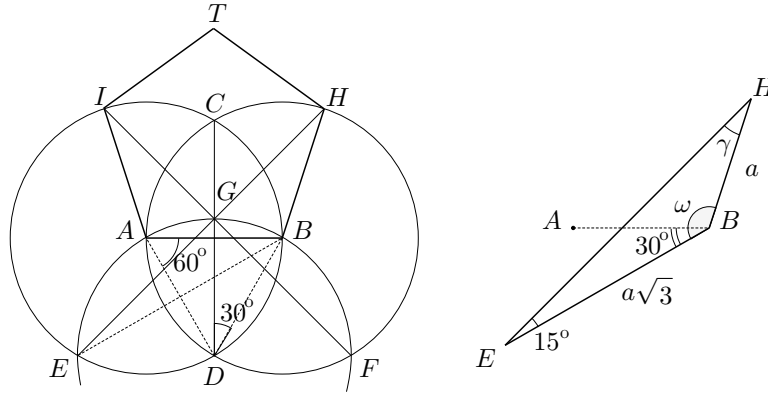


Per tant, $\widehat{PAO} = \widehat{NAO}$. i OA és la bisectriu de l'angle \widehat{BAC} .

De la mateixa manera es pot veure que $\widehat{PBO} = \widehat{MBO}$ i $\widehat{MCO} = \widehat{NCO}$. Per tant, les rectes AO , BO i CO , són les bisectrius dels angles del triangle. En ser aquestes conegudes, l'anàlisi s'ha acabat.

2.9.3 Vegeu el fitxer `Pentapto.FIG`.

2.9.4.i De l'observació de la construcció de Dürer obtenim que els costats són iguals. Si observem els angles implicats trobem la informació següent, la qual servirà per aplicar la trigonometria al triangle EBH , i calcular el valor de l'angle ABH del pentàgon:



$$\widehat{ADB} = 60^\circ \implies \widehat{GDB} = 30^\circ \implies \widehat{GEB} = 15^\circ$$

$$\widehat{ABD} = 60^\circ \implies \widehat{ABE} = 30^\circ$$

$$AB = BD = AD = a \implies EB = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

Ara, si considerem el triangle EBH , i apliquem el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin 15^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{\sin \gamma}, \text{ és a dir } \sin \gamma = \sqrt{3} \cdot \sin 15^\circ \text{ i } \gamma \approx 26^\circ 38' 2''.$$

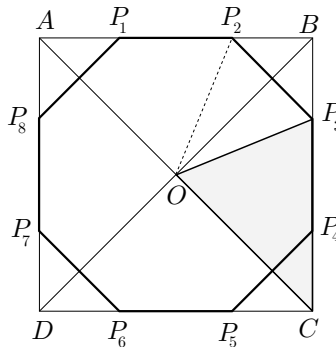
Llavors,

$$\omega = 180^\circ - 15^\circ - \gamma \approx 138^\circ 21' 58'' \implies \widehat{ABH} = \omega - 30^\circ \approx 108^\circ 21' 58''.$$

El pentàgon no és equiangular i per tant no és regular, perquè si tots els angles foren iguals tindríem $540^\circ = 5 \cdot 108^\circ 21' 58''$, la qual cosa no és certa.

2.9.4.ii Vegeu el fitxer `Pentadur.FIG`.

2.9.5 Suposem el problema resolt. Sigui O el centre de les circumferències circumscrites al quadrat $ABCD$ i l'octàgon de vèrtexs P_i . Estudem el triangle $OC P_3$. Observem que:



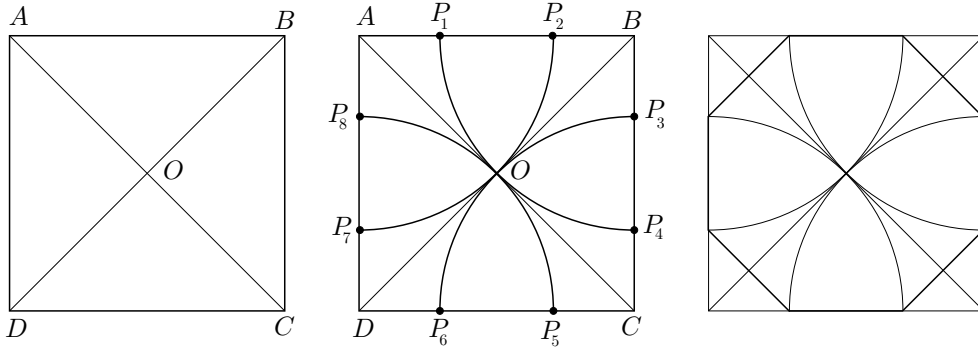
$$\widehat{COP_3} = \widehat{COB} - \widehat{P_3OB} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8},$$

$$\widehat{CP_3O} = \widehat{CP_3B} - \widehat{BP_3P_2} - \widehat{P_2P_3O} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{8}.$$

O sigui que el triangle OCP_3 és isòscles. Per tant, el radi OC de la circumferència circumscrita al quadrat, és igual al segment determinat pel vèrtex C del quadrat i el vèrtex P_3 de l'octàgon, més allunyat de C , sobre el costat BC . El mateix es pot dir d'aquest radi respecte dels segments CP_6 , DP_5 , DP_8 , etc.

En aquest punt l'anàlisi s'ha acabat, en ser el radi OC conegut. Llavors, la construcció de l'octàgon es podrà aconseguir amb el traçat de:

- El punt O d'intersecció de les dues diagonals AC i BD del quadrat.
- Els punts P_i d'intersecció de les circumferències (A, AO) , (B, BO) , (C, CO) i (D, DO) , amb els costats del quadrat.



Vegeu el fitxer `Quadoct2.FIG`.

9.3 Activitats del capítol 3

3.1.1.i Partim del fet que els quadrats són figures semblants i, per tant, la relació entre les àrees és el quadrat de la relació entre els costats. Llavors és fàcil construir el quadrat d'àrea $4a^2$, el qual tindrà un costat de longitud $2a$. Si interpolem geomètricament, de manera similar al cas de la duplicació del cub, l'àrea d'un quadrat entre les dues àrees anteriors, obtindrem el quadrat d'àrea $2a^2$. Així tenim els quadrats a^2 , $2a^2$, $4a^2$, amb costats respectius a , x , $2a$.

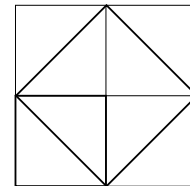
Hem de construir el costat x , i per la relació entre costats i àrees sabem:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{a}{x}\right)^2 = \left(\frac{x}{2a}\right)^2, \quad \text{és a dir,} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{2a}.$$

Consegüentment, la construcció del costat x es redueix a la construcció de la mitjana proporcional dels segments a i $2a$. La proposició II.14 dels *Elements* proporciona una manera de dur a terme aquesta construcció. Ho veurem una mica més avall, a l'últim apartat de 3.1.1.

3.1.1.ii En el *Menó*, Sòcrates i Menó tracten de la virtut, concretament sobre si pot ser ensenyada o no. La qüestió és la de saber com es pot conèixer el que desconeixem. Sòcrates defensa que només s'ensenya allò que està imprès en la nostra ànima immortal; l'ensenyament consistiria només en ajudar a despertar el record (teoria de la reminiscència) d'allò que ja se sap. Intenta demostrar-ho amb l'ajut d'un esclau de Menó, a qui proposa un problema de geometria en ser aquesta una disciplina a la qual mai havia sigut introduït. El problema és el de la construcció d'un quadrat d'àrea doble que la d'un quadrat donat. Després d'un primer intent fallit en què l'esclau arriba a la construcció d'un quadrat quàdruple, assoleix la solució amb la construcció d'un quadrat sobre la diagonal del quadrat inicial.

És interessant de cara a la nostra pròpia pedagogia, la manera en que Sòcrates porta el diàleg. Aquest, en una interrupció de la conversa amb l'esclau, fa notar que gràcies a la manera de conduir el diàleg l'esclau pren consciència del problema, arriba al resultat per deduccions pròpies, i no pas per les explicacions que ell li hagués pogut donar.



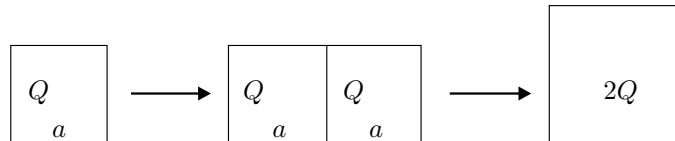
La presentació amb el CABRI la trobareu en els fitxers *Dupmeno.FIG*, *Dupmeno2.FIG* i *Dupmeno.MAC*. La macro s'ha construït segons els passos següents:

- 1) Quadrat $ABCD$, amb la macro **Quadrat**.
- 2) Semirecta Mr .
- 3) Diagonal BD del quadrat $ABCD$.
- 4) Quadrat de costat BD , amb la macro citada.
- 5) Circumferència (M, BD) de centre M i radi BD —amb l'eina **Compàs**.

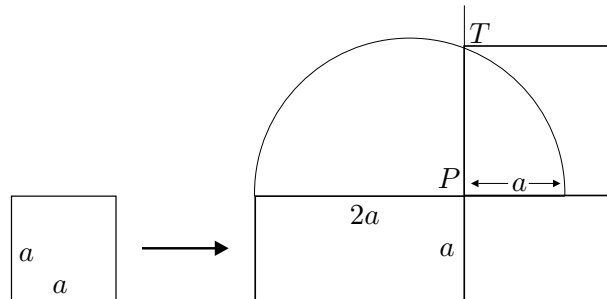
- 6) Intersecció T de la circumferència anterior amb la semirecta Mr .
- 7) Quadrat sobre MT .

La macro corresponent té com a objectes inicials el quadrat i la semirecta inicials, i l'objecte final és el quadrat sobre MT .

3.1.1.iii En la proposició II.14 Euclides dóna la versió, en llenguatge d'àrees, del problema de la construcció de la mitjana proporcional de dos segments. Vegeu la proposició en la secció 8.4.4. Allí construeix un quadrat d'igual àrea que un rectangle donat, i això és el que utilitzarem. Donat un quadrat Q de costat a construirem un quadrat que tingui la mateixa àrea $2Q$ que la d'un rectangle de costats a i $2a$.



Si observem el desenvolupament que fa Euclides, haurem de construir una semicircumferència de diàmetre la suma $3a$ dels costats del rectangle, una perpendicular que parteixi aquest diàmetre, per un punt P , en dos segments de longituds a i $2a$, i el costat del quadrat buscada vindrà determinat pel segment PT en què T és el punt d'intersecció d'aquesta perpendicular amb la semicircumferència.



La presentació amb el CABRI la trobareu en els fitxers Dceu214.FIG, Dceu2142.FIG i Dceeu214.MAC. La macro s'ha construït segons els passos següents:

- 1) Quadrat $ABCD$ de costat AB , amb la macro **Quadrat**.
- 2) Semirecta Mr .
- 3) Punt P simètric de A respecte de B .
- 4) Punt R simètric de B respecte de P .
- 5) Punt mitjà O de A i R .
- 6) Circumferència (O, OA) de centre O i radi OA .
- 7) Recta perpendicular s per P a OA .

- 8) Punt d'intersecció T de la circumferència (O, OA) amb s .
- 9) Segment PT .
- 10) Circumferència (M, PT) de centre M i radi PT .
- 11) Intersecció K de la semirecta Mr amb la circumferència (M, PT) .
- 12) Quadrat sobre MK amb la macro **Quadrat**.

La macro corresponent té com a objectes inicials el quadrat i la semirecta inicials, i l'objecte final és el quadrat sobre MK .

3.1.2 Si tracem totes les diagonals d'un octàgon regular queden determinats vuit triangles isòceles congruents entre sí i tals que l'angle desigual val $360^\circ/8 = 45^\circ$. El vèrtex d'aquest angle és el centre de la circumferència circumscrita a l'octàgon. Si aconseguim construir un d'aquests vuit triangles, la construcció de l'octàgon és immediata. Per tant, hem obtingut una primera reducció.

• **Primera reducció**

A partir del costat BC de l'octàgon, construir un triangle isòceles ABC amb l'angle desigual $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Considerem la circumferència circumscrita al triangle ABC i sigui O el seu centre. Llavors en ser tots els triangles determinats per O, A, B i C isòceles tenim

$$\widehat{OAB} = \widehat{ABO} = \widehat{OAC} = \widehat{ACO} = \frac{45^\circ}{2} = 22^\circ 30',$$

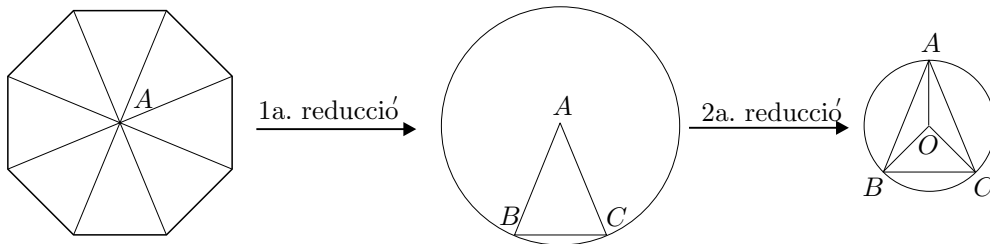
i per tant, $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} = 180^\circ - 2 \cdot 22^\circ 30' = 135^\circ$.

Consegüentment, $\widehat{BOC} = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ$.

Llavors, la construcció del triangle ABC serà immediata a partir de la del triangle BOC . Hem obtingut una segona reducció.

• **Segona reducció**

A partir del costat BC de l'octàgon, construir un triangle rectangle isòceles BOC d'hipotenusa BC .



Aquesta última construcció és immediata. Només cal considerar la circumferència de diàmetre BC i, llavors, el vèrtex O serà una intersecció de la medi-

atriu de BC amb la circumferència. A partir d'aquest punt ja podem presentar la construcció d'un octàgon regular donat un costat BC .

Trobareu una visualització pas a pas en el fitxer `Octagon.FIG`. La macro demanada la trobareu en el fitxer `Octagonr.MAC` que s'ha construït en el fitxer `Octagon2.FIG`. Hem seguit els passos següents:

- 1) Segment BC .
- 2) Mediatriu s de BC .
- 3) Circumferència (M, BC) de centre el punt mitjà M de BC i radi MB .
- 4) Punt d'intersecció O de la recta s i la circumferència (M, BC) .
- 5) Circumferència (O, OB) de centre O i radi OB .
- 6) Punt d'intersecció A de la recta s amb la circumferència (O, OB) .
- 7) Circumferència (A, AB) de centre A i radi AB . (Aquesta és la circumferència circumscrita a l'octàgon)
- 8) Costats de l'octàgon a partir del segment BC i la circumferència (A, AB) , a partir de les successives interseccions de les circumferències adequades de radi BC amb (A, AB) .

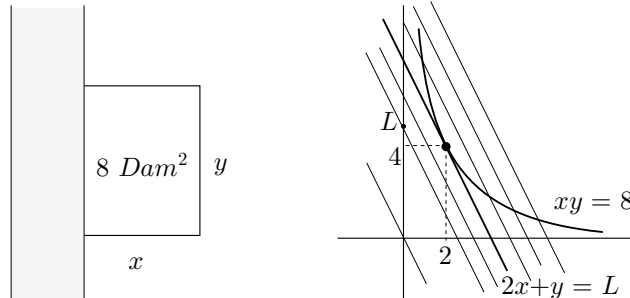
3.1.3.i Anomenem y el costat desigual de la tanca, x cadascun dels costats iguals, i L la longitud de la tanca.

• **Reducció algebraica**

Es tracta de trobar el mínim nombre L tal que,

$$L = 2x + y, \quad xy = 8, \quad x, y > 0.$$

Si tornem al llenguatge geomètric, observem que $\{2x + y = L, L \in \mathbb{R}\}$ és una família de rectes paral·leles, i $xy = 8$ és una hipèrbola equilàtera d'asímtotes els eixos de coordenades.



Notem en el gràfic que quan el valor de L creix, la recta corresponent talla l'eix OY en el punt $(0, L)$, el qual segueix una trajectòria ascendent. Interessa estudiar els valors de L per als nombres (x, y) tals que $xy = 8$, els quals venen

representats pels punts de la hipèrbola. Per a cadascun d'aquests punts el valor de L ve determinat pel punt de tall de la recta, —de la família considerada— que el conté i l'eix OY . És a dir, que els valors possibles de L són els determinats per les rectes que tenen algun punt en comú amb la hipèrbola. El mínim valor s'obté, com veiem en el gràfic, a partir de la recta de la família de paral·leles que és tangent a la hipèrbola. Hem obtingut la reducció geomètrica demanada.

• **Reducció geomètrica**

El problema de trobar el valor mínim de L es pot reduir al de la construcció de la recta tangent a la hipèrbola, paral·lela a una direcció donada, i determinació de la intersecció d'aquesta recta amb l'asíptota.

3.1.3.ii Que la recta buscada sigui tangent a la hipèrbola equival a dir que la intersecció d'aquestes dues figures sigui única. Així, podem reduir la qüestió al problema algebraic següent.

• **Reducció algebraica**

Recerca del punt (x, y) tal que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = L \\ xy = 8 \\ x, y > 0, \end{cases}$$

té solució única.

Eliminem la y i en resulta $x(L - 2x) = 8$ ha de tenir solució única, la qual cosa s'aconsegueix igualant a zero el discriminant de l'equació $2x^2 - Lx + 8 = 0$. Llavors,

$$L^2 - 64 = 0 \implies L = 8 \implies x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2 \implies x = 2, y = 4,$$

i no considerem el cas $L = -8$ perquè seria $y < 0$.

3.1.3.iii

$$\begin{cases} ax + by = L \\ xy = K \\ x, y, a, b, K > 0 \end{cases} \implies ax + b\frac{K}{x} = L \implies ax^2 - Lx + bK = 0.$$

Si imposem la condició de solució única obtenim,

$$L^2 - 4abK = 0 \implies L = 2\sqrt{abK} \implies x = \sqrt{\frac{bK}{a}} \implies y = \sqrt{\frac{aK}{b}}.$$

La funció que definim en el DERIVE, la trobareu en el fitxer `Optihip.MTH`, l'hem anomenat $HR(a, b, k)$ en què a, b són els coeficients de la funció lineal a optimitzar, i k el valor fixat del producte xy .

Per a la representació amb el CABRI vegeu el fitxer `Optihip.FIG`. En aquest fitxer s'han d'introduir les dades inicials a, b, k , i movent el punt de tall P amb l'eix OY , obtenim solucions aproximades del problema. L'interruptor M serveix per visualitzar la solució amb la màxima exactitud que proporciona el CABRI, a partir del traçat de la tangent amb tècniques que tractarem en el capítol 6, i que podeu revisar en el propi fitxer amb l'opció `Revisar construcció` del menú `Edició`.⁵ Per construir els valors x, y tal que el seu producte és 8 hem utilitzat la semblança de dos triangles construïts sobre les asímptotes de la hipèrbola, i tenint en compte la proporció $\frac{x}{8} = \frac{1}{y}$.

3.1.4 Donats $a, b \in \mathbb{R}$ i $K > 0$ es tracta de

$$\text{trobar } x, y > 0 \text{ tals que } x^2 + y^2 = K \text{ i } L = ax + by \text{ tingui valor màxim. (9.1)}$$

Fent una reducció com la de l'exercici anterior, resulta que es tracta de trobar una recta tangent a la circumferència de centre $(0, 0)$ i radi k , paral·lela a la direcció determinada per $ax + by = L$. En haver-n'hi dues cal agafar la que té el valor L més gran, és a dir la que té el valor positiu. Si fem la reducció algebraica d'aquesta última part caldrà cercar el valors de L tals que el sistema (9.1) tingui solució única, i triar-ne el valor positiu.

$$(9.1) \implies x^2 + \left(\frac{L - ax}{b}\right)^2 = K \implies (b^2 + a^2)x^2 - (2aL)x + (L^2 - b^2K) = 0.$$

$$\text{Solució única} \implies a^2L^2 - (b^2 + a^2)(L^2 - b^2K) = 0 \implies L^2 = (a^2 + b^2)K \implies$$

$$\implies x = \frac{aL}{a^2 + b^2} = a\sqrt{\frac{K}{a^2 + b^2}}, \quad y = \sqrt{K - \frac{a^2K}{a^2 + b^2}} = b\sqrt{\frac{K}{a^2 + b^2}}.$$

La funció que definirem en el DERIVE, la trobareu en el fitxer `Optihip.MTH`, l'hem anomenat $CR(a, b, k)$ en què a, b són els coeficients de la funció lineal a optimitzar, i k el valor fixat de la suma $x^2 + y^2$.

3.1.5 Si completem quadrats en el interior del radical obtenim,

$$v(t) = \sqrt{pt - t^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{p}{2}\right)^2}.$$

⁵El punt de contacte de la tangent paral·lela a una direcció, amb la hipèrbola, ve determinat pel diàmetre conjugat al diàmetre en aquesta direcció. Aquest diàmetre conjugat coincideix amb la recta que passa pels dos punts mitjans de dues cordes qualssevol, paral·leles a la direcció donada.

Llavors $v(t)$ es pot representar gràficament com a mitja circumferència de centre $(p/2, 0)$ i radi $p/2$. D'altra banda,

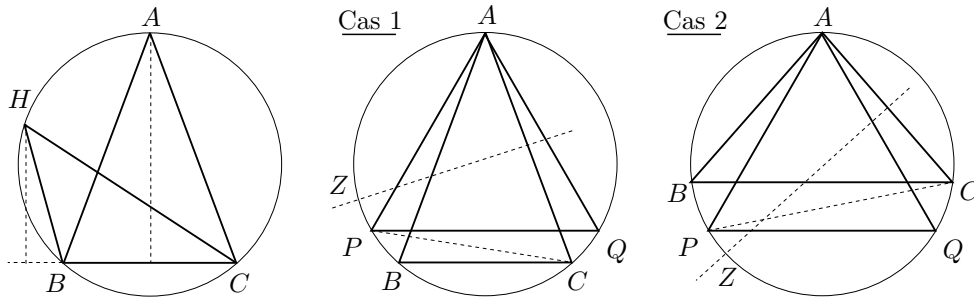
$$s(p) = s(0) + \int_0^p v(t) dt = 0 + \int_0^p v(t) dt = \int_0^p v(t) dt,$$

i aquesta integral és el valor de l'àrea “sota la corba” $v(t)$.

Consegüentment, el problema del càlcul de $s(p)$ ha quedat reduït al del càlcul de l'àrea d'un semicercle de radi $p/2$:

$$s(p) = \frac{\pi(p/2)^2}{2} = \frac{\pi p^2}{8}.$$

3.2.1 Seguirem els passos de KNORR [1986], 92–93 de l'edició 1993. Primerament observem que donat un triangle BCH inscrit en una circumferència, existeix un triangle isòsceles, inscrit en aquesta, d'àrea major o igual que la del triangle donat. Només cal considerar qualsevol dels triangles isòsceles construïts sobre els seus costats, per exemple el triangle ABC construït sobre el costat BC . Efectivament, tenen el costat BC igual i l'altura corresponent més gran en l'isòsceles, —vegeu la figura adjunta—. Llavors n'hi haurà prou amb demostrar que el triangle equilàter inscrit en una circumferència té l'àrea més gran o igual que qualsevol isòsceles inscrit en la circumferència.



• **Cas 1:** Sigui APQ el triangle equilàter inscrit. Considerem qualsevol triangle isòsceles ABC tal que el costat desigual BC és menor que el costat de l'equilàter. Llavors,

- $\text{àrea}(APC) > \text{àrea}(ABC)$, perquè en estar el punt bisector Z de l'arc AC sobre l'arc AP , i el punt B sobre l'arc PC , l'altura sobre el costat AC del triangle APC és major que la del ABC .
- $\text{àrea}(APQ) > \text{àrea}(APC)$, perquè el triangle d'àrea més gran que es pot inscriure en la circumferència sobre la corda AP , és el triangle isòsceles APQ , —el qual és, a més, equilàter—.

De les dues desigualtats deduïm que $\text{àrea}(APQ) > \text{àrea}(ABC)$.

• **Cas 2:** Sigui el mateix que en el cas 1, però BC major que PQ . Observem que el punt Z bisector de l'arc AC pertany a l'arc PC , i el punt B a l'arc AP . Amb un raonament semblant a l'anterior s'estableix que

$$\text{àrea}(APQ) > \text{àrea}(APC) > \text{àrea}(ABC).$$

3.2.2 Acceptem de manera intuïtiva que les àrees dels triangles isòsceles inscrits depenen contínuament del valor dels seus costats, la qual cosa implica que per a qualsevol valor entre 0 i l'àrea del triangle equilàter existeix un triangle isòsceles inscrit que té aquest valor com a àrea. Concretament, com que tots els triangles inscrits, tenen l'àrea menor o igual que l'equilàter, llavors sempre hi haurà un isòsceles inscrit amb la mateixa àrea que el triangle inscrit considerat.

3.2.3.i Vegeu el fitxer `Menohipo.MTH`.

3.2.3.ii Vegeu el fitxer `Menohipo.MTH`.

3.2.4 En ser el triangle buscat d'àrea S tenim

$$S = \frac{1}{2}x^2 \sin \beta. \quad (9.2)$$

Si observem els dos triangles de la figura, pel teorema del cosinus,

$$\begin{aligned} 2r^2 - 2r^2 \cos 2\beta &= MN^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos \beta \implies \\ \implies 2r^2 \cos^2 \beta - x^2 \cos \beta + x^2 - 2r^2 &= 0 \implies \\ \implies \cos \beta &= \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 - 8x^2r^2 + 16r^4}}{4r^2} = \frac{2x^2 - 4r^2}{4r^2} \end{aligned}$$

La solució $\cos \beta = 1 \implies \beta = 0$, i no serveix perquè no hi hauria triangle. Llavors, $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{x\sqrt{4r^2 - x^2}}{2r^2}$ i substituint a (9.2),

$$S = \frac{x^3 \sqrt{4r^2 - x^2}}{4r^2} \implies 16S^2 r^4 = x^6 (4r^2 - x^2) \implies x^8 - 4r^2 x^6 + 16S^2 r^4 = 0.$$

Si anomenem $p(x) = x^8 - 4r^2 x^6 + 16S^2 r^4$, perquè el problema tingui solució cal que el seu valor mínim —quan $x > 0$ — sigui negatiu o zero. Llavors $p(x)$ tindrà alguna arrel. El mínim es troba en un punt $x > 0$ tal que $p'(x) = 0$, és a dir $8x^7 - 24r^2 x^5 = 0$. O sigui que $8x^2 - 24r^2 = 0$, la qual cosa proporciona el valor $x = r\sqrt{3}$. Imposem $p(r\sqrt{3}) \leq 0$ i obtenim

$$81r^8 - 108r^8 + 16S^2 r^4 \leq 0 \implies S \leq \frac{\sqrt{27}r^2}{4} = \text{àrea}(\text{tr. equil. inscrit}).$$

3.2.5 Vegeu el fitxer *Trimeno1.FIG*.

3.2.6 Vegeu el fitxer *Trimeno3.FIG*.

3.3.1.i Suposem el pentàgon construït. Llavors $AB = BC$ i, per tant ABC isòsceles amb $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$. En ser $\widehat{ABC} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$ i $\widehat{ABC} + 2\widehat{BAC} = 180^\circ$, llavors

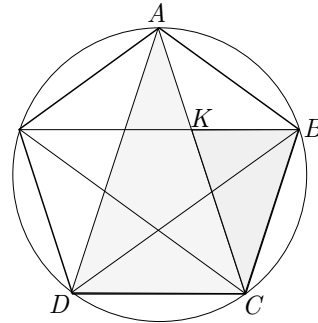
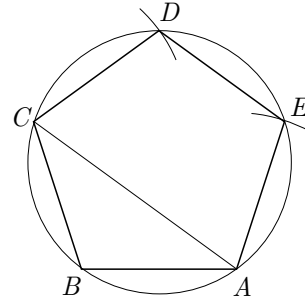
$$\widehat{BAC} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ = \frac{1}{3}\widehat{ABC}.$$

Si es pot construir el triangle, es podrà construir la circumferència circumscrita i els vèrtexs D i E . Només cal tallar-la amb els cercles (C, CB) i (A, AB) .

3.3.1.ii En el fitxer *Neupenta.FIG* podeu trobar la construcció seguint els passos indicats a la secció 3.3.

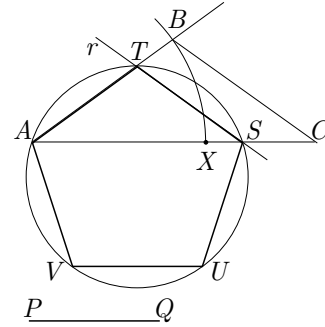
3.3.2.i Si considerem la circumferència circumscrita al pentàgon, es veu que les diagonals parteixen cada angle en els vèrtexs del pentàgon en tres parts iguals de 36° perquè subtendeixen el mateix arc de 72° . Això també es pot justificar sense recórrer a la circumferència; només cal observar el triangle ABC , els quatre triangles que li són congruents i els resultats del primer apartat. Llavors els triangles ACD i CKB són semblants i, en ser $CD = KC$ i $BK = AK$, tenim

$$\frac{BK}{CD} = \frac{KC}{AC} \implies \frac{AK}{KC} = \frac{KC}{AC}$$



3.3.2.ii Considerem el costat PQ conegut i un segment qualsevol AC . Construïm,

- 1) Sobre AC el punt X que el parteix en extrema i mitjana raó a la manera de la proposició II.11 dels *Elements*.
- 2) El triangle ABC tal que $AX = AB = BC$.
- 3) El punt T sobre la recta suport de AB , tal que $AT = PQ$, i per T tracem una paral·lela r a BC .
- 4) El punt S d'intersecció de r amb la recta suport de AC .

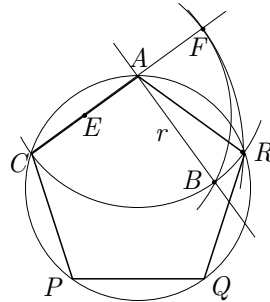
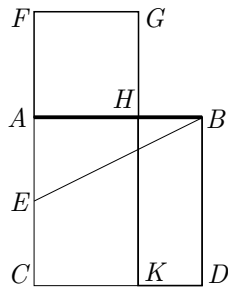


Tenim A , T i S vèrtexs del pentàgon. Amb la construcció de la circumferència circumscriu als tres punts, el traçat dels vèrtexs U i V que falten és immediata.

3.3.2.iii En ser $\text{àrea}(FH) = \text{àrea}(HD)$, llavors

$$\text{àrea}(FK) = \text{àrea}(FH) + \text{àrea}(AK) = \text{àrea}(HD) + \text{àrea}(AK) = \text{àrea}(AD).$$

Per tant, $FC \cdot FA = FC \cdot FG = \text{àrea}(FK) = \text{àrea}(AD) = AC^2$.



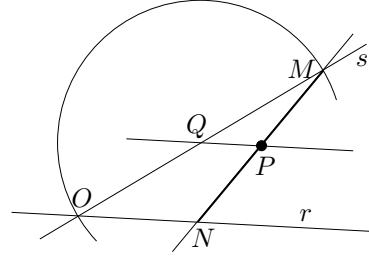
Sigui AC el costat donat del pentàgon, i F el punt tal que A divideix CF en extrema i mitjana raó. Llavors CF serà congruent amb la diagonal del pentàgon, i podem fer la construcció de:

- 1) El punt mitjà E de AC , la perpendicular r per A a AC , i el punt B d'intersecció de la circumferència (A, AC) amb r .
- 2) El punt F d'intersecció de la prolongació de AC amb la circumferència (E, EB) .
- 3) El punt R d'intersecció de les circumferències (C, CF) i (A, AC) . [De moment, tenim tres vèrtexs C , A i R del pentàgon.]
- 4) La circumferència pels tres vèrtexs obtinguts i els dos vèrtexs P i Q que falten, sobre la circumferència.

En els fitxer *Aurpenta.FIG* trobareu la visualització pas a pas. En els fitxers *Aurpenta2.FIG* i *Aurpenta.MAC* trobareu la macro corresponent en què l'objecte inicial és el segment AC , i l'objecte final el pentàgon regular $CARQP$ sobre aquest segment, en sentit horari.

3.3.3.i Suposem el problema resolt i sigui MN el segment solució. Tracem, per P , la paral·lela a r i considerem la seva intersecció Q amb la recta s . Llavors la semblança dels triangles MPQ i MNO i el fet de ser P el punt mitjà del segment MN impliquen

$$\frac{MQ}{MO} = \frac{MP}{MN} = \frac{1}{2}.$$

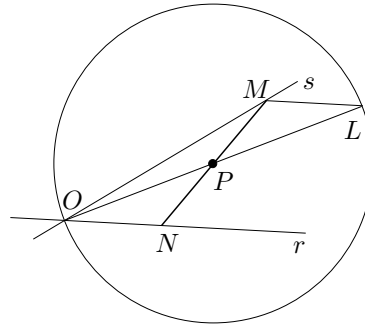


És a dir que Q és el punt mitjà de MO . Amb això hem acabat l'anàlisi perquè, en ser coneguts els punts O i Q podrem construir M i el segment MN . La solució vindrà donada per les construccions:

- 1) Punt d'intersecció Q de la recta paral·lela per P a r amb la recta s .
- 2) Punt M d'intersecció de la circumferència (Q, QO) amb la recta s .
- 3) Punt N d'intersecció de la recta suport de PM amb r , i el segment MN .

La construcció pas a pas es troba en el fitxer *Actitri1.FIG*. La macro corresponent la trobareu en els fitxers *Actitri12.FIG* i *Actitri1.MAC* en què els objectes inicials són dues rectes i el punt P , i l'objecte final és el segment MN demanat.

3.3.3.ii Suposem el problema resolt. Considerem la circumferència (P, PO) , i el seu diàmetre OL . En ser $PO = PL$, $PN = PM$ i $\widehat{OPN} = \widehat{LPM}$, els triangles OPN i LPM són congruents, —pel criteri costat-angle-costat—. Més concretament, $\widehat{ONP} = \widehat{LMP}$ i, per tant, ML paral·lel a r . Aquí acabem l'anàlisi perquè, en ser coneguts L i r podem trobar M i el segment MN .



La solució s'obté amb les construccions:

- 1) Punt L d'intersecció de la circumferència (P, PO) amb el diàmetre per O .
- 2) Punt M d'intersecció de la recta s , amb la recta paral·lela, per L , a r .
- 3) Punt N d'intersecció de la recta suport de PM amb r , i el segment MN .

La construcció pas a pas es troba en el fitxer *Actitri2.FIG*. La macro corresponent la trobareu en els fitxers *Actitri22.FIG* i *Actitri2.MAC* en què els objectes

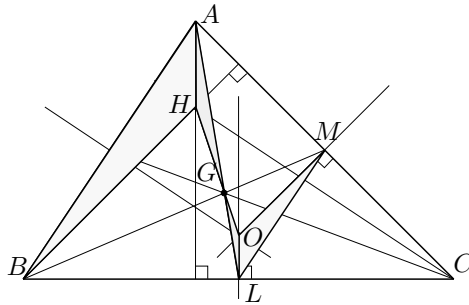
inicials i finals són els mateixos que a la primera construcció.

3.4.1.i Suposem G interior al segment OH i $HG = 2GO$. Llavors $\widehat{HGA} = \widehat{OGL}$ per ser oposats pel vèrtex, i $\widehat{AHG} = \widehat{GOL}$ per ser angles alterns interns determinats per la secant OH a les paral·leles AH i OL . Consegüentment els triangles AHG i LOG són semblants de raó 2, i es compleix,

$$\widehat{HAG} = \widehat{OLG}, \quad AG = 2GL \quad \text{i} \quad AH = 2OL.$$

L'anàlisi s'ha acabat, en ser tot això conegut perquè:

- (1) $\widehat{HAG} = \widehat{OLG}$, en ser angles alterns interns determinats per la secant AL a les paral·leles AH i OL .
- (2) $AG = 2GL$, per la propietat del baricentre sobre la mitjana.⁶
- (3) $AH = 2OL$, perquè els triangles MLO i BAH són semblants de raó 2. Efectivament, els angles són iguals en ser paral·lels els costats d'un amb els de l'altre; a més $AH/OL = AB/ML = AC/AM = 2$, en ser M punt mitjà de AC .



La síntesi s'inicia partint dels punts (1), (2) i (3), els quals impliquen que els triangles AGH i LGO són semblants de raó 2. Llavors, com que els punts L , G i A pertanyen a una mateixa recta, —una mitjana—, i $\widehat{OGL} = \widehat{HGA}$, es compleix que O , G i H estan alineats i $HG/GO = AG/GL = 2$. Finalment, el punt G és interior a OH perquè quan el triangle ABC no és equilàter podem considerar que hem triat una mitjana AL “interior” a la regió determinada per una mediatriu, suport de OL , i una altura, suport de AH , paral·leles.⁷

3.4.1.ii Vegeu els fitxer `Reuler.FIG`, per a la construcció pas a pas. La macro corresponent la trobareu en els fitxers `Reuler2.FIG` i `Reuler.MAC` en què l'objecte inicial és un triangle.

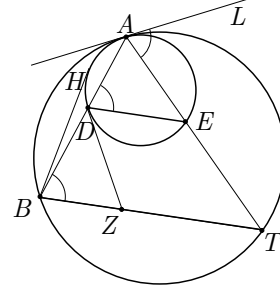
⁶Aquesta propietat la trobem a la proposició VIII.2 de la *Col·lecció* de Pappos a EECKE [1933], edició de 1982, 818–821.

⁷Per a un tractament vectorial del problema vegeu ALEJANDRE–NOLLA [1984].

3.5.1.i El punt clau està en considerar que les dues circumferències són tangents i, per tant, en el punt de contacte A tenen una tangent comuna AL . Llavors,

$\widehat{LAE} = \widehat{ADE}$ perquè subtendeixen el mateix arc AE en el cercle ADE .

$\widehat{LAT} = \widehat{ABT}$ perquè subtendeixen el mateix arc AT en el cercle ABT .



Per tant, $\widehat{ADE} = \widehat{ABT}$, la qual cosa implica el paral·lelisme de DE i BT .

3.5.1.ii Recordem que tractem les justificacions amb més profunditat en el capítol 2, en l'estudi del llibre III dels *Elements* d'Euclides. Utilitzem el gràfic de l'apartat anterior.

$\widehat{TZD} + \widehat{DAT} = 180^\circ$ perquè T, Z, D i A són quatre punts que pertanyen al cercle ADT —concíclics—. Això implica que la suma dels arcs subtendits per qualsevol parella d'angles interiors i oposats del quadrilàter que determinen, és tota la circumferència. Per tant, la suma dels dos angles és la meitat de la circumferència.

ZD és tangent al cercle ADE perquè $\widehat{ZDE} = \widehat{DAT}$ i, per tant, subtendeixen el mateix arc DE en la circumferència ADE . Conseqüentment ZD només pot tenir un punt de contacte amb la circumferència ADE .

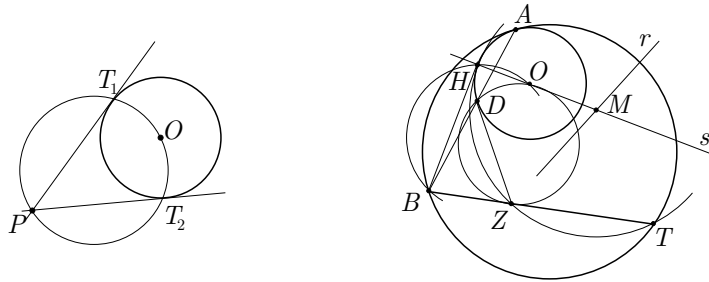
$BZ \cdot BT = BD \cdot BA = BH^2$. La primera igualtat és certa perquè els quatre punts implicats són concíclics i B, Z i T per un cantó, i B, D i A per l'altre estan alineats. La segona ho és perquè B, D i A estan alineats i BH és tangent a la circumferència AHD .

3.5.1.iii Sigui H el punt de tangència de la circumferència ADE donada amb la seva tangent pel punt B . Sigui el punt Z que pertany al segment BT tal que $BZ \cdot BT = BH^2$. Sigui D el punt de tangència de la circumferència donada amb la seva tangent pel punt Z . Llavors, el punt A de tangència dels dos cercles és la intersecció de la prolongació de BD amb el cercle donat, i el cercle buscat és el que passa per A, B i T . Efectivament,

- (1) ZD tangent al cercle $ADE \implies \widehat{ZDE} = \widehat{DAE}$.
- (2) $BZ \cdot BT = BH^2 \implies BZ \cdot BT = BD \cdot BA \implies A, D, Z, T$ concíclics $\implies \widehat{DAT} + \widehat{TZD} = 180^\circ \implies \widehat{BZD} = \widehat{DAT}$.
- (1) i (2) $\implies \widehat{BZD} = \widehat{ZDE} \implies BT$ i DE paral·lels $\implies \widehat{ADE} = \widehat{ABT}$.

Aquesta última igualtat implica que les tangents per A a les circumferències ADE i ABT han de formar el mateix angle amb la recta AE ; per tant, han de ser coincidents, i ABT és la circumferència buscada.

3.5.1.iv Com a pas previ cal esmentar que per trobar el punt de tangència d'una circumferència, de centre O , amb les rectes tangents traçada per un punt exterior P , n'hi ha prou amb el traçat de la circumferència de diàmetre OP . Els punts d'intersecció T_1 i T_2 de les dues circumferències són els punts cercats.



Construcció de Z : $BZ \cdot BT = BD \cdot BA = BH^2 \implies Z$ és un punt del segment BT que pertany a la circumferència que passa per T i és tangent, per H , a BH ; per tant els passos seran:

- 1) Punt H d'intersecció entre la circumferència de diàmetre BO , —en què O és el centre de la circumferència donada—, i la circumferència donada.
- 2) Mediatriu r de HT , perpendicular s a BH , pel punt H , i punt M d'intersecció entre r i s .
- 3) Punt Z d'intersecció entre BT , o la seva prolongació, i la circumferència (M, MH) .

Construcció de D :

- 4) Punt D d'intersecció de la circumferència donada i la de diàmetre ZO . (Hi han dues possibilitats, la qual cosa originarà dues circumferències com a solució final del problema.)

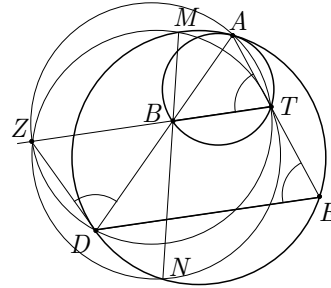
Construcció de la circumferència:

- 5) Punt A , d'intersecció entre la prolongació de BD i la circumferència donada.
- 6) Circumferència ABT .

El fitxer `Tanppc1.FIG` mostra la construcció, pas a pas, d'una de les dues circumferències, amb independència que el punt Z sigui interior o exterior a

BT . El fitxer `Tanppc2.FIG` mostra les dues circumferències solució. El fitxer `Citanppc.MAC` proporciona la macro que té com a objectes inicials dos punts i una circumferència, i com a objectes finals les dues circumferències tangents.

3.5.2 Anàlisi: Suposem el cercle ABT construït. Si tracem des del punt de tangència A les rectes suport de AB i AT , obtenim les seves interseccions D i E sobre el cercle donat. Llavors $\widehat{ATB} = \widehat{AED}$. Considerem la circumferència ATD , la qual talla a la recta suport de BT en Z . Es compleix $BZ \cdot BT = BD \cdot BA$; a més, $\widehat{ZDA} = \widehat{ZTA} = \widehat{DEA}$ implica que ZD és tangent a la circumferència ADE .



L'anàlisi s'ha acabat perquè el punt Z es pot construir a partir d'una corda MN per B de la circumferència donada. Conseqüentment, el punt D , el punt A i la circumferència també es poden construir.

La **síntesi** conduirà a la construcció de qualsevol corda MN , per B , del cercle ADE ; aquesta permetrà la construcció de Z tal que $ZB \cdot ZT = BM \cdot BN$. Del punt Z obtindrem el punt D de tangència de la circumferència amb la seva tangent per Z i, tot seguit, el punt A d'intersecció de la recta suport de BD amb la circumferència donada. La circumferència buscada és la ABT . (En poder-se traçar dues tangents per Z a BD , existiran dues circumferències solució.) Efectivament,

- (1) ZD tangent al cercle donat $\implies \widehat{ZDA} = \widehat{DEA}$.
- (2) $BD \cdot BA = BM \cdot BN = ZB \cdot ZT \implies A, D, Z, T$ concíclics \implies
 $\implies \widehat{ZDA} + \widehat{ZTA}$ subtendeixen el mateix arc AZ .
- (1) i (2) $\implies \widehat{DEA} = \widehat{ZTA}$.

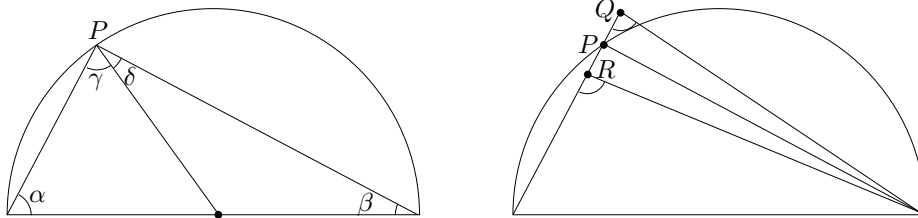
Aquesta última igualtat implica que les tangents per A a les circumferències ADE i ABT han de formar el mateix angle amb la recta AD i, per tant, han de ser coincidents i ABT és la circumferència buscada.

Passos de la **construcció**:

- 1) Corda qualsevol MN , per B de la circumferència donada.
- 2) Punt Z d'intersecció de la circumferència MTN amb la recta suport de BT .
- 3) Punt D de tangència, de la circumferència donada amb la seva tangent per Z .
- 4) Punt A d'intersecció de la prolongació de DB amb la circumferència donada, i construcció final de la circumferència ABT .

El fitxer `Tanppc3.FIG` mostra les dues circumferències solució. El fitxer `Cita-ppic.MAC` proporciona la macro que té com a objectes inicials una circumferència i dos punts interiors, i com a objectes finals les dues circumferències tangents.

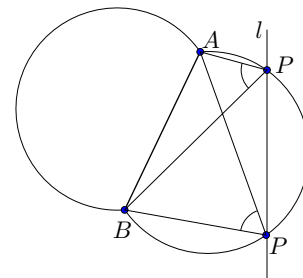
3.6.1.i Per trobar un punt amb la propietat demanada, tracem una recta qualsevol per B i fem la seva perpendicular per A . Si observem diverses posicions del punt P en què es tallen aquestes rectes, —el programa CABRI és molt adequat mitjançant l'eina `lloc geomètric`—, és natural de conjecturar que estan situats sobre un cercle de diàmetre AB . Aquesta conjectura és fàcil d'establir amb l'estudi, en primer lloc, dels angles inscrits en un cercle que subtendeixen un diàmetre i, en segon lloc, dels angles no inscrits que subtendeixen el mateix diàmetre.



Efectivament, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ i $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ implica que $\gamma + \delta = 90^\circ$. A més es compleix $\widehat{Q} < \widehat{P} = 90^\circ < \widehat{R}$, perquè qualsevol angle exterior d'un triangle és major que qualsevol dels dos interiors no adjacents.

3.6.1.ii La construcció de la solució s'obté com a intersecció de la circumferència de diàmetre AB i la recta “meridià” l donada, —fixeu-vos que hi pot haver un màxim de dues solucions—. El diorismós o condició per a l'existència de solució és que la circumferència i la recta l es tallin o, en llenguatge de distàncies, que la distància del punt mitjà M de AB a la recta l sigui més petita que la meitat de AB .

3.6.1.iii De l'anàlisi feta a la secció 2.6.3, sabem que el lloc geomètric dels punts P des dels quals es veu el segment AB sota un angle de 60° està format per dos arcs de cercle d'extremes A i B , i d'obertura 240° . L'estratègia de la construcció d'aquest lloc passa per la construcció d'un dels seus punts P , i pel traçat de l'arc de cercle APB i del seu simètric respecte de AB .

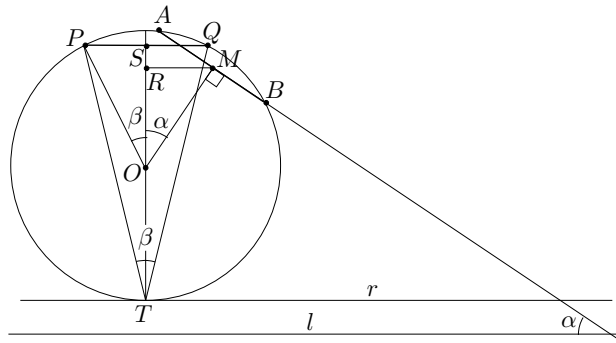


Per construir el punt P , n'hi ha prou amb construir un triangle equilàter APB sobre AB . La solució final del problema vindrà donada per la intersecció d'aquests dos arcs amb la recta l , —fixeu-vos que hi pot haver un màxim de quatre solucions—.

3.6.2 Sigui $AB = a$ i l'angle de visió de 60° . Sigui r la tangent a la cir-

cumferència paral·lela a l i més allunyada del punt M . Tracem la corda PQ de longitud a i punt mitjà S , paral·lela a r i a distància màxima d'aquesta. Sigui T el punt de tangència amb r , i R la projecció del punt M sobre el diàmetre per T . Llavors, —considerem el gràfic per a $\beta = 60^\circ$ —,

$$\begin{aligned} d(M, l) &\leq TR = PO + OR = \frac{PS}{\sin 60^\circ} + OM \cos \alpha = \frac{PS}{\sin 60^\circ} + OS \cos \alpha = \\ &= \frac{PS}{\sin 60^\circ} + \frac{PS}{\tan 60^\circ} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2\sqrt{3}} \cos \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6} (2 + \cos \alpha). \end{aligned}$$

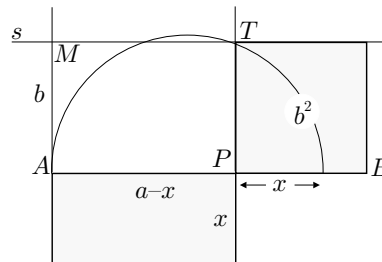


3.6.3 Treballem amb la mateixa notació que abans i el gràfic adjunt,

$$\begin{aligned} d(M, l) &\leq TR = PO + OR = \frac{PS}{\sin \beta} + OM \cos \alpha = \frac{PS}{\sin \beta} + OS \cos \alpha = \\ &= \frac{PS}{\sin \beta} + \frac{PS}{\tan \beta} \cos \alpha = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\sin \beta} + \frac{\cos \alpha}{\tan \beta} \right) = \frac{a}{2} \left(\frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \beta} \right). \end{aligned}$$

Vegeu els fitxers elaborats amb els programes CABRI i DERIVE, *Vaixell.FIG* i *Vaixell.MTH*, respectivament.

3.6.4.i Suposem el rectangle construït. La suma dels seus dos costats serà un segment de longitud a igual a la meitat del perímetre. Sigui P el punt de partició del segment a , que determina la longitud dels dos costats del rectangle. Sigui una semicircumferència de diàmetre a .



Llavors, per II.14, el segment determinat per P i la intersecció T de la perpendicular, per P , al diàmetre a , amb la semicircumferència, és el costat b del quadrat donat. En ser conegut, hem acabat l'anàlisi, el qual dona pas a la construcció de P seguint els passos:

- 1) Semicircumferència de diàmetre $AB = a$.
- 2) Segment AM , de longitud b , perpendicular al diàmetre per l'extrem A . (Traçat en el mateix semiplà, determinat pel diàmetre, que la semicircumferència.)
- 3) Recta paral·lela s al diàmetre, per M .
- 4) Punt T d'intersecció de la circumferència amb s .
- 5) Punt P d'intersecció del diàmetre amb la perpendicular, per T , al diàmetre. Els costats del rectangle són AP i PB

3.6.4.ii La condició d'existència de la solució és que la paral·lela s al diàmetre, es talli amb la semicircumferència. És a dir,

$$b \leq \text{radi} = \frac{a}{2}.$$

3.6.4.iii Si reduïm el problema al llenguatge de l'àlgebra, obtenim

$$\left. \begin{array}{l} x + y = a \\ xy = b^2 \end{array} \right\} \implies x(a - x) = b^2 \implies x^2 - ax + b^2 = 0.$$

S'observa que amb la construcció geomètrica del primer apartat, hem obtingut un mètode de construcció de les solucions del tipus d'equació de segon grau obtingut.

3.6.4.iv Vegeu el fitxer `Rectang.FIG` en què hem utilitzat les notacions de la construcció feta més amunt.

9.4 Activitats del capítol 4

4.1.1.i Designem els dits d'una mà M_1 com les unitats de primer ordre, i els de l'altra mà M_2 com les de segon ordre. Llavors, aixecaríem 3 dits de M_1 i 4 dits de M_2 . Això s'explica en notació decimal posant $23 = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1$. És a dir 23 consta de 4 unitats de segon ordre, i 3 de primer ordre.

4.1.1.ii En ser $218 = 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 3$, utilitzaríem les 4 mans M_1, M_2, M_3 i M_4 de dues persones. Els subíndexs designen els ordres creixents de les unitats. Llavors, aixecaríem 3 dits de M_1 , 3 dits de M_2 , 3 dits de M_3 i 1 dit de M_4 .

4.1.2 La primera vegada que assenyalaria una unitat una sisena persona, seria per representar $1 \cdot 12^5$. Per tant, 5 persones poden comptar fins a $12^5 - 1 = 248831$ unitats.

4.1.3.i En representar el primer cordill les unitats, el segon les desenes, etc., el nombre representat és:

$$3 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4 = 24073.$$

4.1.3.ii Si la base és 8:

$$3 + 7 \cdot 8 + 0 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^4 = 10299.$$

Si la base és 6 la representació es podria considerar no del tot correcta, però es podria interpretar

$$3 + 7 \cdot 6 + 0 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^4 = 3501.$$

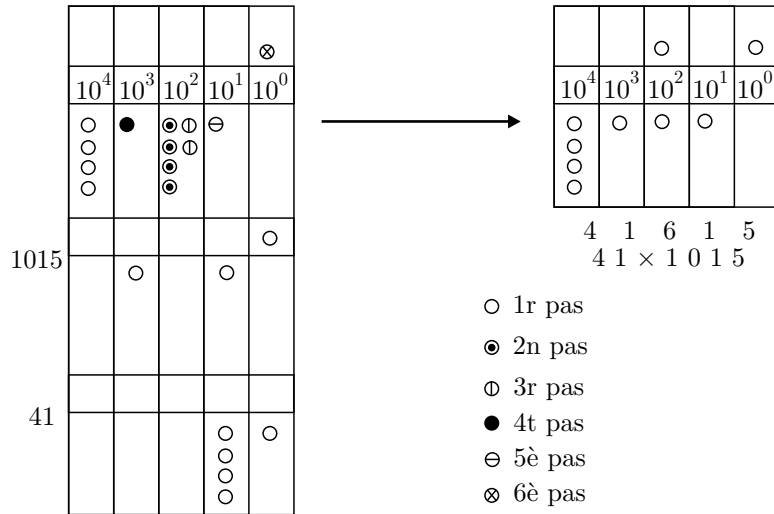
Seria més correcta, per respectar el principi de la base, la representació

$$\langle 3, 1, 1, 4, 2 \rangle = 3 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^4.$$

4.1.3.iii Es tracta de designar el nombre de base amb una lletra, per exemple b , i observar les notacions dels apartats anteriors:

$$3 + 7 \cdot b + 0 \cdot b^2 + 4 \cdot b^3 + 2 \cdot b^4.$$

4.1.4

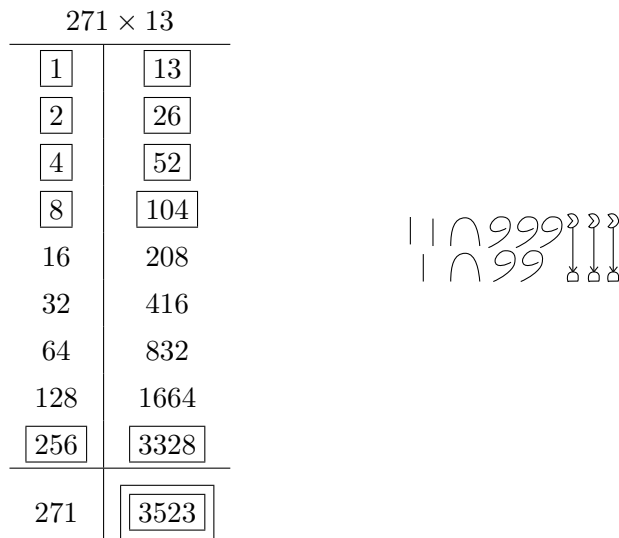


XLI \longleftrightarrow 41

MXV \longleftrightarrow 1015

XLIDCXV \longleftrightarrow 41615.

4.1.5



4.1.6.i

$$\left. \begin{array}{l} n_1 \text{ mínim} \\ \frac{41}{42} \geq \frac{1}{n_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n_1 \text{ mínim} \\ n_1 \geq \frac{42}{41} \end{array} \right\} \Rightarrow n_1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{41}{42} = \frac{1}{2} + \left(\frac{41}{42} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{10}{21}.$$

$$\left. \begin{array}{l} n_2 \text{ mínim} \\ \frac{10}{21} \geq \frac{1}{n_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n_2 \text{ mínim} \\ n_2 \geq \frac{21}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow n_2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{41}{42} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{10}{21} - \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}}.$$

En el segon cas, primerament, $\frac{51}{19} = 2 + \frac{51}{19} - 2 = 2 + \frac{13}{19}$. Llavors,

$$\left. \begin{array}{l} n_1 \text{ mínim} \\ \frac{13}{19} \geq \frac{1}{n_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n_1 \text{ mínim} \\ n_1 \geq \frac{19}{13} \end{array} \right\} \Rightarrow n_1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{51}{19} = 2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{13}{19} - \frac{1}{2} \right) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{7}{38}.$$

$$\left. \begin{array}{l} n_2 \text{ mínim} \\ \frac{7}{38} \geq \frac{1}{n_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n_2 \text{ mínim} \\ n_2 \geq \frac{38}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow n_2 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{51}{19} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \left(\frac{7}{38} - \frac{1}{6} \right) = \boxed{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{57}}.$$

4.1.6.ii Vegeu el fitxer Fracegip.MTH.

4.1.7 Fem les successives divisions indicades, utilitzant el divisor 2 en substitució del 60:

$$\begin{array}{r} 81 \quad | \quad 2 \\ 1 \quad 40 \quad | \quad 2 \\ \quad 0 \quad 20 \quad | \quad 2 \\ \quad \quad 0 \quad 10 \quad | \quad 2 \\ \quad \quad \quad 0 \quad 5 \quad | \quad 2 \\ \quad \quad \quad \quad 1 \quad 2 \quad | \quad 2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 0 \quad 1 < 2 \end{array}$$

D'aquí s'obté,

$$81_{(10)} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 1010001_{(2)}.$$

4.1.8

1	25	17	425
2	50	18	450
3	75	19	475
4	100	20	500
5	125	30	750
6	150	40	1000
7	175	50	1250
8	200		
9	225		
10	250		
11	275		
12	300		
13	325		
14	350		
15	375		
16	400		

4.1.9 Si actuem de la manera demanada tenim,

$$\begin{array}{r}
 4\ 1\ 3\ 2 \\
 \times 2\ 3 \\
 \hline
 1\ 1 \longleftrightarrow 3 \times 2 \\
 1\ 4 \longleftrightarrow 3 \times 3 \\
 3 \longleftrightarrow 3 \times 1 \\
 2\ 2 \longleftrightarrow 3 \times 4 \\
 4 \longleftrightarrow 2 \times 2 \\
 1\ 1 \longleftrightarrow 2 \times 3 \\
 2 \longleftrightarrow 2 \times 1 \\
 + 1\ 3 \longleftrightarrow 2 \times 4 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 0\ 4\ 1 \\
 + 1\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 2\ 1\ 1\ 1\ 4\ 1
 \end{array}$$

És a dir que,

$$4132_{(5)} \times 23_{(5)} = 211141_{(5)}$$

4.1.10

2	0; 30
3	0; 20
4	0; 15
5	0; 12
6	0; 10
8	0; 7, 30
9	0; 6, 40
10	0; 6
12	0; 5
15	0; 4

16	0; 3, 45
18	0; 3, 20
20	0; 3
24	0; 2, 30
25	0; 2, 24
27	0; 2, 13, 20
30	0; 2
32	0; 1, 52, 30
36	0; 1, 40
40	0; 1, 30

45	0; 1, 20
48	0; 1, 15
50	0; 1, 12
54	0; 1, 6, 40
1, 0	0; 1
1, 4	0; 0, 56, 15
1, 12	0; 0, 50
1, 15	0; 0, 48
1, 20	0; 0, 45
1, 21	0; 0, 44, 26, 40

4.1.11.i

$$\frac{1}{160} = \frac{1}{2^5 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 5^2}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = \frac{1350}{60^3}.$$

Expressarem 1350 en base 60,

$$\begin{array}{r|l} 1350 & 60 \\ \hline 150 & 22 < 60 \\ \hline 30 & \end{array}$$

$$1350 = 22 \cdot 60 + 30 \text{ implica que}$$

$$\frac{1}{160} = \frac{1350}{60^3} = \frac{22}{60^2} + \frac{30}{60^3} = 0; 0, 22, 30.$$

Llavors, en ser $187 = 3, 7_{(60)}$ tenim que,

$$\frac{187}{160} = 0; 0, 22, 30_{(60)} \times 3, 7_{(60)} :$$

$$\begin{array}{r} 0 ; 0 , 22 , 30 \\ \times 3 , 7 \\ \hline 3 , 30 \\ 14 \\ 2 , 20 \\ 1 , 30 \\ 6 \\ + 1 ; 0 \\ \hline 1 ; 9 , 7 , 30 \\ + 1 \\ \hline 1 ; 10 , 7 , 30 \end{array}$$

4.1.11.ii Si observem la taula d'inversos de la pàgina 170, tenim que:

$$\frac{1}{80} = 0; 0, 45 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2} = 0; 30.$$

Llavors, caldrà cercar $3, 7 \times 0; 0, 45 \times 0; 30$,

$$\begin{array}{r} 0 \quad ; \quad 0 \quad , \quad 45 \\ \times \quad 0 \quad ; \quad 30 \\ \hline 2 \quad , \quad 30 \\ + \quad 0 \quad ; \quad 0 \quad , \quad 20 \\ \hline 0 \quad ; \quad 0 \quad , \quad 22 \quad , \quad 30 \end{array}$$

El producte que falta és el mateix que hem fet a l'apartat anterior.

4.1.11.iii



4.1.12 Es tracta d'aproximar per defecte, el valor d' $1/7$ fins el tercer ordre de fraccions sexagesimals. Hem de trobar la màxima expressió

$$\frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \frac{a_3}{60^3} \quad \text{menor que} \quad \frac{1}{7}.$$

És a dir, s'ha de complir

$$\left[\frac{60^3}{7} \right] = a_1 60^2 + a_2 60 + a_3.$$

Cal obtenir $\left[\frac{60^3}{7} \right] = 30857$ en base 60:

$$\begin{array}{r} 3 \ 0 \ 8 \ 5 \ 7 \quad \left| \begin{array}{l} 6 \ 0 \\ 5 \ 1 \ 4 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad 8 \ 5 \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} 6 \ 0 \\ 3 \ 4 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad 2 \ 5 \ 7 \quad \quad \quad 8 \quad < \ 6 \ 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \ 7 \end{array}$$

O sigui que, $\frac{1}{7} \approx \frac{8 \cdot 60^2 + 34 \cdot 60 + 17}{60^3} = 0; 8, 34, 17.$

4.1.13.i Primer veurem que,

$$n \text{ regular en base } 60 \implies n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma, \quad \text{en què } \alpha, \beta, \gamma \geq 0.$$

Efectivament, si $1/n$ té desenvolupament finit, llavors existeixen $a_1, a_2, \dots, a_p \in \{1, 2, \dots, 59\}$ tals que

$$\frac{1}{n} = \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \dots + \frac{a_p}{60^p}.$$

Per tant, $60^p = n \cdot (a_1 60^{p-1} + a_2 60^{p-2} + \dots + a_p)$ i, consegüentment els factors primers de n ho han de ser de 60. En ser $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, llavors $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$.

Passem al recíproc. Tenim $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, i hem de trobar un nombre $A \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma} = \frac{A}{60^p}.$$

Si ho aconseguim, podem desenvolupar A en base 60 i, en ser $n > 1$, tindrem,⁸

$$A = a_1 60^{p-1} + a_2 60^{p-2} + \dots + a_p \quad \text{en què } a_i \in \{1, 2, \dots, 59\}.$$

Per trobar A , només cal observar que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma} = \frac{2^{2p-\alpha} \cdot 3^{p-\beta} \cdot 5^{p-\gamma}}{2^{2p} \cdot 3^p \cdot 5^p} = \frac{2^{2p-\alpha} \cdot 3^{p-\beta} \cdot 5^{p-\gamma}}{60^p}.$$

Per tant hem obtingut el que volíem demostrar,

$$\frac{1}{n} = \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \dots + \frac{a_p}{60^p}.$$

D'aquí també surt el procediment pràctic per trobar els inversos. Està clar que l'exponent p ha de complir $2p \geq \alpha$, $p \geq \beta$ i $p \geq \gamma$. Agafarem el mínim que compleix això i tindrem el nombre A desitjat. Es pot observar que això és el que hem fet a la pàgina 171, quan hem calculat l'invers de 81, en què hem triat $p = 4$.

4.1.13.ii El teorema equivalent en base 10 seria $1/n$, $n > 1$ té desenvolupament fraccionari decimal finit, equival a que $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta$, en què $\alpha, \beta \geq 0$.

4.1.13.iii El teorema equivalent en base $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, en què p_i són primers, seria

$1/n$, —amb $n > 1$ —, té desenvolupament fraccionari finit en base b ,
equival a que $n = p_1^{\omega_1} p_2^{\omega_2} \dots p_k^{\omega_k}$, en què $\omega_i \geq 0$.

4.1.13.iv L'invers de 7 té desenvolupament finit en base 14, en ser $14 = 2 \cdot 7$ i $7 = 2^0 \cdot 7$.

⁸Sempre es pot desenvolupar finitament un nombre natural A en qualsevol base $b \in \mathbb{N}$, pel procediment de dividir A entre b , el quocient resultant entre b , i així successivament, fins arribar a un quocient menor que b .

4.1.13.v En ser $2 = 2^1$, $3 = 3^1$ i $4 = 2^2$, la base ha de tenir entre els seus factors primers, el 2 i el 3. Per tant, la base mínima és $b = 2 \cdot 3 = 6$.

Per al $44 = 2^2 \cdot 11$, la base mínima serà $b = 2 \cdot 11 = 22$

4.1.14 Vegeu el fitxer `Sistnum.MTH`.

4.2.1.i Els terns esmentats eren del tipus,

$$\frac{m^2 - 1}{2}, m, \frac{m^2 + 1}{2}, \quad \text{amb } m = 2n + 1.$$

Si els expressem en funció de n tindrem.

$$2n^2 + 2n, 2n + 1, 2n^2 + 2n + 2.$$

Només cal veure que $2n^2 + 2n$ i $2n + 1$ són primers entre si. Suposem que no ho fossin. En ser $2n^2 + 2n = n(2n + 1) + n$, tampoc ho serien $2n + 1$ i n . Llavors, existiria un divisor $d > 1$ que dividiria aquest dos nombres. Per tant, també dividiria la seva diferència $2n + 1 - n = 1$, la qual cosa no pot ser.

4.2.1.ii Tractem amb els terns $m^2 - 1$, $2m$, $m^2 + 1$. Per provar l'afirmació, només cal considerar $m = 2$ i $m = 3$. En resulten els terns

m	Tern	Tipus
2	3, 4, 5	primitiu
3	8, 6, 10	no primitiu

4.2.1.iii Tenim el tern $n, t, n+p$, en què $n+p > t$, i p primer i senar. Llavors,

$$(n+p)^2 = t^2 + n^2 \implies 2p \cdot n + p^2 = t^2 \implies p \cdot (2n+p) = t^2.$$

En ser p primer, $2n+p = p \cdot s^2$, en què s és enter. Per tant,

$$n = \frac{p \cdot (s^2 - 1)}{2}.$$

En ser p senar, es manté com a factor de n que no es pot simplificar. Llavors, per tal que n sigui enter, s haurà de ser senar. Finalment, el terns estudiats es poden expressar,

$$n = \frac{p \cdot (s^2 - 1)}{2}, t = p \cdot s, \frac{p \cdot (s^2 + 1)}{2}, \quad \text{en què } s \text{ és senar.}$$

Aquests no són primitius perquè són divisibles per $p > 1$. A més, tots s'obtenen de considerar els terns atribuïts a Pitàgores i multiplicar-los per p . Tot això

justifica l'afirmació de l'enunciat. Observem-ne uns exemples, per a $p = 3$:

s	n	t	$n + p$	n/p	t/p	$(n + p)/p$
3	12	9	15	4	3	5
5	36	15	39	12	5	13
7	72	21	75	24	7	25
9	120	27	123	40	9	41

4.2.2.i En la proposició II.8 de l'*Aritmètica* Diofant:

- Considera x^2 i $y^2 = 16 - x^2$.
- Forma $y^2 = (2x - 4)^2 = 4x^2 + 16 - 16x$.
- Iguala y^2 en les dues expressions anteriors:

$$16 - x^2 = 4x^2 + 16 - 16x.$$

- Suma els termes negatius:

$$16 - x^2 + x^2 + 16x = 4x^2 + 16 - 16x + x^2 + 16x \implies 16 + 16x = 5x^2 + 16.$$

- Resta els termes semblants i resulta,

$$16 + 16x - 16 = 5x^2 + 16 - 16 \implies 16x = 5x^2 \implies x = \frac{16}{5}.$$

- Els quadrats finals són,

$$x^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25}, \quad y^2 = 16 - \frac{256}{25} = \frac{144}{25}.$$

- I la suma és,

$$x^2 + y^2 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25} = \frac{400}{25} = 16.$$

Quant al tern primitiu relacionat, multiplicarem la solució per un factor λ convenient, de manera que la converteixi en entera i elimini els factors comuns:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{16}{5}\lambda, \quad y = \sqrt{\frac{144}{25}}\lambda = \frac{12}{5}\lambda, \quad z = \sqrt{16}\lambda = 4\lambda \\ \lambda = \frac{5}{4} \end{array} \right\} \implies x = 4, y = 3, z = 5.$$

4.2.2.ii

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 16 - x^2 \\ y^2 = (5x - 4)^2 \end{array} \right\} \implies 16 - x^2 = 25x^2 + 16 - 40x \implies$$

$$\implies 26x^2 = 40x \implies x = \frac{20}{13} \implies$$

$$\implies y^2 = 16 - \left(\frac{20}{13}\right)^2 = \frac{2304}{169} = \left(\frac{48}{13}\right)^2 \implies y = \frac{48}{13}.$$

El tern pitagòric primitiu relacionat és:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{20}{13}\lambda, \quad y = \frac{48}{13}\lambda, \quad z = 4\lambda \\ \lambda = \frac{13}{4} \end{array} \right\} \implies x = 5, \quad y = 12, \quad z = 13.$$

4.2.2.iii

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = z^2 - x^2 \\ y^2 = \left(\frac{m}{n}x - z\right)^2 \end{array} \right\} \implies z^2 - x^2 = \frac{m^2}{n^2}x^2 + z^2 - 2\frac{m}{n}xz \implies$$

$$\implies \left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right)x^2 = 2\frac{m}{n}xz \implies x = \frac{2mn}{m^2 + n^2}z \implies$$

$$\implies y^2 = z^2 - \frac{4m^2n^2}{(m^2 + n^2)^2}z^2 = \frac{(m^2 - n^2)^2}{(m^2 + n^2)^2}z^2$$

$$\implies y = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}z.$$

És a dir, que hem trobat els terns,

$$\frac{2mn}{m^2 + n^2}\lambda, \quad \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\lambda, \quad \lambda.$$

- Per a que siguin positius hem de considerar $m > n > 0$.
- Per a que sigui enters, considerem $\lambda = m^2 + n^2$. En resulten,

$$2mn, \quad m^2 - n^2, \quad m^2 + n^2.$$

- Si els volem primitius, hem d'imposar que no tinguin factors comuns. La manera d'aconseguir-ho és eliminant factors comuns amb el procediment:
 - 1) Agafar de sortida m i n primers entre si.
 - 2) Si els m, n primers entre si són de la mateixa paritat, els terns sortirien múltiples de 2. La manera d'evitar-ho és agafant-los de diferent paritat.

4.2.3 Per obtenir les solucions enteres i positives de $x^2 + y^2 = 2z^2$, adoptarem l'estratègia de reduir el problema al de trobar terns pitagòrics. Llavors, només cal tenir en compte que,

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \iff 2x^2 + 2y^2 = 4z^2 \iff (x + y)^2 + (x - y)^2 = (2z)^2.$$

Si utilitzem el resultat de la pàgina 239 que determina tots els terns primitius, podem afirmar que totes les solucions x, y, z , compleixen:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2pqt \\ x - y = (p^2 - q^2)t \\ 2z = (p^2 + q^2)t \end{array} \right\} \text{ on } (p, q) = 1, p > q > 0 \text{ i de diferent paritat, i } t \in \mathbb{Z}^+.$$

A més, en ser $p^2 + q^2$ un nombre senar, llavors $t = 2k$, i s'obtenen les solucions,

$$\begin{aligned} x &= (2pq + p^2 - q^2)k \\ y &= (2pq - p^2 + q^2)k \\ z &= (p^2 + q^2)k. \end{aligned}$$

Finalment, és fàcil verificar que els primers factors de la part dreta de les igualtats anteriors, els quals depenen de p i q , són primers entre si. Llavors totes les solucions primitives —primeres entre si i generadores de la resta de solucions— són,

$$\left. \begin{array}{l} x = (p + q)^2 - 2q^2 \\ y = (p + q)^2 - 2p^2 \\ z = (p + q)^2 - 2pq \end{array} \right\} \text{ amb } y = (p + q)^2 - 2p^2 > 0.$$

Aquesta última condició es pot expressar com una condició sobre q/p :

$$\left. \begin{array}{l} (p + q)^2 - 2p^2 > 0 \\ q^2 + 2pq - p^2 = 0 \\ q > 0 \end{array} \right\} \implies q = -p \pm \sqrt{p^2 + p^2} = p(\sqrt{2} - 1).$$

Llavors,

$$\left. \begin{array}{l} q^2 + 2pq - p^2 > 0 \\ p > q > 0 \end{array} \right\} \implies 1 > \frac{q}{p} > \sqrt{2} - 1.$$

Podem observar sobre una taula d'exemples de solucions primitives, aquests re-

sultats:

p	q	$(p+q)^2$	$2p^2$	$2q^2$	$2pq$	x	y	z
2	1	9	8	2	4	7	1	5
3	2	25	18	8	12	17	7	13
4	1	25	< 32			No existeix		
4	3	49	32	18	24	31	17	25
5	2	49	< 50			No existeix		
5	4	81	50	32	40	49	31	41
6	1	49	< 72			No existeix		
6	5	121	72	50	60	71	49	61
7	2	81	< 98			No existeix		
7	4	121	98	32	56	79	23	65
7	6	169	98	72	84	97	71	85

4.2.4 Primerament observem que si $x^4 - z^4 = t^2$ no té solució, tampoc en tindrà $x^4 + y^4 = z^4$. Això és cert perquè si aquesta última en tingués, també en tindria $x^4 - z^4 = (y^2)^2$. Llavors, fent $y^2 = t$, $x^4 - z^4 = t^2$ tindria solució, la qual cosa va contra la hipòtesi de sortida.

Així, en tindrem prou a demostrar que $x^4 - z^4 = t^2$ no té solució. Suposem que en tingués. Tenint en compte que

$$x^4 - z^4, 2x^2z^2, x^4 + z^4$$

és un tern pitagòric, l'àrea del triangle rectangle corresponent és,

$$\frac{(x^4 - z^4) \cdot 2x^2z^2}{2} = t^2x^2z^2 = (t \cdot x \cdot z)^2.$$

Aquest resultat contradia el teorema demostrat per Fermat, sobre que l'àrea d'un triangle rectangle mai pot ser un quadrat.

4.2.5 Vegeu el fitxer `Ternsp.MTH`.

4.3.1 Si anomenem $x = \sqrt[5]{44240899506197}$, llavors

$$10^{13} < x^5 < 10^{15} \quad \text{i, per tant,} \quad 10^2 < x < 10^3.$$

El nombre x cercat es podrà escriure

$$x = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c.$$

Observem la disposició dels coeficients binomials per al cas de l'arrel cúbica, i les condicions per cercar a , b i c , sobre les quals fem un tempteig. Actuem de

manera anàloga i efectuem les operacions indicades a l'esquema adjunt. Veiem que el tempteig s'ha de fer per als valors de a, b i c que compleixen

$$a^5 \leq 4424, \quad 5 \cdot b \cdot 5^4 \leq 12990, \quad 5 \cdot c \cdot 53^4 \leq 242135020.$$

És a dir, $a \leq 5, b \leq 4, i c \leq 6$.

$ \begin{array}{r} 4424 \mid 08995 \mid 06197 \\ - 3125 \\ \hline 12990 \\ - 9375 \\ \hline 36158 \\ - 11250 \\ \hline 249089 \\ - 6750 \\ \hline 2423399 \\ - 2025 \\ \hline 24213745 \\ - 243 \\ \hline 242135020 \\ - 236714430 \\ \hline 54205906 \\ - 53595720 \\ \hline 6101861 \\ - 6067440 \\ \hline 344219 \\ - 343440 \\ \hline 7797 \\ - 7776 \\ \hline 21 \end{array} $	<div style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-left: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin: 0 auto;"></div>	$ \begin{array}{r} 5 \\ \hline 3 \\ \hline 6 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 5^5 = 3125 \\ \hline 5 \cdot 3 \cdot 5^4 = 9375 \\ 10 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 11250 \\ 10 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 6750 \\ 5 \cdot 3^4 \cdot 5 = 2025 \\ 1 \cdot 3^5 = 243 \\ \hline 5 \cdot 6 \cdot 53^4 = 236714430 \\ 10 \cdot 6^2 \cdot 53^2 = 53595720 \\ 10 \cdot 6^3 \cdot 53^2 = 6067440 \\ 5 \cdot 6^4 \cdot 53 = 343440 \\ 1 \cdot 6^5 = 7776 \end{array} $
--	--	--	---

Hem obtingut la part entera de l'arrel igual a 536, i el residu igual a 21. És a dir,

$$44240899506197 = 536^5 + 21.$$

Per aproximar la part fraccionària usem la interpolació d'as-Samaw'al i obtenim

$$\varepsilon \approx \frac{21}{\binom{5}{1}536^4 + \binom{5}{2}536^3 + \binom{5}{3}536^2 + \binom{5}{4}536 + 1} = \frac{21}{414237740281}.$$

Finalment,

$$\sqrt[5]{44240899506197} \approx 536 \frac{21}{414237740281},$$

i l'error que en resulta és menor que $2 \cdot 10^{-13}$.

4.4.1.i Primerament trobem els primers coeficients de la primera columna, els quals són els quocients, —corresponents als residus positius—, resultants d'aplicar l'algoritme d'Euclides als nombres 976 i 170.

	5	1	2	1	6	3
976	170	126	44	38	6	2
126	44	38	6	2	0	

En segon lloc, cerquem els dos últims coeficients λ i μ de la primera columna, els qual han de satisfer

$$2 \cdot \lambda + (-1)^5 \cdot 28 = 6 \cdot \mu.$$

En resulten $\mu = 1$ i $\lambda = 17$. Finalment, podem desenvolupar totes les columnes del mètode:

5	5	5	5	5	2658
1	1	1	1	463	463
2	2	2	343	343	
1	1	120	120		
6	103	103			
17	17				
1					

En ser l'equació equivalent a $976x - 170 \cdot (-y) = 28$ hem obtingut:

$$x = 463, \quad -y = 2658 \quad \text{és a dir,} \quad x = 463, \quad y = -2658.$$

Si deixéssim μ i $\lambda = 14 + 3\mu$, en el lloc de 1 i 17, sortiria $x = 378 + 85\mu$ i $y = -2170 - 488\mu$.

4.4.1.ii $976x + 170y = 28 \iff 488x - 85(-y) = 14.$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & 5 & 1 & 2 & 1 & 6 & 3 \\ \hline 488 & 85 & 63 & 22 & 19 & 3 & 1 \\ \hline 63 & 22 & 19 & 3 & 1 & 0 & \end{array} \implies \frac{488}{85} = [5, 1, 2, 1, 6, 3] \implies$$

$$\implies \frac{-y_0}{x_0} = [5, 1, 2, 1, 6] = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}} = \frac{155}{127} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x_0 = 27\lambda \\ -y_0 = 155\lambda \end{cases} \implies 13176\lambda - 13175\lambda = 14 \implies \lambda = 14 \implies$$

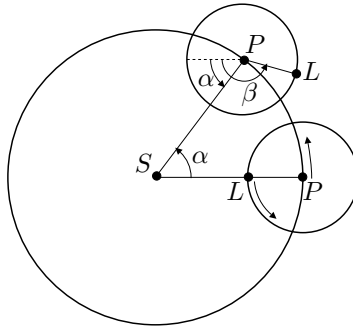
$$\implies \begin{cases} x_0 = 378 \\ y_0 = -2170 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 378 + 85t \\ y = -2170 - 488t \end{cases}$$

Si fem $t = s - 4$, tenim $\begin{cases} x = 38 + 85s \\ y = -218 - 488s \end{cases}$

4.4.2.i Sigui x el nombre d'anys enters que han de passar perquè $\widehat{SPL} = 90^\circ$. Llavors, en x anys,

$$\alpha = \frac{30}{32} \cdot x \cdot 360^\circ \text{ és el nombre de graus de circumferència que recorre } P.$$

$$\beta = \frac{11}{4} \cdot x \cdot 360^\circ \text{ és el nombre de graus de circumferència que recorre } L.$$



Si observem la figura adjunta, s'ha de verificar la relació següent,

$$\beta - \alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, \text{ en què } k \text{ és enter.}$$

És a dir,

$$\frac{11}{4} \cdot x \cdot 360^\circ - \frac{30}{32} \cdot x \cdot 360^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

La qual simplificada dóna,

$$29x - 16k = 4.$$

Iniciem el procés de resolució, i obtenim,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 29 & 16 & 13 & 3 & 1 \\ \hline 13 & 3 & 1 & 0 & \end{array} \implies \frac{29}{16} = [1, 1, 4, 3] \implies$$

$$\implies \frac{k_0}{x_0} = [1, 1, 4] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{9}{5} \implies$$

$$\implies \begin{cases} k_0 = 9\lambda \\ x_0 = 5\lambda \end{cases} \implies 145\lambda - 144\lambda = 4 \implies \lambda = 4 \implies$$

$$\implies \begin{cases} k_0 = 36 \\ x_0 = 20 \end{cases} \implies \begin{cases} k = 36 + 29t \\ x = 20 - 16t \end{cases}$$

S'ha de trobar el mínim enter $x > 0$. Això equival a trobar el màxim enter t tal que $20 - 16t > 0$. En resulta $t = 1$, és a dir que la situació demanada es produirà quan hagin passat $x = 20 - 16 \cdot 1 = 4$ anys.

Els graus de circumferència recorreguts per P seran,

$$\frac{30}{32} \cdot 4 \cdot 360^\circ = 1350^\circ = 270^\circ + 3 \cdot 360^\circ.$$

Consegüentment, l'angle $\widehat{P_1SP_2}$ entre les posicions final P_2 i inicial P_1 de P , és 270° .

L'última vegada que $\widehat{PSL} = 90^\circ$, abans de l'alineació dels tres punts, va ser quan $t = 2$, és a dir quan $x = 20 - 16 \cdot 2 = -12$. En definitiva, fa 12 anys.

4.4.2.ii Igual que abans, en x anys,

$\alpha = x \cdot 360^\circ$ és el nombre de graus de circumferència que recorre P .

$\beta = \frac{11}{5} \cdot x \cdot 360^\circ$ és el nombre de graus de circumferència que recorre L .

Llavors, s'ha de verificar la relació,

$$\frac{11}{5} \cdot x \cdot 360^\circ - x \cdot 360^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ .$$

La qual simplificada dóna,

$$24x - 20k = 5 .$$

Aquesta no pot tenir solució entera, perquè si la tingués el nombre 4, que és divisor de 24 i 20, hauria de ser divisor de 5, i això no pot ser. Per tant, en un nombre enter d'anys mai es donarà la posició de l'enunciat.

4.4.3 Observacions de sortida:

- En no tenir marques per als temps parcials, el funcionament dels rellotges es redueix a reiniciar-los en el moment que han abocat l'últim gra de sorra de la part superior a la inferior.
- Per mesurar un interval de temps, sempre hi ha d'haver, com a mínim, un rellotge en funcionament. Perquè, mentre no en funciona cap, el temps que transcorre és desconegut.

Fem el tractament, en general, per a dos rellotges A i B qualssevol. Siguin:

$a > 0$: Nombre de segons que mesura A cada vegada que s'inicia.

x : Nombre de vegades que iniciem A .

$b > 0$: Nombre de segons que mesura B cada vegada que s'inicia.

y : Nombre de vegades que iniciem B .

$c > 0$: Temps que es vol mesurar amb els rellotges.

Llavors, $ax + by$ representa que:

- Si $x > 0$ i $y > 0$, el temps s'ha mesurat de manera que, en cap moment, els dos rellotges funcionin a la vegada. Conseqüentment, el temps c que mesuren coincidirà amb el temps total de funcionament dels rellotges.
- Si $x \cdot y < 0$, el temps s'ha mesurat iniciant al mateix temps els dos rellotges, i reiniciant sense interrupcions el que aboca l'últim gra de sorra. Conseqüentment:
 - a) El temps necessari per mesurar c ve donat pel valor de, ax o by , positiu.
 - b) El temps c coincidirà amb el temps que el rellotge que funciona més estona, —el corresponent a x o y positiu—, estigui funcionant sol.

En el nostre cas l'equació a estudiar és

$$117x + 70y = 600, \quad \text{o també,} \quad 117x - 70(-y) = 600.$$

Busquem la solució utilitzant les fraccions contínues:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & 1 & 2 & 23 \\ \hline 117 & 70 & 47 & 23 & 1 \\ \hline 47 & 23 & 1 & 0 & \end{array} \implies \frac{117}{70} = [1, 1, 2, 23] \implies$$

$$\implies \frac{-y_0}{x_0} = [1, 1, 2] = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x_0 = 3\lambda \\ -y_0 = 5\lambda \end{cases} \implies 351\lambda - 350\lambda = 600 \implies \lambda = 600 \implies$$

$$\implies \begin{cases} x_0 = 1800 \\ y_0 = -3000 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1800 + 70t \\ y = -3000 - 117t \end{cases}$$

Discussió de les solucions:

Solució mínima que compleix $x > 0$ i $y > 0$

$$\begin{cases} x = 1800 + 70t > 0 \\ y = -3000 - 117t > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t > -\frac{1800}{70} > -25.7 \\ t < -\frac{3000}{117} < -25.6. \end{cases}$$

En no existir cap enter t que satisfagui les dues desigualtats no existeixen $x, y > 0$. Per tant no es pot aconseguir mesurar 600 segons amb l'estratègia de que els rellotges no funcionin al mateix temps.

Solució mínima que compleix $x > 0$ i $y < 0$

$$\begin{cases} x = 1800 + 70t > 0 \\ y = -3000 - 117t < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t > -25.7 \\ t > -25.6 \end{cases}$$

Per tant, en aquest cas, la solució dóna un valor mínim per a $t = -25$. Llavors

$$x = 50 \quad y = -75.$$

Això significa que s'han iniciat els dos rellotges al mateix temps, i s'han reiniciat sense interrupcions, fins a completar 50 vegades el A i 75 vegades el B . Quan el B ha completat les 75 posades en marxa, el temps que quedava perquè acabés el procés amb el rellotge A , ha servit per fer la cocció. Resumint,

La cocció ha començat a les

$$13\text{h} + 75 \cdot 70'' = 13\text{h} + 5250'' = 14\text{h}27'30'',$$

i s'ha acabat a les

$$13\text{h} + 50 \cdot 117'' = 13\text{h} + 5850'' = 14\text{h}37'30''.$$

En aquest cas dinariem a les 14h37'30''.

Solució mínima que compleix $x < 0$ i $y > 0$

$$\begin{cases} x = 1800 + 70t < 0 \\ y = -3000 - 117t > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t < -25.7 \\ t < -25.6 \end{cases}$$

Per tant, en aquest cas, la solució dóna un valor mínim per a $t = -26$. Llavors

$$x = -20 \quad y = 42.$$

Això significa que, com abans, s'han iniciat els dos rellotges al mateix temps, i s'han reiniciat sense interrupcions, fins a completar 20 vegades el A i 42 vegades el B . Quan el A ha completat les 20 posades en marxa, el temps que quedava perquè acabés el procés amb el rellotge B , ha servit per fer la cocció. Resumint,

La cocció ha començat a les

$$13\text{h} + 20 \cdot 117'' = 13\text{h} + 2340'' = 13\text{h}39',$$

i s'ha acabat a les

$$13\text{h} + 42 \cdot 70'' = 13\text{h} + 2940'' = 13\text{h}49'.$$

En aquest cas dinariem a les 13h49'.

En definitiva, ens podrem posar a dinar no més aviat de les 13h49'.

4.4.4.i (a) El cas $\omega_3 = \alpha_3/\beta_3$ és immediat. Quant al cas general $\omega_k = \alpha_k/\beta_k$, utilitzem la inducció:

$$\begin{aligned}\omega_{k+1} &= [q_1, \dots, q_{k+1}] = \left[q_1, \dots, q_{k-1}, q_k + \frac{1}{q_{k+1}} \right] = \\ &= \frac{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}} \right) \cdot \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}}{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}} \right) \cdot \beta_{k-1} + \beta_{k-2}} = \frac{(q_k \cdot q_{k+1} + 1) \cdot \alpha_{k-1} + q_{k+1} \alpha_{k-2}}{(q_k \cdot q_{k+1} + 1) \cdot \beta_{k-1} + q_{k+1} \beta_{k-2}} = \\ &= \frac{q_{k+1} \cdot (q_k \cdot \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}) + \alpha_{k-1}}{q_{k+1} \cdot (q_k \cdot \beta_{k-1} + \beta_{k-2}) + \beta_{k-1}} = \frac{q_{k+1} \cdot \alpha_k + \alpha_{k-1}}{q_{k+1} \cdot \beta_k + \beta_{k-1}}.\end{aligned}$$

O sigui que $\omega_{k+1} = \frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}}$, en què $\begin{cases} \alpha_{k+1} = q_{k+1} \cdot \alpha_k + \alpha_{k-1} \\ \beta_{k+1} = q_{k+1} \cdot \beta_k + \beta_{k-1}. \end{cases}$

Es compleix $\beta_k > 0$, perquè en la seva formació només intervenen sumes i productes sobre $1, q_2, q_3, \dots, q_n$, els quals són positius.

(b) Estudem la diferència $\frac{\alpha_k}{\beta_k} - \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}}$.

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_k}{\beta_k} - \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}} &= \frac{\alpha_k \beta_{k-1} - \alpha_{k-1} \beta_k}{\beta_k \beta_{k-1}} = \\ &= \frac{q_k \alpha_{k-1} \beta_{k-1} + \alpha_{k-2} \beta_{k-1} - q_k \alpha_{k-1} \beta_{k-1} - \alpha_{k-1} \beta_{k-2}}{\beta_k \beta_{k-1}} = \\ &= \frac{(-1)(\alpha_{k-1} \beta_{k-2} - \alpha_{k-2} \beta_{k-1})}{\beta_k \beta_{k-1}} = \dots = \\ &= \frac{(-1)^{k-2}(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2)}{\beta_k \beta_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-2} \cdot 1}{\beta_k \beta_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{\beta_k \beta_{k-1}}.\end{aligned}$$

A més, $\frac{\alpha_k}{\beta_k} - \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{\beta_k \beta_{k-1}} \implies \alpha_k \beta_{k-1} - \alpha_{k-1} \beta_k = (-1)^k$. Per tant, qualsevol divisor de α_k i β_k ha de ser divisor de $(-1)^k$. Això només és possible si $\text{mcd}(a, b) = 1$.

(c) Sigui $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \dots, q_n] = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$, i $\text{mcd}(a, b) = 1$, en què $\beta_n > 0$. Podem escriure,

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n = k \cdot a \\ \beta_n = k \cdot b > 0 \\ |k| = 1 \end{array} \right\} \implies \beta_n = k \cdot b = |k \cdot b| = |b| \implies \alpha_n = \frac{|b|}{b} \cdot a = \text{signe}(b) \cdot a.$$

4.4.4.ii Sigui $M = \text{mcd}(a, b)$. Si existeix solució x, y tindrem ax divisible per M i by divisible per M . Per tant, també ho serà la seva suma $ax + by = c$.

4.4.4.iii En ser $\alpha_n \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \beta_n = (-1)^n$, tenim

$$a \cdot \text{signe}(b) \cdot \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \cdot |b| = (-1)^n. \quad (9.3)$$

Si volem trobar una solució particular de $ax + by = c$, en què $\text{mcd}(a, b) = 1$, només cal multiplicar la igualtat (9.3) pel factor $(-1)^n \cdot c$. Efectivament, obtenim

$$a \cdot \text{signe}(b) \cdot \beta_{n-1} (-1)^n \cdot c + \alpha_{n-1} \cdot |b| \cdot (-1)^{n+1} \cdot c = c.$$

És a dir,

$$a \cdot \text{signe}(b) \cdot \beta_{n-1} \cdot (-1)^n \cdot c + b \cdot \text{signe}(b) \alpha_{n-1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot c = c.$$

Consegüentment, una solució particular de l'equació és,

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{signe}(b) \cdot \beta_{n-1} \cdot (-1)^n \cdot c \\ y_0 &= \text{signe}(b) \cdot \alpha_{n-1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot c, \end{aligned}$$

en què α_{n-1}/β_{n-1} , és la penúltima reduïda de a/b .

Si, de sortida, presentem l'equació $ax + by = c$, amb $b > 0$, llavors l'anterior solució particular s'expressa

$$\begin{aligned} x_0 &= \beta_{n-1} \cdot (-1)^n \cdot c \\ y_0 &= \alpha_{n-1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot c. \end{aligned}$$

4.4.4.iv Sigui (x_0, y_0) una solució particular de l'equació. Per a qualsevol altra solució (x, y) tenim

$$\left. \begin{array}{l} ax_0 + by_0 = c \\ ax + by = c \end{array} \right\} \implies a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

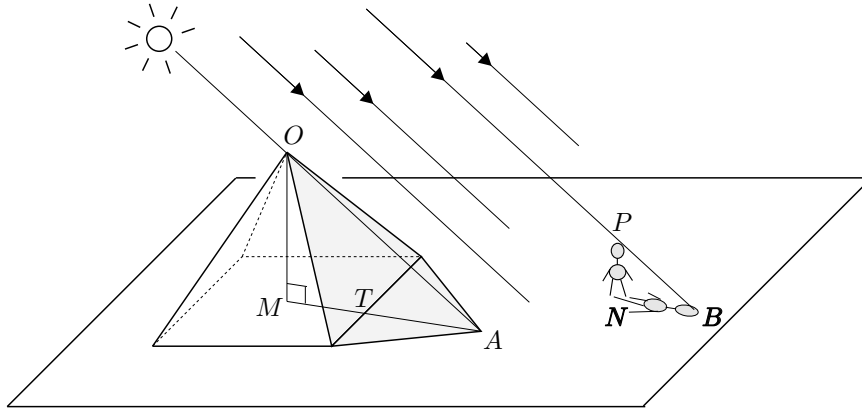
Llavors, si considerem $x - x_0 = \lambda$, es compleix $y - y_0 = \frac{-a}{b} \cdot \lambda$. Per tant, podem obtenir totes les solucions imposant $\lambda/b = \mu \in \mathbb{Z}$.

$$x = x_0 + b \cdot \mu, \quad y = y_0 - a \cdot \mu, \quad \text{en què } \mu \in \mathbb{Z}$$

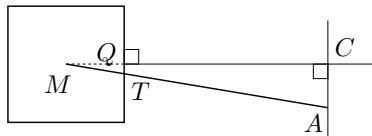
4.4.5 Vegeu el fitxer `Dioflnou.MTH`.

9.5 Activitats del capítol 5

5.1.1.i En poder considerar els raigs del Sol paral·lels, els triangles rectangles OMA i PNB tenen els mateixos angles perquè tenen els seus costats paral·lels. En ser $PN = NB$, llavors $\widehat{OAM} = \widehat{PBN} = 45^\circ = \widehat{BPN} = \widehat{AOM}$. Per tant, el triangle OMA té els catets iguals. O sigui que la longitud de l'ombra MA és igual a l'alçada OM .



Una de les limitacions del mètode és que, en general, la longitud de MA no es pot trobar per mesura directa; només passarà això quan AM sigui perpendicular al costat de la base. Es poden idear mètodes diversos per trobar MA . Un d'aquests podria consistir en traçar una paral·lela per A , al costat de la base de la piràmide; llavors, des del punt mitjà Q d'aquest costat es pot traçar una perpendicular.



D'aquesta manera queda determinat el triangle rectangle MCA , en què C és el punt d'intersecció de les rectes traçades. Finalment, en ser MQ la meitat del costat de la base, només caldrà aplicar el teorema de Pitàgores per calcular $MA = \sqrt{(MQ + QC)^2 + CA^2}$.

5.1.1.ii L'avantatge del segon mètode rau en que no cal esperar la coincidència de la longitud de la nostra ombra amb la nostra alçada. Podem prendre les mesures a qualsevol moment, mentre faci Sol i la piràmide projecti ombra. De totes maneres conserva la mateixa dificultat del mètode anterior.

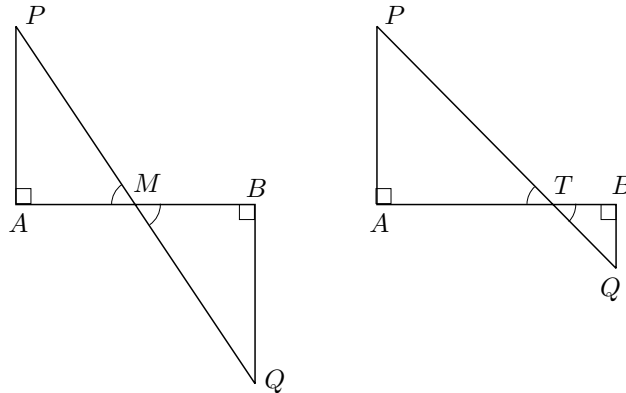
5.1.2.i El teorema I.26 proporciona els criteris d'igualtat de triangles A-C-A i A-A-C. Segons el primer d'aquests criteris els triangles AMP i BMQ són iguals en ser,

- $\widehat{PAM} = \widehat{QBM} = 90^\circ$.
- $\widehat{AMP} = \widehat{BMQ}$, per oposats pel vèrtex.
- $AM = MB$, per construcció.

Per tant, la distància AP del vaixell a la costa coincidirà amb BQ .

En resum, el mètode consistirà a situar-se sobre la perpendicular del vaixell a la costa, en el punt A ; traslladar-nos perpendicularment a aquesta línia fins un punt arbitrari B ; fer un senyal en el punt mitjà M de AB ; desplaçar-nos, des de B , perpendicularment a AB , terra endins, fins un punt Q tal que la visual QM arribi fins el vaixell P ; finalment, la distància cercada serà BQ .

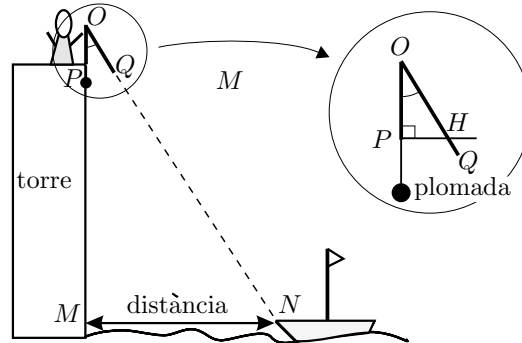
Una dificultat greu del mètode és que, en la majoria d'ocasions, el desplaçament QB no es podrà efectuar degut als accidents geogràfics o urbans.



Podríem superar aquesta dificultat, prescindint del punt mitjà M , fent un desplaçament més petit BQ , dirigint una visual des de Q fins el vaixell P , i marcant la intersecció T d'aquesta visual amb AB . Llavors els triangles ATP i BTQ són semblants i, AT , TB i BQ es poden mesurar. Per tant, es pot calcular AP fent

$$AP = \frac{BQ \cdot AT}{BT}.$$

5.1.2.ii Podríem construir un dispositiu consistent en un llistó vertical OP fix a dalt de la torre, seguint la direcció de la plomada, i una altre llistó OQ que pogués girar al voltant del punt O més elevat de OP . Aquest últim llistó serviria per determinar la inclinació \widehat{POQ} de la visual al vaixell. Amb això podríem construir un triangle rectangle OPH sobre el paper, semblant al OMN determinat pel cim de la torre, la seva base, i la posició del vaixell.



Llavors, pel mateix principi de la igualtat de raons citat en el fragment de Plutarc, obtindríem la distància MN del vaixell a la costa:

$$\frac{MN}{PH} = \frac{OM}{OP} \implies MN = \frac{PH}{OP} \cdot OM,$$

en què OM és la suma de l'alçada de la torre i el llistó vertical OP .

5.2.1.i Els triangles KNX i OHV són semblants perquè $\widehat{NKX} = \widehat{VOH}$, en ser angles aguts de costats perpendiculars, i $\widehat{KNX} = \widehat{OHV} = 90^\circ$.

5.2.1.ii En ser els triangles KNX i OHV semblants, els seus costats són proporcionals. Per tant,

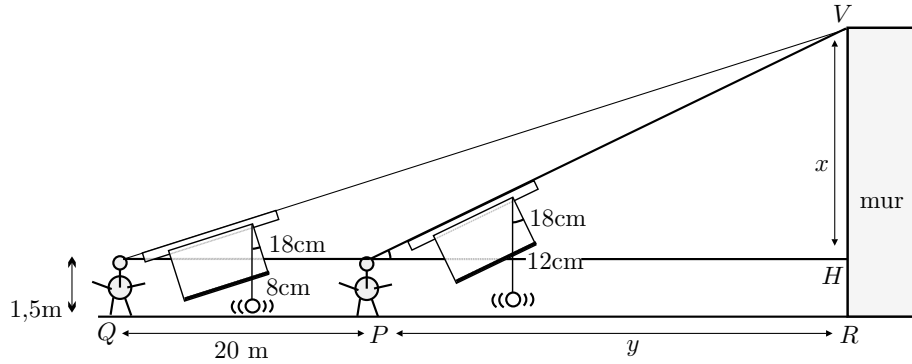
$$\frac{HV}{NX} = \frac{OH}{KN} \implies HV = \frac{OH \cdot NX}{KN},$$

i l'alçada del mur resultarà de sumar HV a l'alçada de l'observador.

5.2.1.iii Es tracta de situar-se a qualsevol punt de l'aula, i apuntar amb el quadrant a un punt V de l'aresta del diedre que formen una paret i el sostre. Llavors, es pren nota de les dades NX i KN del quadrant, i es mesura la distància d de l'observador a la perpendicular al terra que passa per V . A partir d'això es pot calcular l'alçada de l'aula, la qual resultarà d'afegir a l'alçada de l'observador el valor de $\frac{d \cdot NX}{KN}$.

5.2.1.iv Vegeu el fitxer `Altquad.FIG`.

5.2.1.v Es podria resoldre prenent mesures des de dos punts d'observació P i Q diferents, de manera que estiguessin alineats amb el peu R de la vertical del mur que passa pel punt V cap on hem dirigit les dues visuals, —vegeu la figura adjunta—.



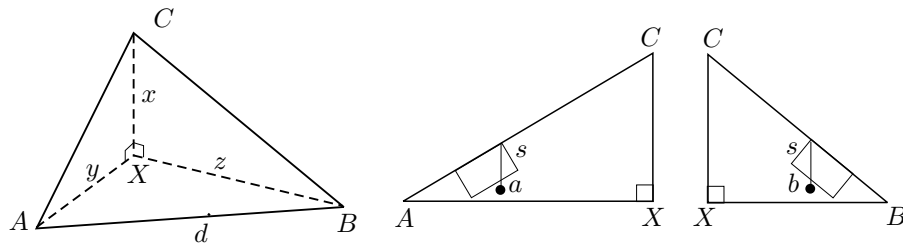
Tindríem $x = VH$ i $y = PR$ desconeguts, i les dades del quadrant conegudes en les dues posicions P i Q de l'observador, així com l'altura HR d'aquest últim. Si suposem que s'han fet les lectures que figuren en el gràfic, tenim:

$$\frac{x}{8} = \frac{20 + y}{18}, \quad \frac{x}{12} = \frac{y}{18} \implies x = 26.67 \text{ m.}$$

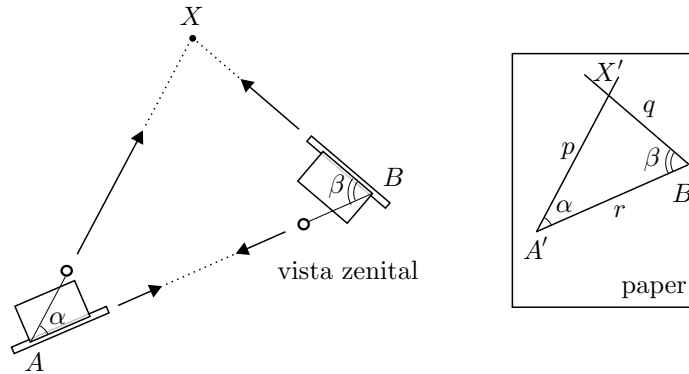
Llavors, l'altura del mur, seria de $1.5 \text{ m} + 26,67 \text{ m} = 28.17 \text{ m}$.

5.2.2 Desconeixem l'altura $x = CX$, i les distàncies $y = AX$ i $z = BX$. Quant a la distància $d = AB$ és coneguda a partir del plànol de la línia costanera. Seguirem el procediment següent:

- Dirigim la visual del quadrant, primer des de A i després des de B , al punt C més alt del campanar. Llavors, fem la lectura de les dades a i b determinades per la plomada i mesurem el costat s de la fullola.



- Col·loquem el quadrant amb la fullola horitzontal. Apuntem tal com hem dit a l'enunciat, —vegeu la vista zenital adjunta—, i mesurem els angles $\widehat{BAX} = \alpha$ i $\widehat{ABX} = \beta$.



- Sobre un full de paper construïm un triangle semblant $A'X'B'$ al triangle AXB , traçant el costat $A'B'$ amb mesura arbitrària r , i incorporant els angles α i β amb el transportador d'angles.
- Mesurem els dos costats que falten, $A'X' = p$ i $B'X' = q$.
- Amb les tres parelles de triangles semblants obtingudes, podem establir:

$$\frac{y}{s} = \frac{x}{a} \quad \frac{z}{s} = \frac{x}{b}, \quad \frac{p}{y} = \frac{r}{d} = \frac{q}{z}.$$

D'aquestes es pot deduir,

$$x = \frac{a \cdot p \cdot d}{r \cdot s}, \quad x = \frac{b \cdot q \cdot d}{r \cdot s}$$

O sigui que tenim informació suficient per trobar $x = CX$. De fet, com hem vist, podem obtenir $x = CX$ de dues maneres diferents. Això servirà per valorar el funcionament del quadrant i la lectura de mesures. Si tot va bé, han de sortir els dos valors de la x bastant semblants.

En una aplicació pràctica elaborada per una alumna de l'antic primer de BUP, es van obtenir les següents dades:

$$\begin{aligned} a &= 1.6 \text{ cm} & b &= 2 \text{ cm} & s &= 15 \text{ cm} \\ \alpha &= 45^\circ & \beta &= 62^\circ \\ r &= 7 \text{ cm} & p &= 6.5 \text{ cm} & q &= 5.2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Llavors, els dos valors de $x = CX$ que resulten a partir d'elles són,

$$x = \frac{1.5 \cdot 6.5 \cdot 1350}{7 \cdot 15} = 125.4, \quad x = \frac{2 \cdot 5.2 \cdot 1350}{7 \cdot 15} = 133.7.$$

O sigui que una primera aproximació de la mesura de l'alçada del campanar sobre el nivell del mar, podria consistir a considerar la mitjana aritmètica dels dos valors obtinguts. És a dir,

$$\frac{125.4 + 133.7}{2} = 129.6.$$

Tenint en compte la marca que hi ha a la façana de la catedral, la qual situa la base del campanar a uns 66.5 m sobre el nivell del mar, podríem dir que una primera aproximació de la mesura de l'alçada del campanar sobre el terra de la catedral és de

$$129.6 \text{ m} - 66.5 \text{ m} \approx 63 \text{ m}.$$

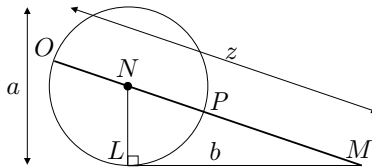
5.3.1 Vegeu el fitxer `Geoalg.FIG`.

5.3.2 Si en la figura adjunta anomenem

$$z = MO, \quad a = 2 \cdot LN \quad \text{i} \quad b = LM,$$

llavors, pel teorema III.36 dels *Elements*,⁹

$$MO \cdot MP = LM^2 \quad \text{i, per tant,} \quad z(z - a) = b^2, \quad \text{i també,} \quad z^2 = az + b^2.$$



O sigui que, podem obtenir una solució de l'equació construint:

- Una circumferència de diàmetre a .
- Una tangent en un punt qualsevol L de la circumferència.
- Un punt M sobre la tangent, tal que $LM = b$.
- Una recta r per M i el centre N de la circumferència.

Llavors, el segment MO determinat pel punt O d'intersecció, —més allunyat de M —, de la recta r i la circumferència, és la versió geomètrica de la solució, i el seu valor numèric la solució algebraica.

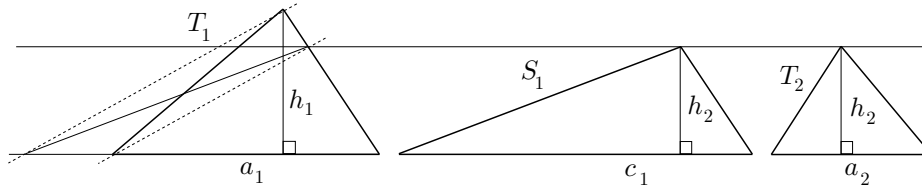
Vegeu el fitxer `Eq2desc.FIG`.

⁹Vegeu la secció 2.6.4.

5.3.3.i El primer que podem fer es construir un triangle S_1 equivalent al T_1 , que tingui la mateixa alçada que el T_2 . Amb això aconseguirem establir, pel teorema VI.1,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{S_1}{T_2} = \frac{c_1}{a_2},$$

en què c_1 és la base de S_1 , i a_2 de T_2 .



Després, per acabar, només cal construir la quarta proporcional, —mitjançant VI.12—, de c_1 , a_2 i p . És a dir, construir

$$x \text{ tal que } \frac{c_1}{a_2} = \frac{p}{x}, \text{ i llavors } \frac{T_1}{T_2} = \frac{c_1}{a_2} = \frac{p}{x}.$$

5.3.3.ii Primerament es pot construir, com abans, x tal que $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{x}$. Llavors, la composició cercada serà

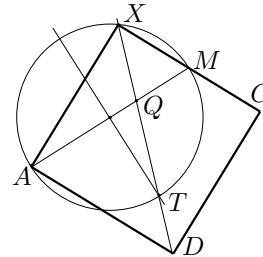
$$\frac{q}{p} \circ \frac{T_1}{T_2} = \frac{q}{p} \circ \frac{p}{x} = \frac{q}{x}.$$

Vegeu el fitxer `Tepropr.FIG` per a la visualització i comprovació numèrica.

5.4.1 Sigui A el vèrtex, i M el punt mitjà del costat. Actuarem per la via de l'anàlisi, i suposarem el quadrat $AXCD$ construït, en què \widehat{AXM} és angle recte.

El primer que observem és que X es troba sobre la circumferència de diàmetre AM . A més, $XM/XA = 1/2$ i, pel teorema VI.3, la bisectriu XD de l'angle \widehat{AXM} tallarà AM en el punt Q tal que

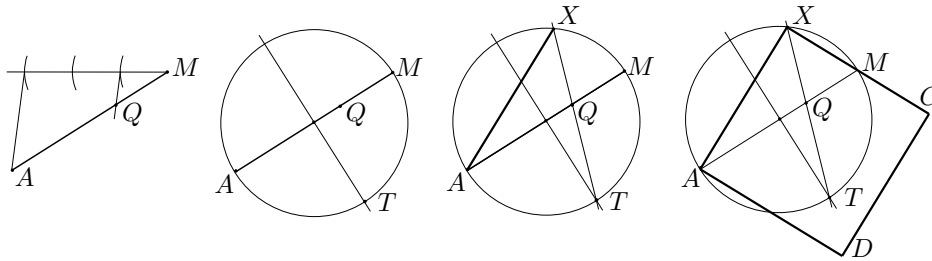
$$\frac{QM}{QA} = \frac{XM}{XA} = \frac{1}{2}.$$



També s'observa que, en ser $\widehat{AXQ} = \widehat{QXM} = 45^\circ$, la prolongació de XQ talla la circumferència en el punt T tal que $\widehat{AT} = \widehat{TM} = 90^\circ$. Per tant, el punt T es troba sobre la mediatriu de AM .

Així, en ser els punts Q i T , i la circumferència de diàmetre AM de construcció coneguda, l'anàlisi s'ha acabat. Llavors, el vèrtex X , que donarà pas a la construcció dels altres vèrtexs, pot ser obtingut en les etapes de construcció següents:

- Punt Q sobre AM tal que $QM = \frac{1}{2}QA$, mitjançant el resultat dels teoremes VI.9 o VI.10.
- Punt T , com a intersecció de la circumferència de diàmetre AM amb la mediatriu de AM .
- Punt $X \neq T$, com a intersecció de la recta QT amb la circumferència de diàmetre AM .



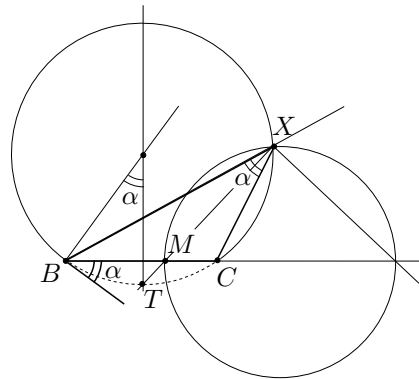
5.4.2.i Vegeu el fitxer `Circap.FIG`.

5.4.2.ii Vegeu els fitxers `Circapol.MAC`. El fitxer `Circapol.FIG` s'ha utilitzat per elaborar la macro.

5.4.3 Cas $b/c = 1$: Es compleix $XB/XC = b/c = 1$. Per tant, el vèrtex X es troba sobre la mediatriu de BC . O sigui que el punt X serà la intersecció d'aquesta mediatriu amb l'arc capaç de l'angle α sobre el segment BC .

Cas $b/c \neq 1$: Suposem $b/c > 1$. Com en el cas anterior, X es troba sobre l'arc capaç de l'angle α sobre el segment BC . A més, en ser $XB/XC = b/c$, X es troba sobre la circumferència d'Apol·loni dels punts B i C per a la raó b/c . Conseqüentment, obtindrem X com a intersecció d'aquesta circumferència amb l'arc capaç.

Si construïm M a l'interior de BC , tal que $BM/MC = b/c$, s'observa que XM és la bisectriu de l'angle \widehat{BXC} .



Però aquesta recta passa pel punt T d'intersecció entre la mediatriu de BC i l'arc que completa la circumferència que conté l'arc capaç. Això proporciona una construcció alternativa consistent a obtenir el vèrtex X com la intersecció de la recta TM amb l'arc capaç.

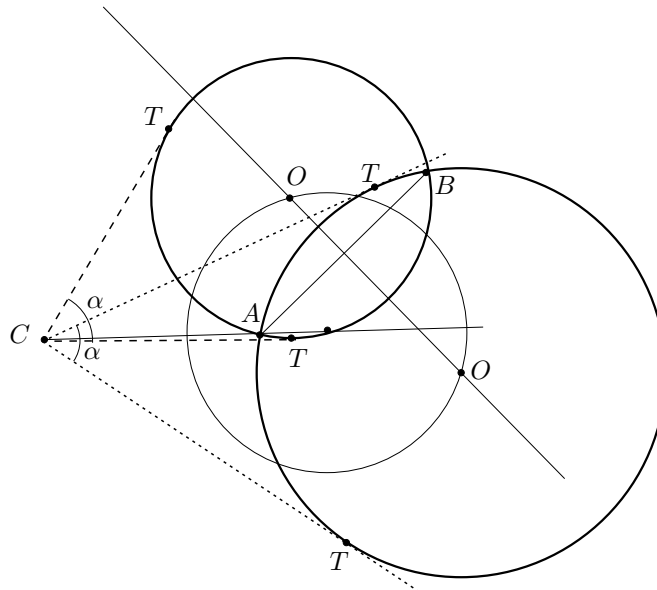
Per a la visualització amb el CABRI, vegeu el fitxer **Trancor.FIG**.

5.4.4 Suposem el problema resolt. Observem que:

- El centre O de la circumferència es troba sobre la mediatriu de AB .
- Si T és un dels punts de tangència, llavors $OT/OC = \sin(\alpha/2)$.¹⁰
- En ser $OA = OT$, es compleix

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OT} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 1.$$

Per tant, el punt O pertany a la circumferència d'Apol·loni dels punts A i C per a la raó $\sin(\alpha/2)$.

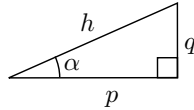


En aquest punt, l'anàlisi ha estat acabada, perquè la mediatriu de AB i la circumferència d'Apol·loni són de construcció coneguda. El centre O de la circumferència cercada serà el punt d'intersecció d'aquestes dues línies. Existiran dues, una o cap solució segons la posició relativa de les dues línies. Podeu examinar el nombre de solucions en el fitxer **Ci2pan1.FIG**.

¹⁰Si no donem entrada al llenguatge trigonomètric, considerem un triangle rectangle amb un angle $\alpha/2$. Llavors, OT/OC és la raó entre el catet oposat a l'angle i la hipotenusa.

5.5.1 A la taula següent presentem els càlculs necessaris per cercar els valors que es demanen utilitzant la taula de cordes, i utilitzant la calculadora. Les expressions de les taules de cordes s'han obtingut a partir de l'equació (5.1) del capítol 5.

Dades	Taula de cordes	Raons trigonomètriques
h, α	$p = \frac{h \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\alpha)}{\text{crd}(180^\circ)} = \frac{h \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\alpha)}{120}$	$p = h \cdot \cos \alpha$
	$q = \frac{h \cdot \text{crd}(2\alpha)}{\text{crd}(180^\circ)} = \frac{h \cdot \text{crd}(2\alpha)}{120}$	$q = h \cdot \sin \alpha$
p, α	$q = \frac{p \cdot \text{crd}(2\alpha)}{\text{crd}(180^\circ - 2\alpha)}$	$q = p \cdot \tan \alpha$
q, α	$p = \frac{q \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\alpha)}{\text{crd}(2\alpha)}$	$p = \frac{q}{\tan \alpha}$



5.6.1 Apliquem l'algoritme indicat al càlcul de $\sqrt{3}$ en base sexagesimal,

3 00 00 00 00 00 00 00 00	1			
- 1		1^2	=	1
2 00	43	$2 \cdot 43 \cdot 1$	=	1, 26
- 1 26		$1 \cdot 43^2$	=	30, 49
34 00	55	$2 \cdot 55 \cdot 1, 43$	=	3, 08, 50
- 30 49		$1 \cdot 55^2$	=	50, 25
3 11 00	22	$2 \cdot 22 \cdot 1, 43, 55$	=	1, 16, 12, 20
- 3 08 50		$1 \cdot 22^2$	=	8, 4
2 10 00	58	$2 \cdot 58 \cdot 1, 43, 55, 22$	=	3, 20, 55, 2, 32
- 50 25		$1 \cdot 58^2$	=	56, 4
1 19 35 00				
- 1 16 12 20				
3 22 40 00				
- 8 4				
3 22 31 56 00				
- 3 20 55 2 32				
1 36 53 28 00				
- 56 4				
1 36 52 31 56				

Hem obtingut, $3 = 1; 43, 55, 22, 58^2 + 0; 0, 0, 0, 1, 36, 52, 31, 56$, és a dir que $\sqrt{3} \approx 1; 43, 55, 22, 58$. Per tant,

$$\text{crd}(120^\circ) = 60\sqrt{3} \approx 60 \cdot 1; 43, 55, 22, 58 = 103; 55, 22, 58 \approx 103; 55, 23.$$

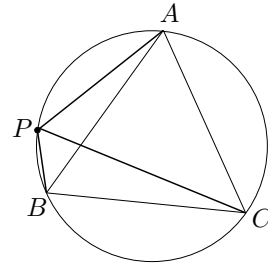
5.6.2 Si observem el gràfic adjunt, veiem una configuració que recorda el teorema de Ptolemeu. La seva aplicació diu que,

$$PC \cdot AB = PA \cdot BC + PB \cdot AC.$$

En ser el triangle equilàter, $AB = AC = BC$. Per tant,

$$PC = PA + PB.$$

Això es pot enunciar dient que la suma distàncies de qualsevol punt de la circumferència als vèrtexs més propers d'un triangle equilàter inscrit, és igual a la distància entre aquest punt i l'altre vèrtex.

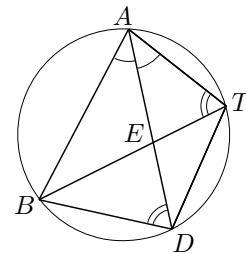


5.6.3 Pel teorema de la bisectriu $\frac{AB}{BE} = \frac{AT}{TE}$. Per tant, també es compleix

$$\frac{AB + AT}{BT} = \frac{AB + AT}{BE + TE} = \frac{AT}{TE}. \quad (9.4)$$

En ser AD la bisectriu de \widehat{BAT} , tenim $\widehat{BAD} = \widehat{TAD}$. A més $\widehat{BTA} = \widehat{BDA}$, perquè subtendeixen el mateix arc. Per tant els triangles ABD i AET són semblants. Concretament,

$$\frac{AT}{TE} = \frac{AD}{BD}. \quad (9.5)$$



De les igualtats (9.4) i (9.5) obtenim

$$\frac{AB + AT}{BT} = \frac{AD}{BD} \quad \text{i, per tant,} \quad \frac{AB + AT}{AD} = \frac{BT}{BD}.$$

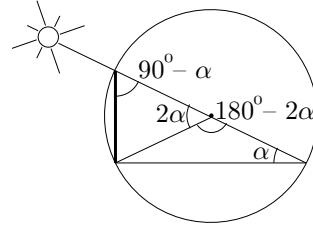
Que aquesta igualtat expressa un cas particular del teorema de Ptolemeu és immediat del fet que $\widehat{BAD} = \widehat{DAT} \implies BD = DT$. Efectivament, de la propietat demostrada obtenim,

$$(AB + AT) \cdot BD = AD \cdot BT \implies AB \cdot DT + AT \cdot BD = AD \cdot BT.$$

5.6.4 Sigui h l'altura de l'edifici, i $\alpha = 32^\circ 22' 17''$.

Observem que, com a la igualtat (5.2) del final de la secció 5.2,

$$h = \frac{42 \cdot \text{crd}(2\alpha)}{\text{crd}(180^\circ - 2\alpha)}.$$



Llavors, consultem les taules i obtenim

$$\begin{aligned} \text{crd}(2\alpha) &= \text{crd}(64^\circ 44' 34'') = \\ &= 63; 35, 26 + 44 \cdot 0; 0, 53, 13 + \frac{34}{60} \cdot 0; 0, 53, 13 = \\ &= 63; 35, 26 + 0; 39, 1, 32 + \frac{1}{60} \cdot 0; 30, 9, 22 = \\ &= 64; 14, 27, 32 + 0; 0, 30, 9, 22 = 64; 14, 57, 41, 22. \\ \text{crd}(180^\circ - 2\alpha) &= \text{crd}(115^\circ 15' 26'') = \\ &= 101; 12, 25 + 15 \cdot 0; 0, 33, 39 + \frac{26}{60} \cdot 0; 0, 33, 39 = \\ &= 101; 12, 25 + 0; 8, 24, 45 + \frac{1}{60} \cdot 0; 14, 34, 54 = \\ &= 101; 20, 49, 45 + 0; 0, 14, 34, 54 = 101; 21, 4, 19, 54. \end{aligned}$$

Consegüentment,

$$h = \frac{42 \cdot 64; 14, 57, 41, 22}{101; 21, 4, 19, 54} \approx 26; 37, 29, 54, 9.$$

Si utilitzem la funció tangent i la calculadora obtenim,

$$h = 42 \cdot \tan 32^\circ 22' 17'' \approx 26.62460.$$

Si passem a sistema decimal la solució trobada amb la taula de cordes, s'observa la bona aproximació que proporciona:

$$26; 37, 29, 54, 9 \approx 26.62497.$$

5.6.5 La funció $\text{TAULA}(\alpha, p)$, del fitxer `Cordes.MTH` del `DERIVE`, per als valors $\alpha = 45.5$ i $p = 45$, proporciona la taula equivalent a la presentada per Ptolemeu, després d'haver fet la identificació $\text{crd}(\alpha) = 120 \cdot \sin(\alpha/2)$:

Arcs °	Cordes				Diferències/30				
	p	'	"	'''	p	'	"	'''	iv
45.5	46	24	19	8	0	0	57	53	25
46	46	53	15	50	0	0	57	46	59
46.5	47	22	9	20	0	0	57	40	30
47	47	50	59	35	0	0	57	33	56
47.5	48	19	46	34	0	0	57	27	19
48	48	48	30	13	0	0	57	20	37
48.5	49	17	10	32	0	0	57	13	52
49	49	45	47	28	0	0	57	7	3
49.5	50	14	21	0	0	0	57	0	9
50	50	42	51	5	0	0	56	53	12
50.5	51	11	17	41	0	0	56	46	11
51	51	39	40	47	0	0	56	39	6
51.5	52	8	0	21	0	0	56	31	58
52	52	36	16	20	0	0	56	24	45
52.5	53	4	28	42	0	0	56	17	28
53	53	32	37	27	0	0	56	10	8
53.5	54	0	42	31	0	0	56	2	44
54	54	28	43	53	0	0	55	55	16
54.5	54	56	41	31	0	0	55	47	44
55	55	24	35	24	0	0	55	40	8
55.5	55	52	25	28	0	0	55	32	29
56	56	20	11	42	0	0	55	24	45
56.5	56	47	54	5	0	0	55	16	58
57	57	15	32	35	0	0	55	9	7
57.5	57	43	7	8	0	0	55	1	12
58	58	10	37	45	0	0	54	53	14
58.5	58	38	4	22	0	0	54	45	12
59	59	5	26	58	0	0	54	37	6
59.5	59	32	45	31	0	0	54	28	56
60	60	0	0	0	0	0	54	20	42
60.5	60	27	10	21	0	0	54	12	25
61	60	54	16	34	0	0	54	4	4
61.5	61	21	18	36	0	0	53	55	40
62	61	48	16	26	0	0	53	47	11
62.5	62	15	10	2	0	0	53	38	39
63	62	41	59	22	0	0	53	30	4
63.5	63	8	44	24	0	0	53	21	24
64	63	35	25	7	0	0	53	12	41
64.5	64	2	1	28	0	0	53	3	55
65	64	28	33	25	0	0	52	55	4
65.5	64	55	0	58	0	0	52	46	10
66	65	21	24	3	0	0	52	37	13
66.5	65	47	42	40	0	0	52	28	12
67	66	13	56	46	0	0	52	19	7
67.5	66	40	6	20	0	0	52	9	59

Els valors de la taula de Ptolemeu que s'allunyen més dels obtinguts utilitzant la funció sinus i el programa DERIVE, són els corresponents als que hem em-

marcat. Tots els altres són correctes si s'arrodoneix a les parts segones $[60^{-2}]$ en la columna de les cordes, i a les parts terceres $[60^{-3}]$ en la de les diferències. Els errors màxims es troben doblement emmarcats:

$$\text{Error cordes} \leq \frac{23}{60^3} < 1.07 \cdot 10^{-4}, \quad \text{Error diferències} \leq \frac{45}{60^4} < 3.5 \cdot 10^{-6}.$$

5.6.6.i Primerament observem que

$$\sin \alpha = \frac{\text{crd}(2\alpha)}{120} \implies \frac{\text{crd}(180^\circ - 2\alpha)}{120} = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha. \quad (9.6)$$

Abans d'establir les equivalències, acordem de fer $\alpha = 2a$ i $\beta = 2b$, per tal de fer la presentació més simple. També recordem que els teoremes implicats han estat estudiats en el procés de sis etapes de la secció 5.3.1.

Teorema de la corda de l'arc doble

Aquest teorema, estudiat a l'etapa 4, es podia expressar amb la igualtat següent,

$$\text{crd}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 60 \cdot (120 - \text{crd}(180^\circ - \alpha)).$$

Si fem les substitucions indicades a les igualtats 9.6, obtenim

$$120^2 \cdot \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 60 \cdot (120 - 120 \cdot \cos a) = \frac{120^2}{2} \cdot (1 - \cos a).$$

Per tant, si simplifiquem, obtenim

$$\boxed{\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}}.$$

Teorema de la corda de la suma

En aquest cas la igualtat que expressava el teorema la trobem a l'etapa 6,

$$120 \cdot \text{crd}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \text{crd}(180^\circ - \alpha) \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}(\beta) \cdot \text{crd}(\alpha).$$

Si substituïm, com abans, obtenim

$$120^2 \cdot \cos(a + b) = 120^2 \cdot \cos a \cdot \cos b - 120^2 \cdot \sin a \cdot \sin b.$$

Consegüentment, si eliminem 120^2 ,

$$\boxed{\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.}$$

Teorema de la corda de la diferència

La igualtat que expressava aquest teorema l'havíem presentat a l'etapa 3, i era

$$120 \cdot \text{crd}(\alpha - \beta) + \text{crd}(\beta) \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha) = \text{crd}(180^\circ - \beta) \cdot \text{crd}(\alpha).$$

Ara, substituïm com en els casos anteriors i obtenim,

$$120^2 \cdot \sin(a - b) + 120^2 \cdot \sin b \cdot \cos a = 120^2 \cdot \cos b \cdot \sin a.$$

Eliminem 120^2 , i queda

$$\boxed{\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b.}$$

Teorema de la corda del suplement en el semicercle

Aquest últim teorema era l'objecte de l'etapa 2, i s'expressava

$$\text{crd}(180^\circ - \alpha) = \sqrt{120^2 - \text{crd}^2(\alpha)}.$$

D'aquí, amb la substitució acordada, s'obté

$$\cos a = \sqrt{120^2 - 120^2 \cdot \sin^2 a} = 120 \cdot \sqrt{1 - \sin^2 a}.$$

Si simplifiquem i fem quadrats en resulta,

$$\boxed{\sin^2 a + \cos^2 a = 1.}$$

5.6.6.ii Per al càlcul de $\sin(a + b)$, utilitzarem que $a = (a + b) - b$. Llavors,

$$\sin a = \sin((a + b) - b) = \sin(a + b) \cdot \cos b - \cos(a + b) \cdot \sin b.$$

Però $\cos(a + b)$ és conegut de l'apartat anterior. Si substituïm la seva expressió obtenim,

$$\sin a = \sin(a + b) \cdot \cos b - \cos a \cdot \cos b \cdot \sin b - \sin a \cdot \sin^2 b.$$

A partir de la identitat coneguda $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, substituïm, simplifiquem i obtenim,

$$0 = \sin(a + b) \cdot \cos b - \cos a \cdot \cos b \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos^2 b.$$

Finalment, tornem a simplificar i resulta

$$\boxed{\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b.}$$

Per al càlcul de $\cos(a - b)$, utilitzarem que $a = (a - b) + b$. Llavors,

$$\cos a = \cos((a - b) + b) = \cos(a - b) \cdot \cos b - \sin(a - b) \cdot \sin b.$$

Com abans, $\sin(a - b)$ és conegut de l'apartat anterior. Si substituïm la seva expressió obtenim,

$$\cos a = \cos(a - b) \cdot \cos b - \sin a \cdot \cos b \cdot \sin b - \cos a \cdot \sin^2 b.$$

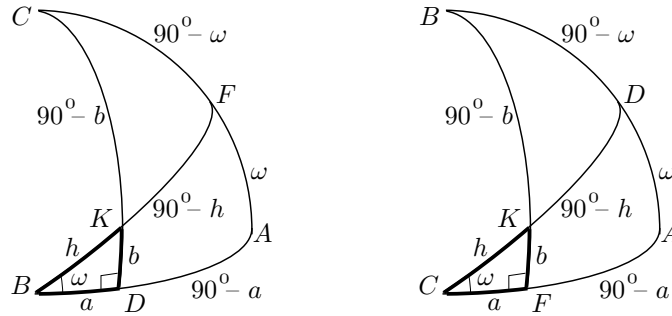
A partir de $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, substituïm, simplifiquem i obtenim,

$$0 = \cos(a - b) \cdot \cos b - \sin a \cdot \cos b \cdot \sin b - \cos a \cdot \cos^2 b.$$

Finalment simplifiquem i resulta

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.}$$

5.7.1 Primerament utilitzem la configuració de Menelau amb els noms dels vèrtexs tal com hem presentat a l'enunciat, és a dir com a la part esquerra del gràfic adjunt.



Recordem les relacions de Menelau:

$$\frac{\text{crd}(\widehat{2CF})}{\text{crd}(\widehat{2FA})} = \frac{\text{crd}(\widehat{2CK})}{\text{crd}(\widehat{2KD})} \cdot \frac{\text{crd}(\widehat{2BD})}{\text{crd}(\widehat{2BA})}. \quad (9.7)$$

$$\frac{\text{crd}(\widehat{2CA})}{\text{crd}(\widehat{2FA})} = \frac{\text{crd}(\widehat{2CD})}{\text{crd}(\widehat{2KD})} \cdot \frac{\text{crd}(\widehat{2BK})}{\text{crd}(\widehat{2BF})}. \quad (9.8)$$

Consegüentment, en el nostre cas, de la primera relació (9.7) obtenim,

$$\frac{\text{crd}(180^\circ - 2\omega)}{\text{crd}(2\omega)} = \frac{\text{crd}(180^\circ - 2b)}{\text{crd}(2b)} \cdot \frac{\text{crd}(2a)}{\text{crd}(180^\circ)},$$

és a dir,

$$\frac{\cos \omega}{\sin \omega} = \frac{\cos b}{\sin b} \cdot \frac{\sin a}{\sin 90^\circ}.$$

Per tant,

$$\boxed{\tan b = \tan \omega \cdot \sin a.}$$

De la mateixa manera, de la segona relació (9.8), s'obté

$$\frac{\text{crd}(180^\circ)}{\text{crd}(2\omega)} = \frac{\text{crd}(180^\circ)}{\text{crd}(2b)} \cdot \frac{\text{crd}(2h)}{\text{crd}(180^\circ)},$$

és a dir,

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin \omega} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin b} \cdot \frac{\sin h}{\sin 90^\circ}.$$

Per tant,

$$\boxed{\sin b = \sin \omega \cdot \sin h.}$$

Per tal d'aprofitar la notació de les dues relacions de Menelau, canviem els noms dels vèrtexs de la configuració, és a dir treballem amb la part dreta del gràfic que hem adjuntat més amunt. Amb la nova assignació de noms, de la primera relació (9.7) obtenim,

$$\frac{\text{crd}(2a)}{\text{crd}(180^\circ - 2a)} = \frac{\text{crd}(2h)}{\text{crd}(180^\circ - 2h)} \cdot \frac{\text{crd}(180^\circ - 2\omega)}{\text{crd}(180^\circ)},$$

és a dir,

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin h}{\cos h} \cdot \frac{\cos \omega}{\sin 90^\circ}.$$

Per tant,

$$\boxed{\tan a = \tan h \cdot \cos \omega.} \tag{9.9}$$

De la mateixa manera, de la segona relació (9.8) s'obté,

$$\frac{\text{crd}(180^\circ)}{\text{crd}(180^\circ - 2a)} = \frac{\text{crd}(180^\circ)}{\text{crd}(180^\circ - 2h)} \cdot \frac{\text{crd}(180^\circ - 2b)}{\text{crd}(180^\circ)},$$

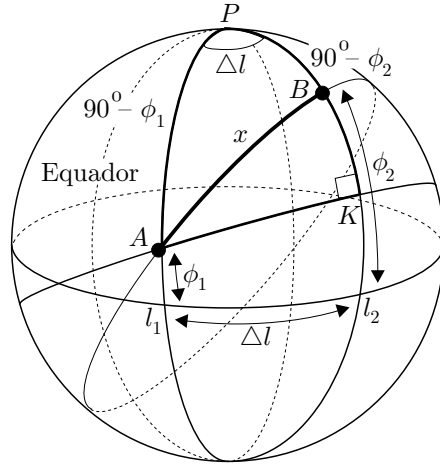
és a dir,

$$\frac{\sin 90^\circ}{\cos a} = \frac{\sin 90^\circ}{\cos h} \cdot \frac{\cos b}{\sin 90^\circ}.$$

D'on resulta l'última de les igualtats demanades,

$$\boxed{\cos h = \cos a \cdot \cos b.}$$

5.7.2.i Sigui P el pol nord. Un cop traçat l'arc AK perpendicular al meridià PB , treballarem amb els triangles rectangles AKP i AKB . Volem calcular l'arc $x = \widehat{AB}$ amb l'ajut de totes les dades que hem representat al gràfic adjunt.



Per la fórmula (477) de l'activitat anterior aplicada als triangles AKB i AKP tenim,

$$\cos x = \cos(\widehat{AK}) \cdot \cos(\widehat{BK}) \quad (9.10)$$

$$\cos(90^\circ - \phi_1) = \cos(\widehat{AK}) \cdot \cos(\widehat{PK}). \quad (9.11)$$

Per tant,

$$\cos x = \frac{\sin \phi_1}{\cos(\widehat{PK})} \cdot \cos(\widehat{BK}).$$

Però $\widehat{BK} = \widehat{PK} - (90^\circ - \phi_2)$, o bé, $\widehat{BK} = (90^\circ - \phi_2) - \widehat{PK}$. En els dos casos si utilitzem la fórmula de $\cos(a - b)$, obtenim

$$\cos(\widehat{BK}) = \cos(\widehat{PK}) \cdot \sin \phi_2 + \sin(\widehat{PK}) \cdot \cos \phi_2.$$

Llavors, de les dues últimes igualtats trigonomètriques, obtenim

$$\cos x = \sin \phi_1 \cdot (\sin \phi_2 + \tan(\widehat{PK}) \cos \phi_2).$$

Ara bé, per la fórmula (9.9) de l'activitat anterior, aplicada al triangle AKP , podem escriure

$$\tan(\widehat{PK}) = \tan(90^\circ - \phi_1) \cdot \cos(\Delta l) = \frac{\cos \phi_1}{\sin \phi_1} \cdot \cos(\Delta l).$$

De les dues últimes igualtats, obtenim que $x = \widehat{AB}$ és l'angle que satisfà

$$\cos x = \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \cdot \cos(\Delta l). \quad (9.12)$$

5.7.2.ii

$$\left. \begin{array}{l} \text{Barcelona} \longleftrightarrow B(2^\circ 9'E, 41^\circ 24'N) \\ \text{Tarragona} \longleftrightarrow T(1^\circ 17'E, 41^\circ 5'N) \end{array} \right\} \implies \Delta l = 2^\circ 9' - 1^\circ 17' = 52'.$$

Apliquem la fórmula (9.12) per mesurar l'arc de cercle màxim entre dos punts, trobada a l'apartat anterior, i obtenim

$$\cos x = \sin 41^\circ 5' \cdot \sin 41^\circ 24' + \cos 41^\circ 5' \cdot \cos 41^\circ 24' \cdot \cos 52' \approx 0.9992.$$

Per tant,

$$x = 0^\circ 43' 28.3'' \implies d(B, T) = \frac{0^\circ 43' 28.3'' \cdot \pi}{180^\circ} \cdot 6367 \text{ km} = 80.51 \text{ km}.$$

5.7.2.iii Anomenem M el punt de latitud màxima de la trajectòria. En considerar els punts N_Y i T de la mateixa latitud, el punt M es troba en el punt mitjà de l'arc d'extremes N_Y i T , i el triangle PMN_Y és rectangle en M . Així tenim:

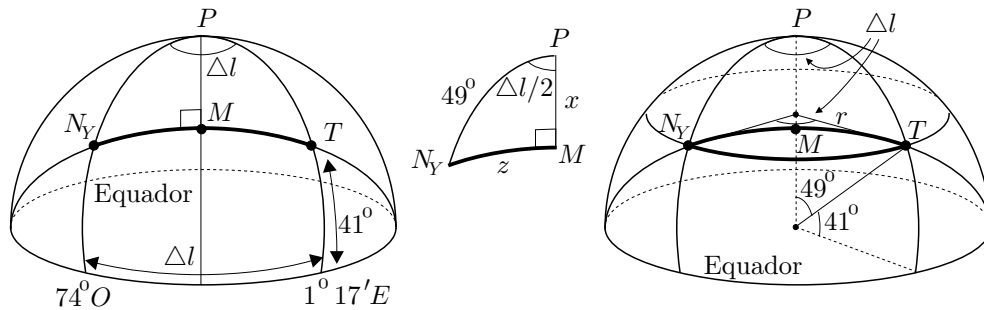
$$PN_Y = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ, \quad \frac{\Delta l}{2} = \frac{74^\circ + 1^\circ 17'}{2} = 37^\circ 48' 30''.$$

Llavors, anomenem $x = \widehat{PM}$ i, mitjançant la fórmula (9.9), obtenim

$$\tan x = \tan 49^\circ \cdot \cos 37^\circ 48' 30'' = 0.9109 \implies x = 42^\circ 19' 51''.$$

Per tant, la latitud màxima $\phi_M = 90^\circ - x$ del punt M és

$$\phi_M = 90^\circ - 42^\circ 19' 51'' = 47^\circ 40' 9''.$$



Quant a la comparació de distàncies entre N_Y i T , si r és el radi del paral·lel 41° , tenim que seguint el:

Paral·lel

$$\text{distància} = r \cdot \frac{\Delta l}{180^\circ} \cdot \pi = 6367 \cdot \sin 49^\circ \cdot \frac{75^\circ 17'}{180^\circ} \cdot \pi = 6313.80 \text{ km}$$

Arc mínim

$$\cos(N_Y M) = \sin^2 41^\circ + \cos^2 41^\circ \cdot \cos 75^\circ 17' \approx 0.5751108 \implies N_Y \widehat{M} = 54^\circ 53' 33''.$$

Per tant,

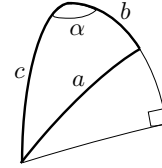
$$\text{distància} = 6367 \cdot \frac{54^\circ 53' 33''}{180^\circ} \cdot \pi = 6099.95 \text{ km}.$$

5.7.2.iv Aquest apartat és totalment equivalent al primer apartat. L'únic que hem de fer és substituir x per a , $90^\circ - \phi_1$ per c , $90^\circ - \phi_2$ per b , i Δl per α . Llavors l'equació (9.12) queda,

$$\cos a = \sin(90^\circ - c) \cdot \sin(90^\circ - b) + \cos(90^\circ - c) \cdot \cos(90^\circ - b) \cdot \cos(\alpha).$$

És a dir,

$$\cos a = \cos c \cdot \cos b + \sin c \cdot \sin b \cdot \cos \alpha.$$

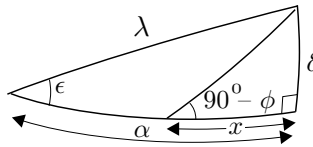


5.7.3 Utilitzem la representació simbòlica següent,

ϕ : latitud geogràfica	λ : longitud eclíptica	ϵ : obliqüitat eclíptica
α : ascensió recta	$\alpha - x$: ascensió oblíqua	δ : declinació

Utilitzem les igualtats trigonomètriques:

$$\sin \delta = \sin \lambda \cdot \sin \epsilon, \quad \sin \alpha = \frac{\tan \delta}{\tan \epsilon}, \quad \sin x = \frac{\tan \delta}{\tan(90^\circ - \phi)}.$$



Llavors, per a $\phi = 8^\circ 25'$ i $\lambda = 50^\circ$, obtenim

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin 50^\circ \cdot \sin 23^\circ 5' 20'' \implies \delta = 18^\circ 2' 53'' \\ \sin \alpha &= \frac{\tan 18^\circ 2' 53''}{\tan 23^\circ 5' 20''} \implies \alpha = 47^\circ 27' 51'' \\ \sin x &= \tan 18^\circ 2' 53'' \cdot \tan 8^\circ 25' \implies x = 2^\circ 45' 49'' \\ \alpha - x &= 47^\circ 27' 51'' - 2^\circ 45' 49'' = 44^\circ 42' 2''. \end{aligned}$$

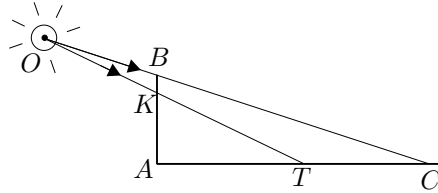
Per al cas $\phi = 16^\circ 27'$ i $\lambda = 30^\circ$, obtenim

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin 30^\circ \cdot \sin 23^\circ 5' 20'' \implies \delta = 11^\circ 39' 59'' \\ \sin \alpha &= \frac{\tan 11^\circ 39' 59''}{\tan 23^\circ 5' 20''} \implies \alpha = 27^\circ 50' 7'' \\ \sin x &= \tan 11^\circ 39' 59'' \cdot \tan 16^\circ 27' \implies x = 3^\circ 29' 43'' \\ \alpha - x &= 27^\circ 50' 7'' - 3^\circ 29' 43'' = 24^\circ 20' 24''.\end{aligned}$$

Observem que totes les dades coincideixen amb les de les taules, excepte l'ascensió oblíqua del primer cas, en què les taules proporcionen $44^\circ 43'$.

5.8.1 Observem que es produeix una configuració plana de Menelau. El teorema de Menelau diu que:

$$\frac{AT}{TC} = \frac{AK}{KB} \cdot \frac{OB}{OC}.$$



En ser $\widehat{BAC} = 90^\circ$, pel teorema de Pitàgores tenim

$$BC^2 = AB^2 + AC^2, \quad \text{és a dir} \quad BC = \sqrt{9^2 + 40^2} = 41.$$

Per tant,

$$\frac{35}{5} = \frac{8}{1} \cdot \frac{OB}{OB + 41}.$$

És a dir, $7 \cdot (OB + 41) = 8 \cdot OB$. Per tant $OB = 287$ m.

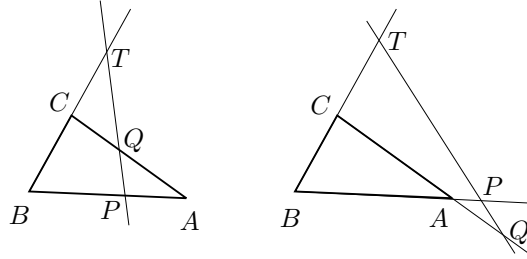
5.8.2 Sigui el cas en què P i Q són interiors. Considerem la intersecció T entre la recta per BC i la recta PQ . Llavors, apliquem la primera relació de Menelau a la configuració de l'esquerra del gràfic, i obtenim

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QC} \cdot \frac{TC}{TB}.$$

És a dir que el punt R de l'enunciat i el punt T pertanyen a la recta per BC i compleixen,

$$\frac{RC}{RB} = \frac{TC}{TB} \quad \text{i són exteriors al segment } BC.$$

En haver-hi un sol punt amb aquestes propietats, serà $R = T$ i aquest cas està demostrat.



En el segon cas, —el de la dreta del gràfic—, considerem T igual que abans. Apliquem la segona relació de Menelau a la configuració i obtenim

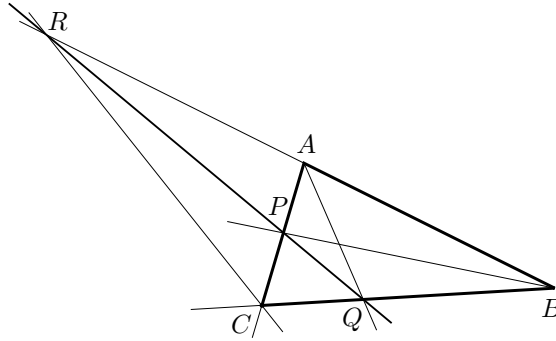
$$\frac{TB}{TC} = \frac{PB}{PA} \cdot \frac{QA}{QC}.$$

És a dir,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QC} \cdot \frac{TC}{TB}.$$

Llavors, per la mateixa argumentació que abans, R i T han de coincidir.

5.8.3 Siguin el triangle ABC , les bisectrius interiors AQ i BP , i la bisectriu exterior CR .



Pel teorema de la bisectriu, —VI.3 dels *Elements*—, es compleix

$$\frac{PC}{PA} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{QC}{QB} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{BR}{AR} = \frac{BC}{AC}.$$

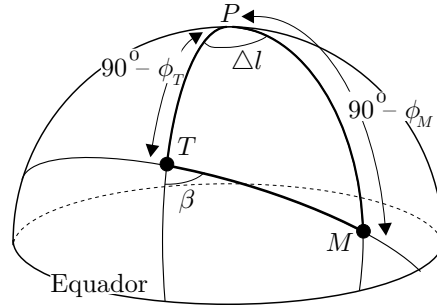
Per tant,

$$\frac{PC}{PA} = \frac{BC}{BA} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{BR}{AR} \cdot \frac{QC}{QB}.$$

Llavors, pel recíproc del teorema de Menelau, tenim que P , R i Q estan alineats.

Per a la visualització amb el CABRI, vegeu el fitxer `Apteme.FIG`.

5.9.1 Considerem els dos punts $T(1^\circ 17'E, 41^\circ 5'N)$, i $M(39^\circ 54'E, 21^\circ 30'N)$. Es tracta de calcular l'angle $\beta = 180^\circ - \widehat{MTP}$ de la figura.



Utilitzarem la fórmula (5.10), trobada a l'activitat 5.7.2, dues vegades sobre el triangle MTP .¹¹

$$\cos(TM) = \cos(TP) \cdot \cos(MP) + \sin(TP) \cdot \sin(MP) \cdot \cos(\Delta l).$$

Llavors,

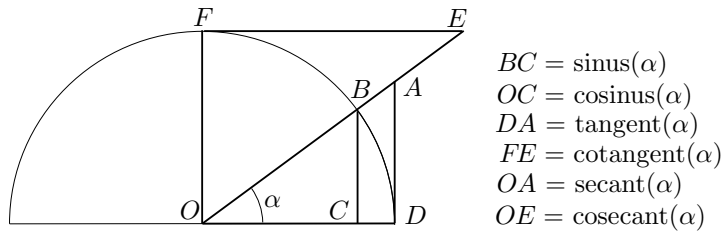
$$\begin{aligned} \cos(TM) &= \cos(48^\circ 55') \cdot \cos(68^\circ 30') + \sin(48^\circ 55') \cdot \sin(68^\circ 30') \cdot \cos(38^\circ 37') \\ &= 0.7888807. \end{aligned}$$

D'aquí surt, $TM = 37^\circ 55' 33''$, i per tant,

$$\cos(180^\circ - \beta) = \frac{\cos(MP) - \cos(TP) \cdot \cos(MT)}{\sin(TP) \cdot \sin(MT)} = -0.3278036.$$

O sigui que $\beta = 180^\circ - 109^\circ 8' 8'' = 70^\circ 51' 52''$.

5.9.2 Pels teoremes de semblança de triangles, i pel teorema de Pitàgores es compleix,

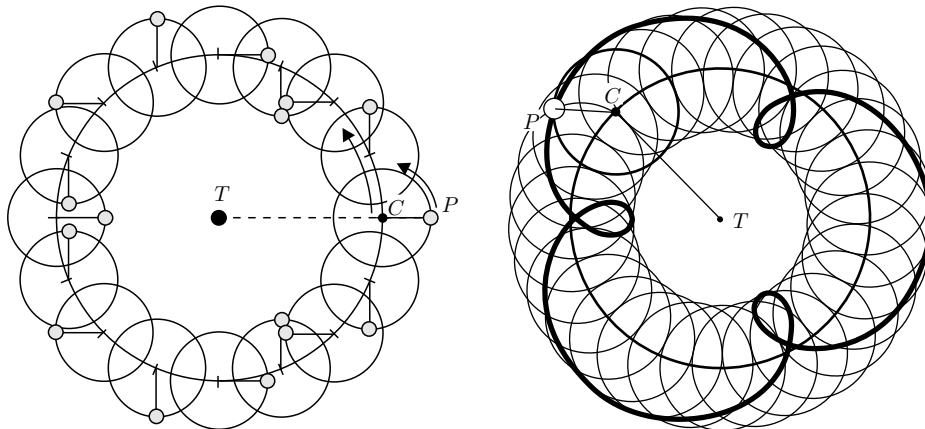


¹¹La segona part dels càlculs es podria simplificar una mica amb la llei dels sinus en un triangle esfèric, però no l'hem presentat.

$$\begin{aligned}
 OAD \sim OBC &\implies \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} \implies \frac{\sec \alpha}{1} = \frac{1}{\cos \alpha} \implies \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}. \\
 OAD \sim OBC &\implies \frac{AD}{OD} = \frac{BC}{OC} \implies \frac{\tan \alpha}{1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \implies \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \\
 EOF \sim OBC &\implies \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{BC} \implies \frac{\csc \alpha}{1} = \frac{1}{\sin \alpha} \implies \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}. \\
 EOF \sim OAD &\implies \frac{FE}{OF} = \frac{OD}{AD} \implies \frac{\cot \alpha}{1} = \frac{1}{\tan \alpha} \implies \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}. \\
 OCB \text{ rectangle} &\implies BC^2 + OC^2 = OB^2 \implies \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \\
 ODA \text{ rectangle} &\implies OD^2 + AD^2 = OA^2 \implies 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha. \\
 EFO \text{ rectangle} &\implies OF^2 + FE^2 = OE^2 \implies 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

5.9.3 Vegeu els fitxers `Fsinus.FIG` i `Ftrin.FIG`.

5.10.1.i Per fer la construcció de les setze posicions de C cal dividir la circumferència en setze parts iguals. Un cop fet això caldrà desplaçar sobre l'epicicle, el planeta Mercuri P , 90° respecte la posició anterior —si considerem que l'epicicle no gira al voltant del seu centre C i que només ho fa el planeta—. Si considereu que l'epicicle gira al voltant del seu centre C , igual que C al voltant de T , llavors només cal desplaçar P l'angle $90^\circ - \frac{360^\circ}{16} = 67^\circ 30'$, entre cada dues posicions consecutives. Vegeu la figura de l'esquerra.

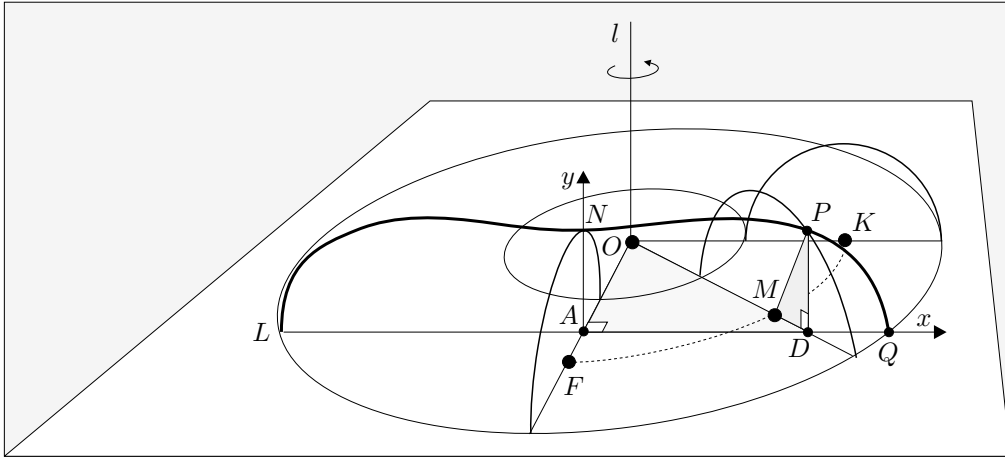


5.10.1.ii Vegeu els fitxers `Incorb.FIG`, `Incorb2.FIG`, `Incorb3.FIG`, `Epicic.MTH` i la figura de la dreta.

5.10.2 Vegeu el fitxer `Grtrig.MTH`.

9.6 Activitats del capítol 6

6.1.1.i Treballem amb la secció de paràmetre $OA = \lambda$. Si utilitzem el teorema de Pitàgores en els triangles MDP i OAD , i el valor del quadrat d'una diferència, obtenim



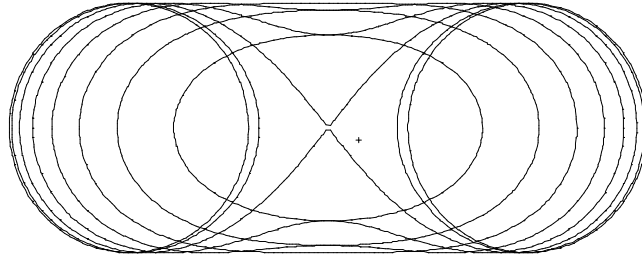
$$\begin{aligned}
 y^2 &= PD^2 = PM^2 - MD^2 = PM^2 - (OD - OM)^2 = \\
 &= r^2 - (OD^2 + R^2 - 2 \cdot (OD \cdot OM)) = \\
 &= r^2 - (OA^2 + AD^2 + R^2 - 2 \cdot \sqrt{OA^2 + AD^2} \cdot R) = \\
 &= r^2 - (\lambda^2 + x^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot \sqrt{\lambda^2 + x^2}).
 \end{aligned}$$

És a dir que la família de corbes es pot expressar,

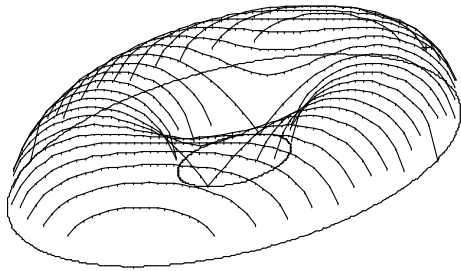
$$y^2 = r^2 - R^2 - \lambda^2 - x^2 + 2 \cdot R \cdot \sqrt{\lambda^2 + x^2}, \quad \lambda \in [-R - r, R + r]. \quad (9.13)$$

6.1.1.ii Vegeu els fitxers `Spiric1.FIG` i `Spiric2.FIG`.

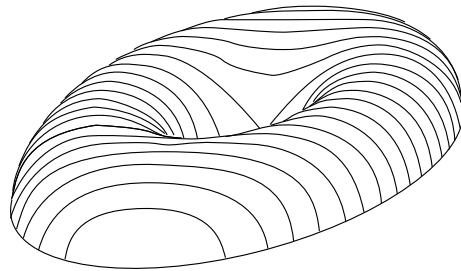
6.1.1.iii Vegeu el fitxer `Spiric.MTH` en què la funció `PRSPORT(RG, RP, n)` proporciona la primera família demanada, que es pot visualitzar en un exemple com en el gràfic adjunt.



En el mateix fitxer, la funció `SPIRICPR(RG, RP, n, p)` proporciona el còmput de la família de seccions en perspectiva cavallera. A la figura adjunta teniu una visualització del `DERIVE`, posteriorment retocada amb el `COREL DRAW`.



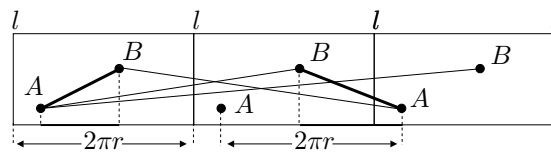
Seccions espíriques amb `DERIVE`



Seccions espíriques retocades amb `COREL`

6.2.1 Vegeu el fitxer `Quadc.FIG`.

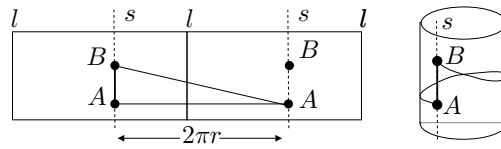
6.2.2.i Siguin A i B els dos punts del cilindre dels quals cerquem la línia més curta, sobre la superfície, que els conté. Considerem una regió del cilindre que els contingui, delimitada per dues seccions circulars. Tallem aquesta regió seguint una generatriu l , i la despleguem. Obtenim un rectangle i posem còpies diverses una a continuació de l'altra. Ara, la distància entre els dos punts A i B es pot estudiar sobre aquestes còpies planes i fer-ne la traducció sobre el cilindre.



Partim del fet que la distància més curta sobre dos punts del pla ve determinada per l'única recta que els conté. El primer problema que ens trobem consisteix a que es pot anar des de A fins a B seguint moltes línies rectes, com podem veure en el gràfic adjunt. Imaginem un punt i la generatriu que el conté movent-se des de A fins a B . Llavors, la generatriu dóna menys o més d'una volta, segons quin sigui el segment AB escollit sobre les còpies del desplegament pla. Així, de

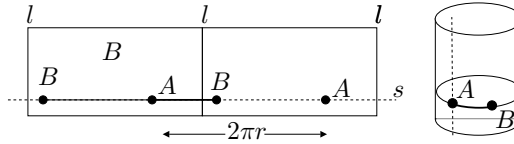
tots els segments que uneixen A i B , interessa observar aquells tals que la seva projecció sobre la base del rectangle és menor o igual que $2\pi r$, perquè els altres casos proporcionen projeccions més llargues i, per tant, distàncies més llargues. Dividim l'estudi en tres casos:

- (1) A i B pertanyen a una recta s paral·lela a la generatriu l . La distància més curta pot ser la determinada pel catet o la determinada per la hipotenusa del triangle rectangle de la figura.



Pel teorema de Pitàgores, la primera és més curta. O sigui que la línia més curta és el segment AB sobre la generatriu s , i la distància entre A i B és la longitud d'aquest segment.

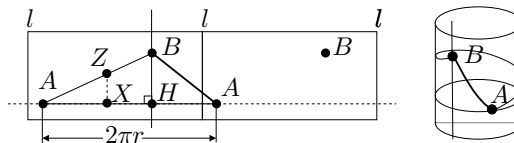
- (2) A i B pertanyen a una recta s perpendicular a la generatriu l en el desplegament pla.



Llavors, aquesta és l'única recta que conté aquests punts. Això vol dir que, sobre el cilindre, la línia més curta es troba sobre una secció perpendicular a la generatriu, és a dir sobre la circumferència que conté A i B , i

$$\text{distància}(A, B) = \min\{\widehat{AB}, 2\pi r - \widehat{AB}\}.$$

- (3) En qualsevol altre cas considerem els triangles rectangles ABH , d'hipotenusa AB i un catet BH paral·lel a la generatriu.



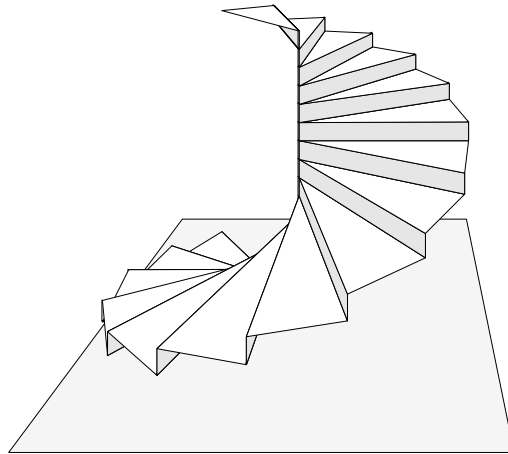
Llavors per a tot punt Z que pertany a la recta AB es compleix

$$\frac{ZX}{XA} = \frac{BH}{HA} = \text{constant},$$

en què X és la projecció de Z sobre la recta AB , és a dir sobre la secció circular del cilindre que conté el punt A . Llavors, per la definició d'hèlice circular, els punts del segment AB es troben sobre una hèlice, que serà la línia més curta. Hi ha dues possibilitats que depenen de l'orientació de l'hèlice, i s'ha de triar aquella tal que AB sigui mínim. És a dir,

$$\text{distància}(A, B) = \min \left\{ \sqrt{\widehat{AH}^2 + BH^2}, \sqrt{(2\pi r - \widehat{AH})^2 + BH^2} \right\}.$$

6.2.2.ii Vegeu els fitxers *Helice.FIG*, *Plectoide.FIG* i *Hipias.FIG*. Per a l'escala de cargol vegeu el fitxer *Escargol.FIG* del qual us presentem una visualització.



6.3.1.i Vegeu el fitxer *LlunaH31.FIG*.

6.3.1.ii Si apliquem el teorema del sinus al triangle MBN obtenim

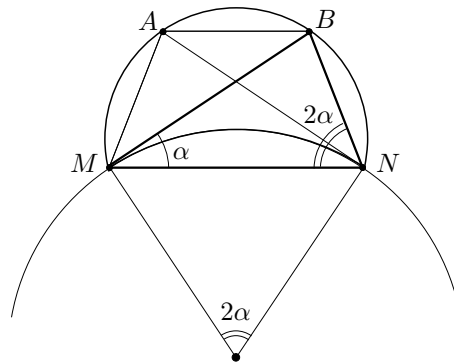
$$\frac{BN}{\sin \alpha} = \frac{MN}{\sin(\pi - 3\alpha)}.$$

Llavors, en ser $MN^2 = 3 \cdot BN^2$, l'angle α compleix

$$\frac{\sin(3\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{MN}{BN} = \sqrt{3}$$

Si desenvolupem $\sin(3\alpha)$, aquesta equació equival a

$$3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha.$$



Si dividim per $\sin \alpha$, i ho expressem en funció del cosinus, resulta

$$4 \cos^2 \alpha - 1 = \sqrt{3}.$$

D'aquí obtenim,

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \implies \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

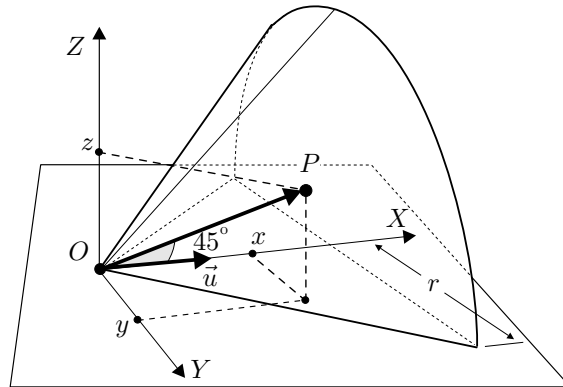
Per a aquest valor del cosinus, la calculadora proporciona:

$$\text{angle central } (\widehat{AB}) = \text{angle central } (\widehat{MN}) = 2\alpha = 68.5293^\circ = 62^\circ 31' 45'',$$

el qual coincideix amb el que ha mesurat l'eina **Mesura d'angles** del CABRI.

6.3.2 Vegeu el fitxer **LlunesT5.FIG**.

6.4.1.i Con rectangle: En ser el con rectangle, qualsevol punt $P(x, y, z)$ del con, està caracteritzat per la condició que els vectors \overrightarrow{OP} i $\vec{u} = (1, 0, 0)$, formen una angle igual a 45° .



Això es pot traduir en llenguatge de producte escalar,

$$\cos 45^\circ = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\vec{u}|}.$$

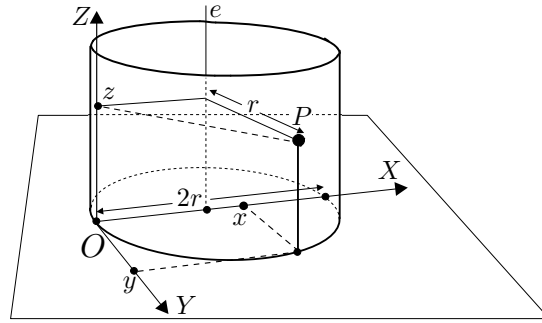
L'expressió corresponent en coordenades és

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(x, y, z) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Consegüentment, si efectuem el producte i elevem al quadrat,

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = x^2 \implies x^2 = y^2 + z^2.$$

Cilindre: La generatriu del cilindre recorre la circumferència de centre $(r, 0, 0)$ i radi r . És a dir, que la distància de qualsevol punt $P(x, y, z)$ d'aquest cilindre al seu eix de rotació e , és constant i igual a r .



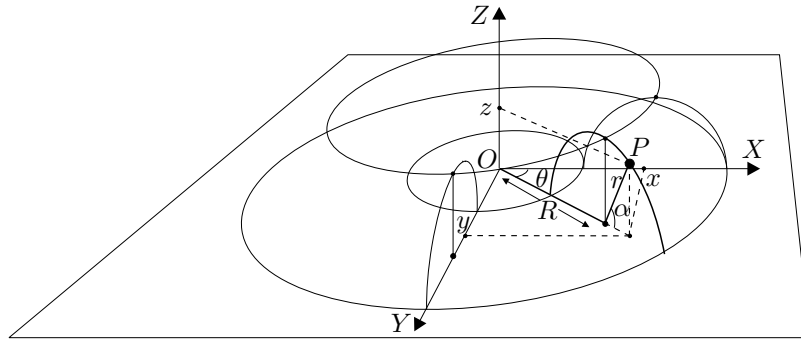
Llavors, impossem l'última condició i resulta,

$$r = \text{distància}(P, e) = |(x, y, z) - (r, 0, z)| = \sqrt{(x - r)^2 + y^2 + 0^2}.$$

Finalment, si elevem al quadrat i simplifiquem, obtenim

$$x^2 + y^2 = 2rx.$$

Tor: Del gràfic adjunt podrem obtenir les equacions d'un tor qualsevol de radis R i r en els paràmetres θ i α ; després caldrà fer $R = r$, eliminar θ i α , i tindrem l'equació del tor cercada. Observem que per a qualsevol punt $P(x, y, z)$ del tor es compleix



$$\begin{cases} x = (R + r \cos \alpha) \cos \theta \\ y = (R + r \cos \alpha) \sin \theta \\ z = r \sin \alpha \end{cases} \quad (R=r) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = r \cos \theta (1 + \cos \alpha) \\ y = r \sin \theta (1 + \cos \alpha) \\ z = r \sin \alpha. \end{cases}$$

Llavors,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2(1 + \cos \alpha)^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2(1 + \cos \alpha)^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2(1 + \cos \alpha)^2 + r^2 \sin^2 \alpha = 2r^2(1 + \cos \alpha). \end{aligned}$$

Si finalment eliminem el paràmetre α de les dues equacions, obtenim

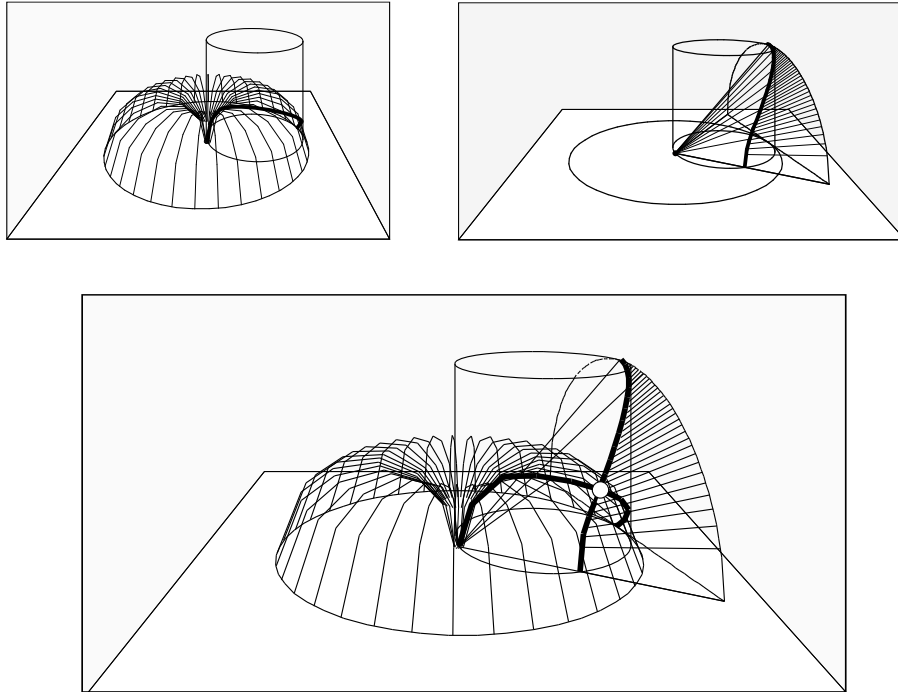
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4r^4(1 + \cos \alpha)^2 = 4r^2 \cdot r^2(1 + \cos \alpha)^2 = 4r^2(x^2 + y^2),$$

és a dir,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4r^2(x^2 + y^2).$$

6.4.1.ii Vegeu els fitxers `Conrect.FIG`, `Cilin.FIG`, `Tor.FIG`, `Concilin.FIG`, `Torcilin.FIG`, `Arquites.FIG` i `Arquite2.FIG`.

Adjuntem les imatges, tretes de `Concilin.FIG`, `Torcilin.FIG` i `Arquite2.FIG`, de les interseccions tor-cilindre, con-cilindre i tor-con-cilindre.

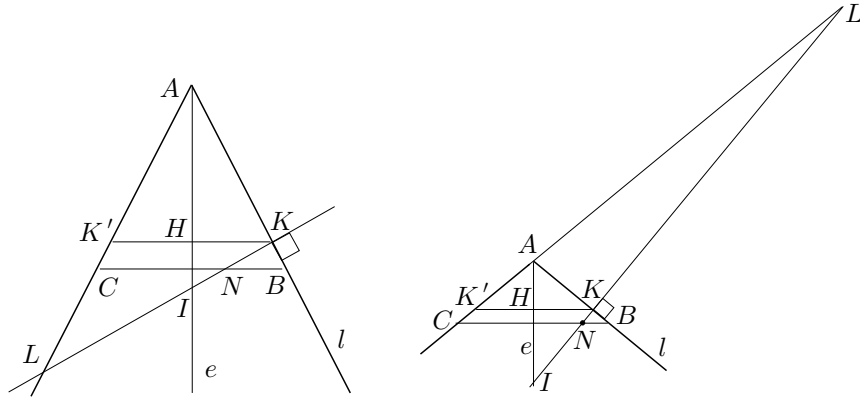


6.5.1 A partir de les semblances de triangles,

$$KBN \sim HIK \quad \text{i} \quad LNC \sim LKK' \quad \text{obtenim} \quad \frac{BN}{KN} = \frac{KI}{HK} \quad \text{i} \quad \frac{CN}{LN} = \frac{2HK}{KL}.$$

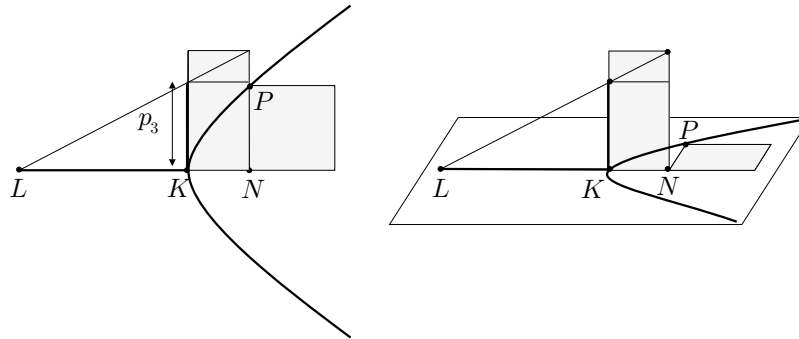
Llavors, de la propietat del punt P sobre la circumferència de diàmetre BC ,

$$PN^2 = BN \cdot NC = \frac{KN}{HK} KI \cdot \frac{LN}{KL} 2KH = \frac{2KI}{KL} KN \cdot LN.$$



6.5.2 Vegeu els fitxers `Ellip01.FIG`, `Parab01.FIG` i `Hiper01.FIG`. Adjuntem el gràfic per al cas de la hipèrbola, en què els seus punts P satisfan

$$PN^2 = p_3 \cdot KN + \frac{p_3}{KL} KN \cdot KN.$$



6.6.1 Vegeu el fitxer `Seccon.FIG`.

6.6.2 Vegeu els fitxers `Ellip02.FIG`, `Parab02.FIG` i `Hiper02.FIG`, i també els fitxers `Elliaipo.FIG`, `Elliaipo.MAC`, `Paraaipo.FIG`, `Paraaipo.MAC`, `Hipeaipo.FIG` i `Hipeaipo.MAC`.

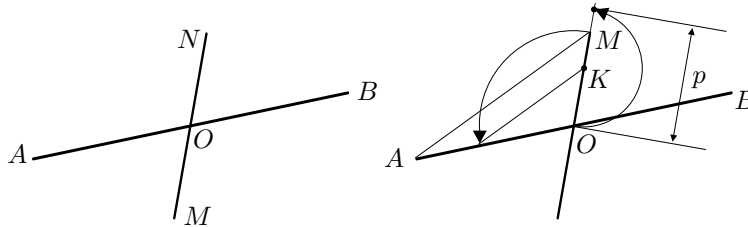
6.6.3.i Siguin AB i MN els diàmetres conjugats, i O el seu punt de tall. En ser N un punt de l'el·lipse i NO la seva ordenada respecte del diàmetre AB , es compleix

$$NO^2 = p \cdot AO - \frac{p}{AB} AO \cdot AO = \left(p - \frac{p}{AB} AO\right) \cdot AO = \frac{p}{2} \cdot AO.$$

en què p és el paràmetre. Llavors,

$$\frac{AO}{NO} = \frac{NO}{p/2}.$$

i, per tant, $p/2$ és la tercera proporcional del semidiàmetre AO i el semidiàmetre NO .



Consegüentment, el procediment per construir el paràmetre p consistirà en traçar el doble de la tercera proporcional $OK = \frac{p}{2}$ dels diàmetres AO i NO .

6.6.3.ii Vegeu els fitxers Dcelli.FIG i Dcelli.MAC.

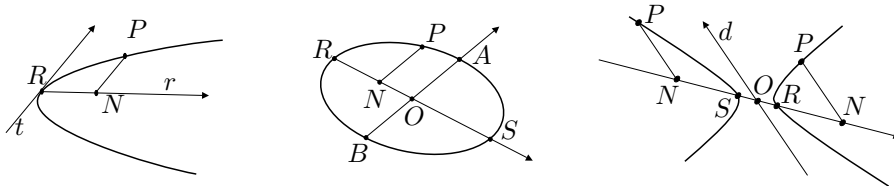
6.6.4 Paràbola: Recordem que, si R és el vèrtex, per a qualsevol punt P de la paràbola la seva ordenada PN compleix

$$PN^2 = p \cdot RN, \quad (9.14)$$

en què p és el paràmetre. Ara, si com hem dit, prenem el vèrtex R com a origen de coordenades, el diàmetre r com a eix d'abscisses, i la recta tangent t pel punt R com a eix d'ordenades, tenim $PN = |y|$ i $RN = x$. Llavors la igualtat (9.14) es converteix en

$$y^2 = p \cdot x,$$

la qual és l'equació reduïda de la paràbola.



El·lipse: Sigui RS un diàmetre i AB el seu diàmetre conjugat. Per a qualsevol punt P de l'el·lipse la seva ordenada PN compleix

$$PN^2 = p \cdot RN - \frac{p}{RS} RN \cdot RN, \quad (9.15)$$

en què, si O és el centre, p és el paràmetre que compleix

$$AO^2 = p \cdot RO - \frac{p}{RS} RO \cdot RO.$$

És a dir,

$$AO^2 = \left(p - \frac{p}{2}\right) RO = \frac{p}{2} RO.$$

Llavors, si prenem el centre O com a origen de coordenades, la recta per RS com a eix d'abscisses, i la recta per AB com a eix d'ordenades, tenim $PN = |y|$ i $RN = x + RO$. Per tant, la igualtat (9.15) es converteix en

$$y^2 = \frac{2AO^2}{RO}(x + RO) - \frac{2AO^2}{2RO^2}(x + RO)^2.$$

Si completem quadrats, resulta

$$\left(\frac{AO}{RO}(x + RO) - AO\right)^2 + y^2 = AO^2.$$

Finalment simplifiquem i obtenim

$$\left(\frac{AO}{RO}x\right)^2 + y^2 = AO^2, \quad \text{és a dir,} \quad \frac{x^2}{RO^2} + \frac{y^2}{AO^2} = 1,$$

la qual és l'equació reduïda de l'el·lipse en què RO i AO són els semidiàmetres conjugats.

Hipèrbola: Sigui RS un diàmetre i d el seu diàmetre conjugat. Per a qualsevol punt P , de la branca que conté R de la hipèrbola, la seva ordenada PN compleix

$$PN^2 = p \cdot RN + \frac{p}{RS} RN \cdot RN, \quad (9.16)$$

en què, p és el paràmetre que no determinem. Si és de la branca que conté S , només cal substituir RN per SN . Llavors, si prenem el centre O com a origen de coordenades, la recta per RS com a eix d'abscisses, i la recta d com a eix d'ordenades, tenim $PN = |y|$ i RN o $SN = |x| - RO$. La igualtat (9.16) es pot escriure

$$y^2 = p(|x| - RO) + \frac{p}{2RO}(|x| - RO)^2,$$

Si multipliquem per $\frac{p}{2RO}$ i completem quadrats, resulta

$$\left(\frac{p}{2RO}(|x| - RO) + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p}{2RO}y^2 = \frac{p^2}{4}.$$

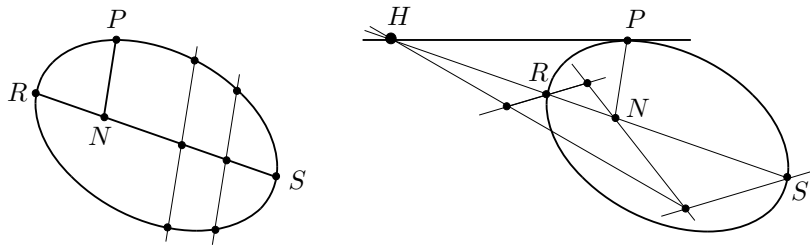
Finalment simplifiquem i obtenim

$$\left(\frac{p}{2RO}x\right)^2 - \frac{p}{2RO}y^2 = \frac{p^2}{4}, \quad \text{és a dir,} \quad \frac{x^2}{RO^2} - \frac{y^2}{p \cdot RO/2} = 1.$$

la qual és l'equació reduïda de la hipèrbola.

6.6.5.i Per traçar una tangent per un punt P de la cònica, a partir del teorema I.34, construïm:

- Un diàmetre RS a partir dels punts mitjans de dues cordes paral·leles qualssevol en el cas de l'el·lipse, i de dues cordes paral·leles d'una mateixa branca en el cas de la hipèrbola.
- El diàmetre conjugat IJ a RS , mitjançant una paral·lela per M , —punt mitjà de RS —, a les cordes del pas anterior.
- L'ordenada PN al diàmetre RS , —la qual serà paral·lela a IJ —.



- El punt $H \neq N$ sobre la recta RS tal que

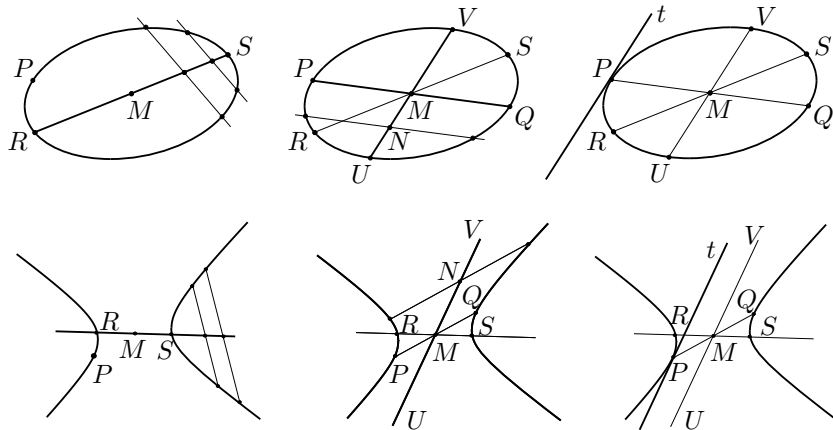
$$\frac{HR}{HS} = \frac{NR}{NS}.$$

És a dir el quart harmònic de R, S i N .

- La recta t per P i H , la qual és la tangent cercada.

Per fer-ho a partir del teorema I.47, construïm:

- Un diàmetre RS igual que abans
- El diàmetre PQ per P i el punt mitjà M de RS .

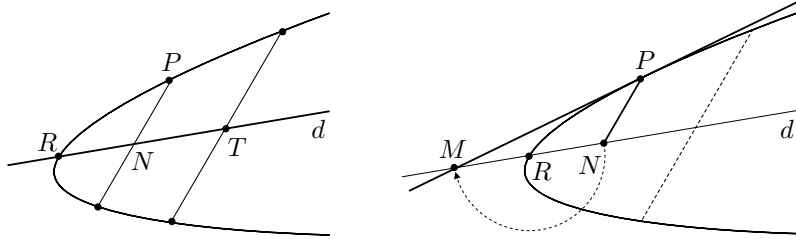


- El diàmetre conjugat UV de PQ , per M , i el punt mitjà N d'una corda paral·lela a PQ .
- La recta paral·lela t , per P , al diàmetre UV , la qual és la tangent cercada.

6.6.5.ii Per construir la macro utilitzarem el procediment elaborat a partir de I.47. Perquè es pugui utilitzar per a les el·lipses i hipèrboles, hem d'actuar una mica diferent per construir el centre M . El problema es que les cordes auxiliars que tracem en el primer pas no es pot assegurar que estiguin en la mateixa branca de la hipèrbola. La solució a aquesta dificultat és senzilla; només caldrà traçar dos diàmetres qualssevol de la cònica, a partir de dues parelles de cordes paral·leles, i M serà el seu punt de tall. La macro la trobareu en el fitxer `Ta_elli.MAC`, la qual ha estat elaborada en el fitxer `Ta_elli.FIG`.

6.6.6 Per traçar una tangent per un punt P d'una paràbola, a partir del teorema I.33, construïm:

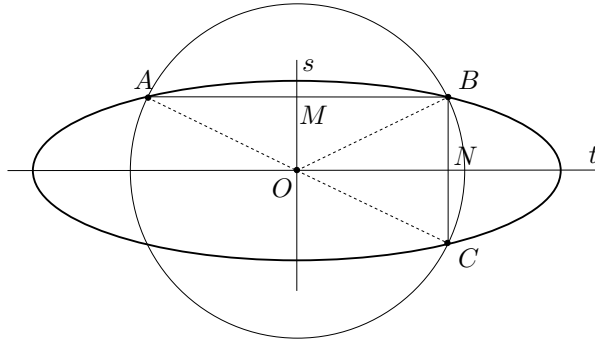
- Un diàmetre d pels punts mitjans N i T d'una corda per P i d'una corda paral·lela



- Sobre el diàmetre d , el punt M tal que el vèrtex R és punt mitjà dels punts M i N .
- La recta MP , la qual és la tangent cercada.

Per a la macro, vegeu el fitxer `Tanpar.FIG` i `Tan_par.MAC`.

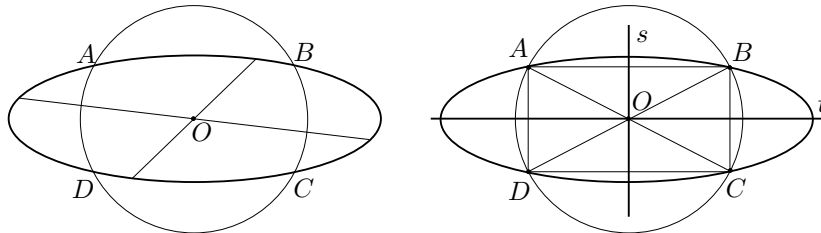
6.6.7.i Considerem el cas de la el·lipse, i fem una anàlisi que també serveix per a la hipèrbola. Suposem el problema resolt,



Siguin s i t els eixos. Tracem per un punt qualsevol A de la cònica, una corda AB paral·lela a t . Llavors, AB tallarà s en el punt M tal que $AM = MB$. Tracem, per B , una corda BC paral·lela a s . Llavors, BC tallarà t en el punt N tal que $BN = NC$.

Per la congruència dels triangles AMO , BMO i BNO , CNO , tenim que $AO = OB = OC$. Per tant, A , B i C pertanyen a la circumferència de centre O i radi OA . A més, s i t són les mediatrissus, respectivament de AB i BC . Aquí s'acaba l'anàlisi que proporciona el procediment següent:

- Determinem el centre O de la cònica tal com ho fem a l'activitat 6.6.5.



- Tracem una circumferència de centre O que talli la cònica en quatre punts A , B , C i D . És immediat demostrar que $ABCD$ és un rectangle. Efectivament, mirem-ho per a l'angle \widehat{BAD} .

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAO} + \widehat{AOD} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{AOB}) + \frac{1}{2}(\pi - \widehat{AOD}) = \quad (9.17)$$

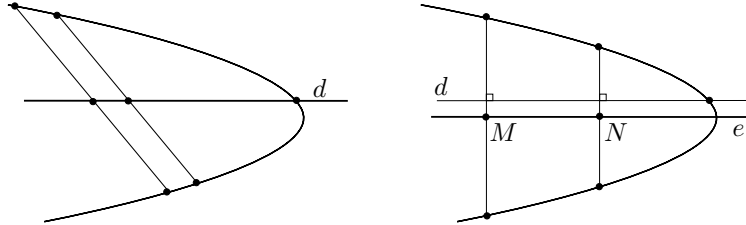
$$= \pi - \frac{1}{2}(\widehat{AOB} + \widehat{AOD}) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (9.18)$$

- Tracem les mediatrissus s i t dels costats AB i BC . Aquestes, en ser $ABCD$ un rectangle, tallen també CD i AD en els seus punts mitjans.

Llavors, s i t són diàmetres i, a més, en ser perpendiculars, són els eixos.

Per al cas de la paràbola, en ser tots els diàmetres paral·lels, les cordes que determinen l'eix seran perpendiculars a qualsevol diàmetre de la paràbola, i reciprocament. Per tant un procediment per construir l'eix consistirà a construir:

- Un diàmetre d qualsevol a partir dels punts mitjans de dues cordes paral·leles qualssevol.



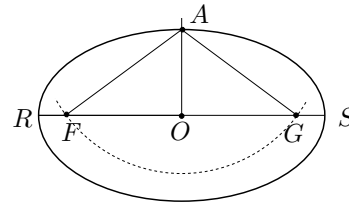
- Dues cordes perpendiculars a aquest diàmetre d .
- La recta que passa pels punts mitjans M i N d'aquestes dues últimes cordes, la qual serà l'eix e cercat.

6.6.7.ii Vegeu els fitxers `Paraeix.FIG`, `Paraeix.MAC`, `Ellieix.FIG` i `Ellieix.MAC`. Els dos últims tracten el cas de l'el·lipse i, per al cas de la hipèrbola proporcionen un dels eixos. L'altre eix s'haurà de traçar, perpendicularment pel centre.

6.6.8.i Si A és l'extrem del semieix menor, i suposem F i G construïts es compleix que

$$\text{III.52} \implies FA + GA = RS \implies 2FA = RS \implies FA = RO.$$

Per tant un procediment per construir els focus consisteix a obtenir-los com a punts d'intersecció de la circumferència (A, RO) amb la recta RS .



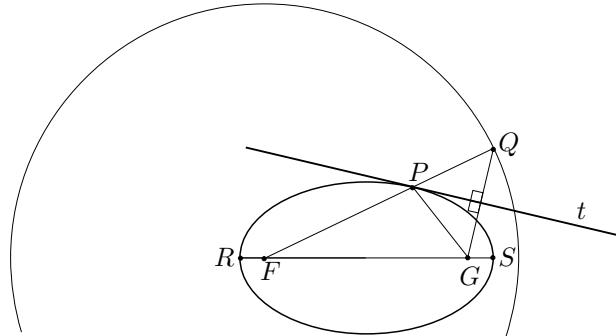
6.6.8.ii Vegeu els fitxers `Eixfoc.FIG` i `Eixfoc.MAC`.

6.6.8.iii Vegeu els fitxers `Ellifoc.FIG` i `Ellifoc.MAC`.

6.6.8.iv Vegeu el fitxer `Apo345.FIG`.

6.6.9.i Siguin F i G els focus, i RS l'eix major. Suposem l'el·lipse construïda. Sigui P un punt qualsevol de l'el·lipse i prolonguem FP fins a Q tal que $FQ = RS$. Llavors, Q descriu la circumferència (F, RS) quan P descriu l'el·lipse. A més, per III.52,

$$PQ = FQ - FP = RS - FP = FP + PG - FP = PG.$$



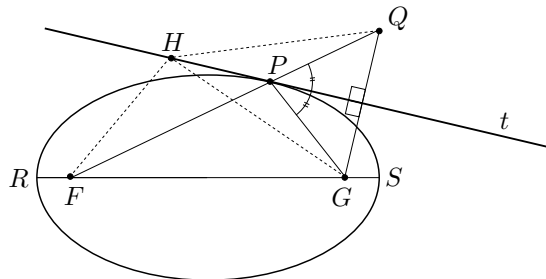
Això implica que qualsevol punt P de l'el·lipse, és la intersecció de la mediatriu de QG i la recta FQ . A més, és immediat que qualsevol punt que s'obtingui mitjançant aquesta intersecció mentre Q recorre la circumferència (F, RS) és de l'el·lipse. O sigui que, a partir dels focus F i G , i l'eix major RS podem establir el procediment següent per al traçat de l'el·lipse. Construïm:

- La circumferència (F, RS) .
- El segment $FQ = RS$ i la mediatriu t de GQ .
- La intersecció P , de FQ i t .

Llavors, el lloc geomètric de P , quan Q descriu la circumferència (F, RS) , és l'el·lipse cercada.

Per a una visualització i la macro vegeu els fitxers **Feixelli.FIG** i **Feixelli.MAC**.

6.6.9.ii Pel criteri de congruència de triangles C-C-C, la bisectriu exterior de \widehat{FPG} coincideix amb la mediatriu t de GQ , en què Q és tal com l'hem considerat a l'apartat anterior.



Aquesta mediatriu és tangent, perquè si no ho fos tallaria en un altre punt H a l'el·lipse que compliria,

$$FH + HQ = FH + HG = RS = FP + PG = FP + PQ = FQ.$$

Això no pot ser, perquè en ser FHQ un triangle es compleix $FH + HQ > FQ$.

6.6.9.iii Vegeu el fitxer `Ellirefl.FIG`. Si un segment de la trajectòria poligonal passa per un focus, el segment que el segueix passa per l'altre focus; el que segueix aquest torna a passar pel primer focus i així successivament. Que això és cert queda demostrat per la propietat de l'apartat anterior de la recta tangent.

6.6.10.i Presentem la recta variable r amb punt fix a O en la forma

$$x = \lambda \cdot \cos \alpha, \quad y = \lambda \cdot \sin \alpha,$$

en què $\lambda \in \mathbb{R}$, i α és l'angle entre la recta r i l'eix OA .

Així obtenim, en coordenades,

$$M(a \cdot \cos \alpha, a \cdot \sin \alpha) \quad \text{i} \quad N(b \cdot \cos \alpha, b \cdot \sin \alpha).$$

Per tant els punts que defineixen el lloc geomètric són

$$P = (x, y) = (a \cdot \cos \alpha, b \cdot \sin \alpha).$$

Aquests compleixen,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \alpha}{b^2} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

És a dir que totes les interseccions P pertanyen a l'el·lipse de semieixos OA i OB . A més, qualsevol punt (x, y) de l'el·lipse es pot obtenir d'aquesta manera:

- Per a $x \neq 0$, considerem la intersecció $(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ resultant d'aplicar el procediment a la recta r , en què α compleix $\tan \alpha = \frac{by}{ax}$.
- Per a $x = 0$ i $y = b$, considerem la intersecció $(a \cos 90^\circ, b \sin 90^\circ)$ que resulta de considerar r amb $\alpha = 90^\circ$.
- Per a $x = 0$ i $y = -b$, considerem la intersecció $(a \cos 270^\circ, b \sin 270^\circ)$ que resulta de considerar r amb $\alpha = 270^\circ$.

6.6.10.ii Vegeu el fitxer `Ellirc.FIG`.

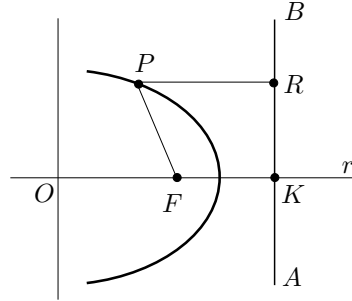
6.6.11.i Partim de la propietat focus directriu que podem escriure per a qualsevol punt P del lloc com

$$PF = e \cdot PR. \tag{9.19}$$

Sigui $K = r \cap AB$. En la referència indicada al'enunciat, les coordenades dels punts implicats són:

$$F(c, 0), K(k, 0), P(x, y), R(k, y).$$

Recordem que cerquem els elements de les còniques en funció de $d = d(F, AB)$ i $e = \frac{PF}{PR}$.



A partir de la igualtat 9.19 tenim l'equació del lloc,

$$\begin{aligned} PF = e \cdot PR &\iff e^2|k-x|^2 = ((x-c)^2 + y^2) \iff \\ &\iff k^2e^2 + e^2x^2 - 2ke^2x = x^2 + c^2 - 2cx + y^2 \iff \\ &\iff (1-e^2)x^2 + y^2 + 2(ke^2-c)x + c^2 - k^2e^2 = 0. \end{aligned}$$

Cas $e = 1$: Obtenim l'equació

$$y^2 + 2(k-c)x + c^2 - k^2 = 0.$$

Si triem la referència amb l'origen O tal que $c+k=0$, és a dir amb O com a punt mitjà de F i K tenim l'equació

$$y^2 = 4kx.$$

Llavors, en ser les ordenades perpendiculars i $d = 2k$, tenim que FK és un eix de la paràbola i el seu paràmetre és

$$\boxed{p = 2d}.$$

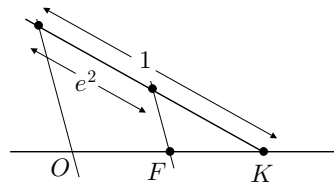
Cas $e < 1$: Si triem l'origen O de manera que $ke^2 - c = 0$, obtenim l'equació¹²

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = k^2e^2(1-e^2).$$

Aquesta es pot escriure

$$\frac{x^2}{k^2e^2} + \frac{y^2}{k^2e^2(1-e^2)} = 1.$$

¹² Això es pot aconseguir amb una construcció com la del gràfic adjunt.



Observem que $d = d(K, F) = k - c = k - ke^2 = k(1 - e^2)$. Llavors, el lloc geomètric per a $e < 1$ és l'el·lipse de semieix major

$$a = ke = \frac{de}{1 - e^2},$$

i paràmetre p tal que $\frac{pa}{2} = b^2 = k^2 e^2 (1 - e^2)$, és a dir

$$p = 2ed.$$

El semieix menor és $b = ke\sqrt{1 - e^2} = \frac{de}{\sqrt{1 - e^2}}$. L'hem utilitzat per a la representació de l'el·lipse, amb el CABRI, de l'apartat següent. Concretament per trobar el segment que recorre R sobre la directriu AB .

Cas $e > 1$: Triem l'origen O de manera que $ke^2 - c = 0$, i obtenim l'equació¹³

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 = k^2 e^2 (e^2 - 1),$$

la qual es pot escriure

$$\frac{x^2}{k^2 e^2} - \frac{y^2}{k^2 e^2 (e^2 - 1)} = 1.$$

Observem que, en aquest cas, $d = d(K, F) = c - k = ke^2 - k = k(e^2 - 1)$. Llavors, el lloc geomètric per a $e > 1$ és la hipèrbola de semieix

$$a = ke = \frac{de}{e^2 - 1},$$

i paràmetre p tal que $\frac{pa}{2} = b^2 = k^2 e^2 (e^2 - 1)$, és a dir

$$p = 2ed.$$

Resum: En general, donats un punt F , una recta AB que no el conté tal que $d = d(F, AB)$, i una raó e , els punts P tals que

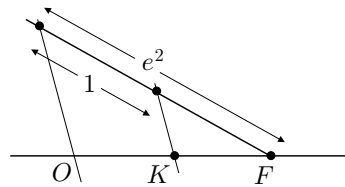
$$d(P, F) = e \cdot d(P, AB),$$

recorren una cònica de paràmetre $p = 2ed$ i,

- quan $e \neq 1$, d'eix $a = \frac{de}{|e^2 - 1|}$ sobre la recta perpendicular per F a AB ,
- quan $e = 1$, d'eix la recta perpendicular per F a AB .

6.6.11.ii Vegeu el fitxer Coniqfd.FIG.

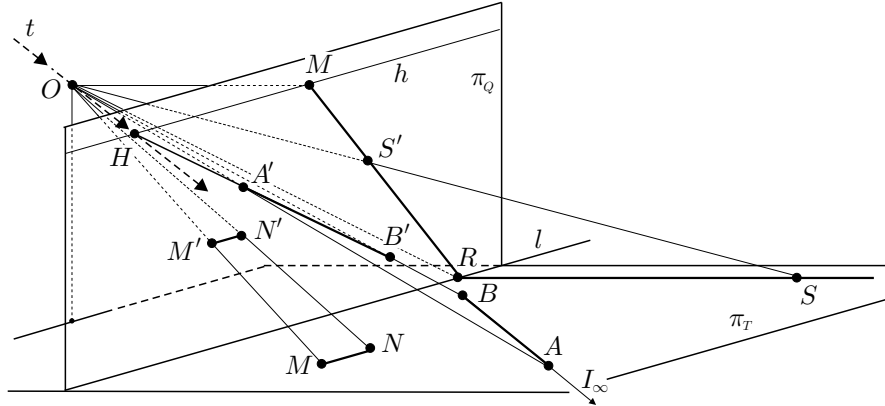
¹³ Igual que abans, es pot aconseguir amb una construcció com la del gràfic adjunt.



9.7 Activitats del capítol 7

7.1.1 Vegeu el fitxer Espeix.FIG.

7.2.1.i $P \in l \subset \pi_Q \implies \sigma(P) = OP \cap \pi_Q = P$.



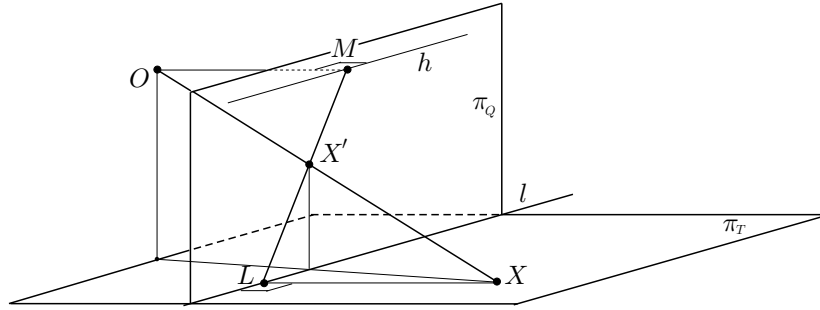
7.2.1.ii Sigui $AB \subset \pi_T$. Les representacions en el quadre dels punts $X \in AB$, vindran determinades per la intersecció del pla π_Q amb la família de rectes OX contingudes en el pla OAB . Per a totes les rectes AB no contingudes en el pla, per O , paral·lela a π_Q , la intersecció esmentada és una recta $A'B'$. Qualsevol punt d'aquesta recta és la representació d'un punt de AB , excepte el punt H que pertany a la recta h , que passa pel punt central i és paral·lela a l . Notem que aquest punt H és la posició límit cap a la qual tendeixen les representacions dels punts de la recta AB quan "s'allunyen" del quadre. Llavors, per tal que la representació sigui biunívoca, el que es fa és incorporar un nou punt ideal o impropi I_∞ , —punt de l'infinit—, a les rectes i es defineix la seva representació en el quadre com el punt $H = A'B' \cap h$. Observem que el punt H , també es pot obtenir com la intersecció de la recta h amb la paral·lela t , per O , a AB . Això implica que la representació d'una família de rectes paral·leles té un punt comú sobre la recta h . Resumint, els punts de la recta h són les representacions dels punts de l'infinit de les rectes del pla del terra, i cadascun d'aquests punts defineix una direcció en el pla del terra. Ens referirem a la recta h com la recta de l'infinit, o línia de l'horitzó.

7.2.1.iii Sigui MN paral·lela a la línia l del terra. Si la seva representació $M'N'$ no fos paral·lela a l , la tallaria en un punt K . Llavors, aquest punt, fix en la representació, hauria de pertànyer a la recta MN , la qual cosa no pot ser perquè MN és paral·lela a l .

7.2.1.iv Per la segona part de l'activitat, la representació de RS , perpendicular a l , passa pel punt M en què es tallen la línia h de l'horitzó i la paral·lela,

per O , a RS . La línia OM , és perpendicular a l i paral·lela a π_T , i, per tant, és perpendicular al quadre π_Q . Això implica que M és el punt central.

7.2.1.v



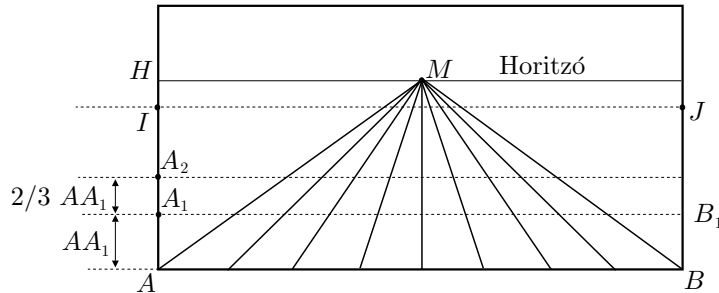
El punt X' pertany a la recta OX . Si tracem la perpendicular, per X , a la línia del terra l , obtenim la recta LX amb L sobre l . La representació d'aquesta recta passa per L —perquè és un punt fix—, i passa pel punt central M . Llavors, X' pertany a la recta LM . Conseqüentment El punt X' resulta de la intersecció del raig visual OX , amb la recta LM .

7.2.2.i Vegeu el fitxer 2e3.FIG, i activeu la primera opció de l'interruptor.

7.2.2.ii Siguin:

- HM la línia de l'horitzó.
- IJ la representació de la transversal “més allunyada” possible.
- AB la línia base del quadre.
- A_1B_1 la primera transversal.

Llavors, perquè IJ i HM coincideixin s'ha de complir —vegeu la figura adjunta—,

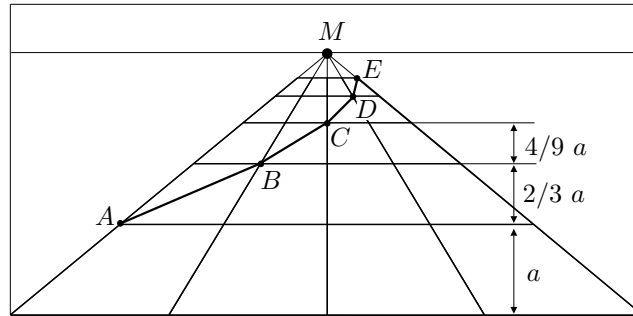


$$\begin{aligned}
 AH &= AI = AA_1 + \frac{2}{3}AA_1 + \frac{4}{9}AA_1 + \frac{8}{27}AA_1 + \dots = \\
 &= AA_1 + \frac{2}{3} \left(AA_1 + \frac{2}{3}AA_1 + \frac{4}{9}AA_1 + \dots \right) = AA_1 + \frac{2}{3}AH.
 \end{aligned}$$

Consegüentment,

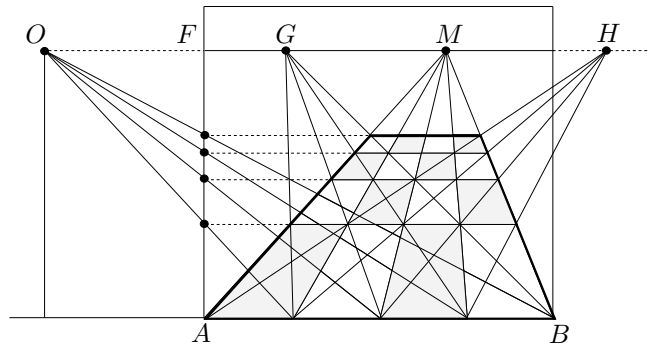
$$AA_1 = \frac{1}{3}AH$$

7.2.2.iii Vegeu el fitxer 2e3.FIG, amb la segona opció de l'interruptor activada. En el gràfic adjunt podeu observar que la diagonal de les rajoles del terra es representa en el quadre com una poligonal $ABCDE$.

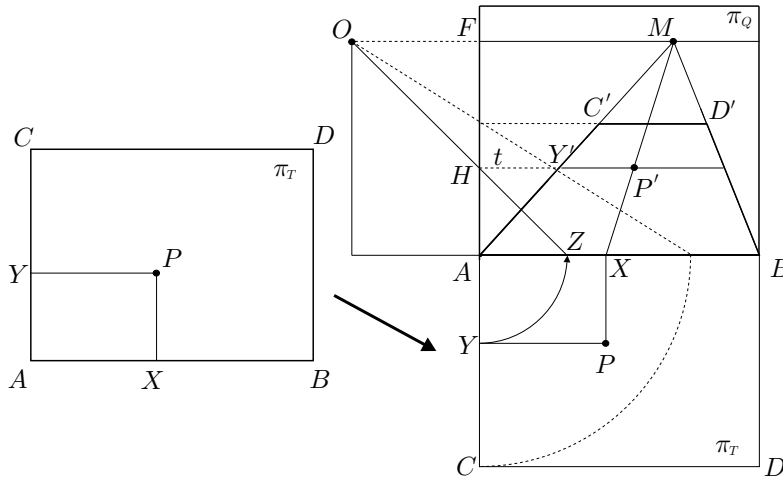


7.2.3.i Vegeu el fitxer Alberti1.FIG.

7.2.3.ii Vegeu el fitxer Alberti1.FIG i el gràfic adjunt.



7.2.4.i El mètode que presentem requereix el compàs. Més endavant veurem la solució de Piero de la Francesca, qui utilitza el regle sol.



Siguin O l'ull de l'observador, π_T el pla del terra i π_Q el pla del quadre. Tracem, tal com es veu a la figura adjunta:

- El traslladat de π_T sobre la línia base AB del quadre π_Q .
- Els punts X i Y , projeccions ortogonals de P sobre AB i AC .
- El segment MX , en què M és el punt central. Llavors, la representació P' de P pertany a MX , perquè MX és la representació de la perpendicular al quadre que conté P .
- El cercle (A, AY) i la seva intersecció Z amb AB . Aquest punt Z determinarà, mitjançant la construcció d'Alberti, el traçat la transversal sobre la que està P' .
- El segment OZ , el qual talla la perpendicular de seccions AF en el punt H .
- La paral·lela t , pel punt H , a la línia base AB . Aquesta és la representació de la recta PY .
- El punt P' d'intersecció de MX i la transversal t . Aquest punt és la representació de P perquè ha d'estar contingut a les dues rectes MX i t .

7.2.4.ii Per visualitzar el mètode de l'apartat anterior, vegeu el fitxer `Alberti2.FIG`.

S'ha creat, també, el fitxer `Objinial.FIG`, en què figuren els objectes inicials de la macro `Finesalb.MAC` que presentarem més endavant. Els objectes que hi trobem són:

- Una semirecta sobre la que es construirà el pla del terra, tal com es veu en el fitxer `Alberti2.FIG`.
- Cinc segments que controlen els paràmetres que apareixen en el fitxer `Alberti2.FIG`.
- Un punt M sobre el primer segment de control, que determina la posició horitzontal del punt central en el pla del quadre, tal com es veu en el fitxer `Alberti2.FIG`.
- Un punt W sobre el que es construirà el quadre. En el fitxer `Alberti2.FIG` és el punt A .

Després s'han creat dues macros:

- `Finesalb.MAC`: Donats els objectes del fitxer `Objinial.FIG`, construeix el pla del terra —a partir de la semirecta—, el pla del quadre —a partir del vèrtex W —, l'ull de l'observador, el punt M central, la línia de l'horitzó i la representació del pla del terra en el quadre.
- `Persalb.MAC`: Donats els objectes del fitxer `Objinial.FIG`, i un punt P en el pla del terra, construeix la representació P' ,—en el quadre de vèrtex W —, de P .

Si es volen crear representacions perspectives en què es visualitzin el pla del terra, i el quadre, la manera d'actuar seria:

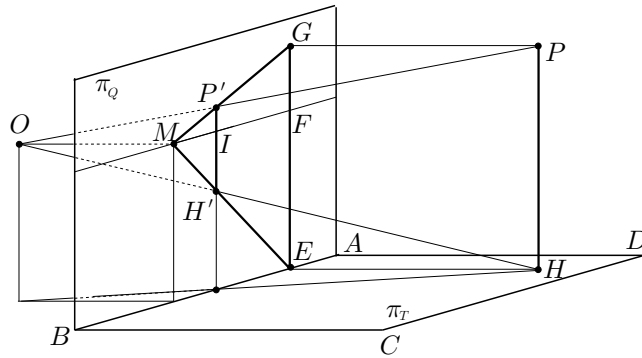
- Obrir el fitxer `Objinial.FIG`, i guardar-lo amb un altre nom.
- Carregar la macro `Finesalb.MAC`, per crear el pla del terra, el quadre i la representació del pla del terra en el quadre.
- Carregar la macro `Persalb.MAC`, crear un punt P en el terra, i trobar el seu transformat P' en el quadre, utilitzant aquesta macro.

El fitxer `Alberti3.FIG`, s'ha creat d'aquesta manera. S'han creat tres punts P : un sobre un cercle, un altre sobre un quadrat, i l'últim sobre un polígon estrellat. S'ha aplicat la macro `Persalb.MAC` per construir les seves representacions P' sobre el quadre i, finalment, s'ha construït el lloc geomètric dels punts P' quan es mou P sobre les figures.

7.2.5.i Primer intent: Siguin,

- El punt P a representar.
- El segment PH perpendicular, per P , al pla del terra π_T , amb $H \in \pi_T$.

- El segment PG perpendicular, per P , al pla del quadre π_Q , amb $G \in \pi_Q$.
- El rectangle $PGHE$ determinat per PH i PG .



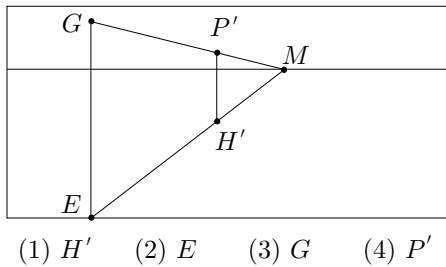
Llavors, es pot establir, igual que a l'activitat 7.2.1, que la representació de la línia PG és la línia GM , en què M és el punt central. [Això és veritat excepte en el cas que GP coincideix amb OP , llavors la representació de la línia PG és el punt M .]

A més, en ser la representació de la línia HE , la línia EM , tenim:

- La representació P' de P es troba sobre GM .
- La representació H' de H es troba sobre EM .
- El segment $P'H'$ és paral·lel a $GE = PH$; és a dir P' es troba sobre la paral·lela, per H' , a GE .

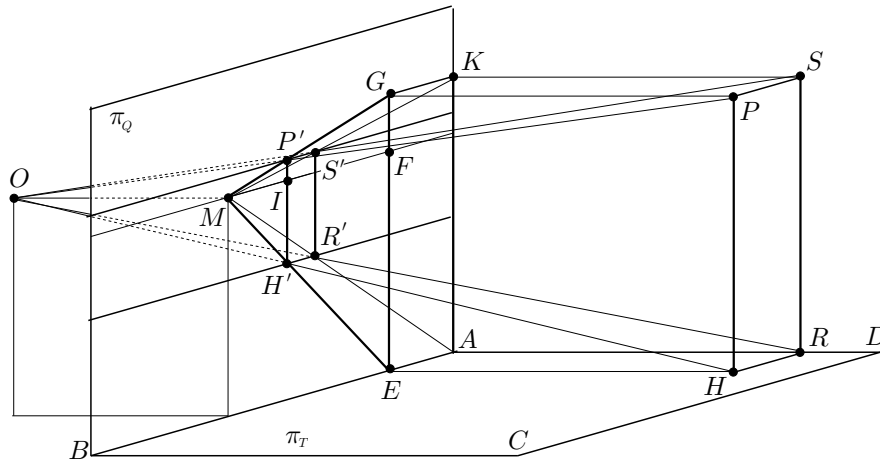
Això proporciona un mètode de construcció de P' , com a intersecció de GM amb la paral·lela, per H' , a GE . Aquest no serveix en el cas que aquestes rectes coincideixen, és a dir quan M pertany al pla OPH . Tracem:

- (1) El punt H' de la manera explicada a l'activitat 7.2.4.
- (2) El punt $E = MH' \cap AB$, en què AB és la línia del terra.



- (3) El punt G sobre la perpendicular, per E , a AB , de manera que $GE = JH$.
- (4) El punt P' com a intersecció de GM amb la paral·lela, per H' , a GE .

Segon intent: Per tal d'evitar el fet que els punts P tals que M pertany al pla OPH no quedin representats, proposem una altra construcció. Aquesta implicarà que el nombre de rectes necessàries per a la construcció augmentarà en dos. L'estratègia consisteix a transferir la construcció desitjada a la del punt S , —vegeu la figura adjunta—, el qual es troba sobre la mateixa transversal, i a la mateixa altura que P , en el pla vertical, sobre la perpendicular AD del terra.



Considerem

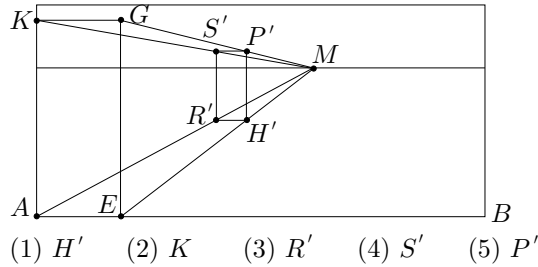
- El segment PH anterior, i la representació H' de H .
- El segment SR perpendicular, per S , al pla del terra π_T , amb $R \in \pi_T$.
- El segment SK perpendicular, per S , al pla del quadre π_Q , amb $K \in \pi_Q$.
- El rectangle $SKRA$ determinat per SR i SK .

Llavors tenim que:

- La representació R' de R pertany a AM , i a la paral·lela, per H' , a AB .
- La representació S' de S pertany a KM , i a la perpendicular, per R' , a AB .
- La representació P' de P pertany a la paral·lela, per S' , a AB , i a la perpendicular, per H' , a AB .

Així obtenim el mètode següent per a la construcció de P' . Tracem:

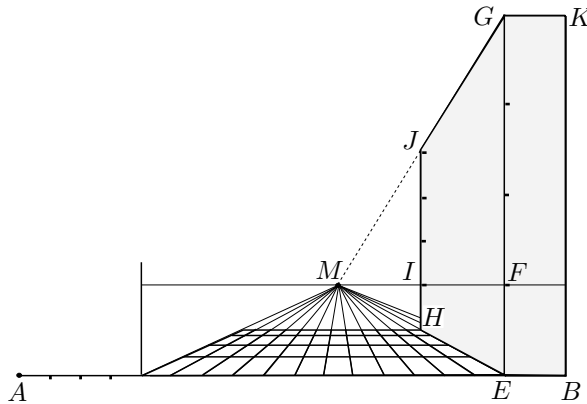
- (1) El punt H' de la manera explicada a l'activitat 7.2.4.
- (2) El punt K sobre la perpendicular, per A , a AB de manera que $AK = SR = JH$.



- (3) El punt R' d'intersecció de AM amb la paral·lela, per H' , a AB .
- (4) El punt S' d'intersecció de KM amb la perpendicular, per R' , a AB .
- (5) El punt P' d'intersecció de la perpendicular, per H' , a AB , amb la paral·lela, per S' , a AB .

D'acord amb aquesta construcció s'ha elaborat la macro `Persalbv.MAC`. Aquesta s'ha utilitzat en el fitxer `Alberti4.FIG` en què es representa mig cercle perpendicular al pla del terra.

7.2.5.ii Treballem amb la notació del quadre adjunt i amb les dades de l'exemple d'Alberti de la pàgina 338.



Després de l'apartat anterior sabem que G , J i M estan alineats, de la mateixa manera que ho estan E , H i M . Llavors, en ser $\text{distància}(M, AB) = 3$ braços, i $GE = 12$ braços obtenim

$$\frac{GE}{FE} = \frac{GE}{\text{distància}(M, AB)} = \frac{12}{3} = 4. \tag{9.20}$$

A més, en ser GE i JH paral·lels, tenim les semblances de triangles $JMH \sim GME$ i $IMH \sim FME$. D'aquestes obtenim les proporcions

$$\frac{JH}{GE} = \frac{MI}{MF} = \frac{IH}{FE}.$$

Consegüentment,

$$\frac{JH}{IH} = \frac{GE}{FE} = 4. \quad (9.21)$$

Finalment, observem que les igualtats (9.20) i (9.21) són les utilitzades per Alberti en la seva escala de representacions verticals. Efectivament,

- Per a la vertical sobre la transversal per H , agafa IH com a unitat de mesura i construeix $JH = 4IH$.
- Per a la línia base AB , agafa FE com a unitat vertical de mesura i construeix $GE = 4FE$. La vertical BK , en trobar-se sobre la mateixa transversal, tindrà la mateixa altura que GE .

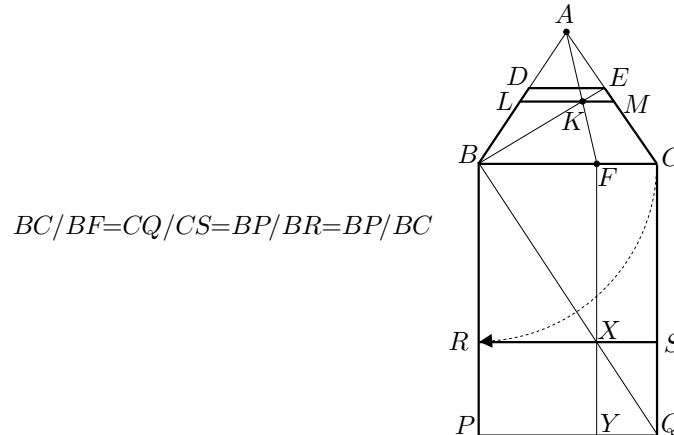
7.3.1.i El primer mètode de construcció de Della Francesca, en el cas particular exposat a la pàgina 346, es basa en la construcció del punt F tal que

$$BC = \frac{BP}{BC} BF = \frac{50}{10} BF = 5 BF.$$

Aquí farem el mateix. Donat el rectangle $BCPQ$, del qual volem retallar el quadrat $BCRS$, determinarem el punt F sobre BC tal que

$$BC = \frac{BP}{BC} BF, \quad \text{és a dir} \quad \frac{BC}{BF} = \frac{BP}{BC}.$$

Llavors, un cop construït F , el traçat de la representació $BCLM$ del quadrat $BCRS$ seguirà les mateixes etapes que a la proposició XXIII.



Sigui $BCDE$ la representació de $BQPQ$. Construïm:

- El punt R sobre BP tal que $BR = BC$, i el quadrat $BCRS$.
- El punt X d'intersecció de la diagonal BQ del rectangle $BQPQ$, amb el costat RS del quadrat $BCRS$.
- La perpendicular FY , per X , a BC . Llavors,

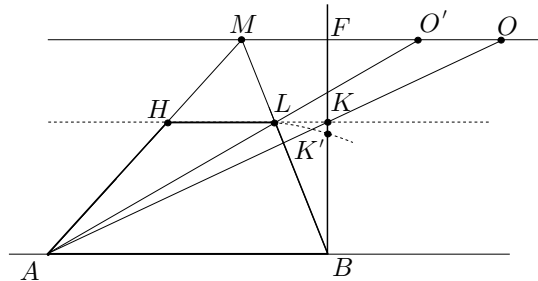
$$\frac{BC}{BF} = \frac{CQ}{FX} = \frac{BP}{BR} = \frac{BP}{BC}.$$

- El punt K d'intersecció de les representacions BE de BQ , i AF de FY .
- La paral·lela, per K , a BC , la qual talla BD en L , i EC en M .

Llavors, $BCLM$ és la representació del quadrat $BCRS$ retallat del rectangle $BQPQ$.

7.3.1.ii Vegeu el fitxer Pdfraqa.FIG.

7.3.1.iii Siguin AB la línia del terra, MF la línia de l'horitzó, M el punt central, MF la línia de l'horitzó i FB la perpendicular per B a AB . Recordem de quina manera obtenim la transversal HL , que representa una transversal del pla del terra a distància AB de la línia del terra.



- **Mètode d'Alberti:** A partir de l'ull O de l'observador, situat a distància FO del quadre sobre la línia de l'horitzó, tracem la línia OA . El punt K d'intersecció de OA amb FB , és el punt pel qual passa la transversal cercada.
- **Mètode del punt de distància:** A partir del punt O' , situat sobre la línia de l'horitzó de manera que $O'M = OF$, tracem la línia $O'A$. El punt L d'intersecció de $O'A$ amb MB , és el punt pel qual passa la transversal cercada.

Per establir l'equivalència dels dos mètodes, n'hi haurà prou amb veure que

$$\boxed{MO' = FO \text{ implica que } KL \text{ és paral·lela a } AB.}$$

Perquè si això es cert, les transversals per K , —construïda a partir de O —, i per L , —construïda a partir de O' —, coincideixen. Justifiquem, doncs, la proposició emmarcada: Si KL i AB no fossin paral·leles, podríem traçar una paral·lela, per L , a AB que tallaria FB en un punt $K' \neq K$. Llavors,

$$\begin{aligned} FOK \sim BAK &\implies \frac{FO}{AB} = \frac{FK}{BK} \\ MO'L \sim BAL &\implies \frac{MO'}{AB} = \frac{ML}{LB} \\ \text{Elements VI.2} &\implies \frac{ML}{LB} = \frac{FK'}{K'B} \end{aligned}$$

Per tant, aquestes tres igualtats, juntament amb $FO = MO'$, impliquen que

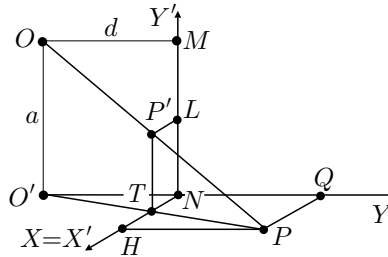
$$\frac{FK}{KB} = \frac{FK'}{K'B},$$

en què K i K' pertanyen a l'interior de FB . Per tant, $K = K'$, la qual cosa no pot ser. Consegüentment, LK és paral·lela a AB .

7.4.1 En el fitxer `Octpers.FIG` trobareu:

- Una primera fila de tres figures en què es presenta la doble projecció.
- La primera figura de la segona fila és una representació en perspectiva cavallera de la situació representada en les figures anteriors.
- Les altres dues figures són l'octàgon en el terra i en el quadre, amb les condicions del punt de vista determinades pels punts O i O' de les figures anteriors.

7.4.2.i Recerca de les equacions:



$$\begin{aligned}
 O'NT \sim O'QP &\implies \frac{x'}{x} = \frac{NT}{PQ} = \frac{O'N}{O'Q} = \frac{d}{d+y} \implies \boxed{x' = \frac{dx}{d+y}} \\
 \left. \begin{array}{l} PP'T \sim POO' \\ PTH \sim O'PQ \end{array} \right\} &\implies \frac{y'}{a} = \frac{P'T}{OO'} = \frac{PT}{PO'} = \frac{PH}{QO'} = \frac{QN}{QO'} = \frac{y}{d+y} \implies \\
 &\implies \boxed{y' = \frac{ay}{d+y}}
 \end{aligned}$$

7.4.2.ii Recerca de les equacions de les transformades de les rectes $x = k$, perpendiculars al quadre:

$$x' = \frac{dk}{d+y} \quad \text{i} \quad y' = \frac{ay}{d+y} \implies \frac{x'}{y'} = \frac{dk}{ay}.$$

Llavors, si aïllem y i substituïm a l'expressió de x' , obtenim:

$$x' = \frac{dk}{d + \frac{dky'}{ax'}} \implies dax' + dky' = dka \implies \boxed{\frac{x'}{k} + \frac{y'}{a} = 1}.$$

Observem que és una recta que passa pel punt central $M(0, a)$ i la intersecció $H(k, 0)$, amb el quadre, de la perpendicular, per P , al quadre. Això proporciona la determinació alternativa del transformat P' d'un punt P . Efectivament, $P' \in MH$, en què H és la projecció ortogonal de P sobre la línia del terra.

Recerca de les equacions de les transformades de les rectes $y = l$, paral·leles al quadre:

$$x' = \frac{dx}{d+l} \quad \text{i} \quad y' = \frac{al}{d+l}.$$

En ser la coordenada x lliure, també ho és x' , i l'equació de la transformada és

$$\boxed{y' = \frac{al}{d+l}}.$$

Observem que aquestes rectes són paral·leles a la línia del terra $y' = 0$. A més, $\frac{al}{d+l} < \frac{al}{l} = a$, la qual cosa vol dir que sempre es mantenen per sota de la recta $y = a$, que passa per M i és paral·lela a la línia del terra.

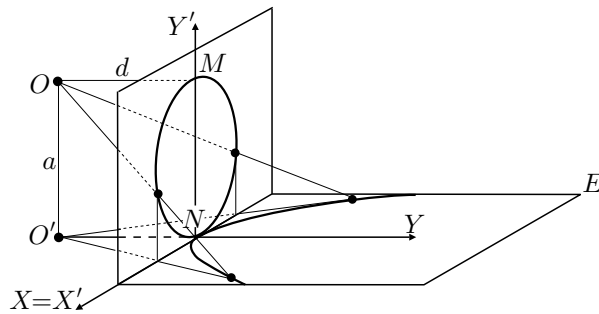
7.4.2.iii Cerquem l'equació límit de les transformades de la família $y = l$ quan $l \rightarrow \infty$:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{al}{d+l} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a}{\frac{d}{l} + 1} = \frac{a}{1} = a.$$

Això implica que l'equació límit de les transformades $y' = \frac{al}{d+l}$ és $y' = a$, la qual representa “la transversal del terra a l'infinit”. Aquest fet justifica que la recta $y' = a$, que passa pel punt central $M(0, a)$ i és paral·lela a la línia de terra $y' = 0$, rebí el nom de “línia de l'horitzó”.

7.4.2.iv Equació de la circumferència de diàmetre MN :

$$x'^2 + \left(y' - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



Substituïm les equacions de la transformació i obtenim

$$\left(\frac{dx}{d+y}\right)^2 + \left(\frac{ay}{d+y} - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \implies \left(\frac{dx}{d+y}\right)^2 + \left(\frac{ay}{d+y}\right)^2 - \frac{a^2y}{d+y} = 0.$$

Finalment, eliminem denominadors i en resulta

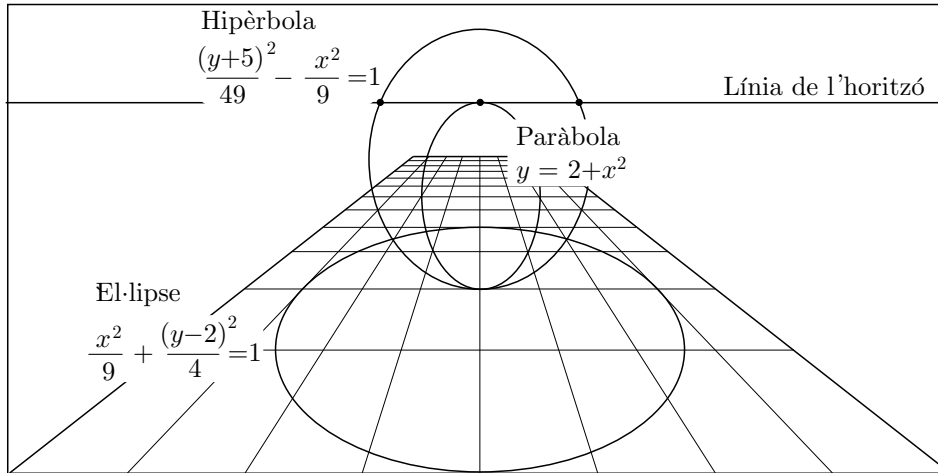
$$d^2x^2 + a^2y^2 - a^2y(d+y) = 0 \implies d^2x^2 - a^2dy = 0 \implies \boxed{y = \frac{d}{a^2}x^2}.$$

És a dir, la corba cercada és una paràbola amb l'eix perpendicular a la línia del terra i paràmetre d/a^2 .

7.4.2.v Vegeu el fitxer *Pers.DFW* i/o *Pers.MTH*. En el gràfic adjunt es visualitzen, per al cas $a = 3$ i $d = 2$:

- La representació d'un enrajolat 8×12 inscrit en el rectangle de vèrtexs $(-4, 0), (4, 0), (4, 12), (-4, 12)$.
- La línia de l'horitzó $y' = 3$.
- La representació de l'el·lipse $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$, com una el·lipse sense punts a l'horitzó.
- La representació de la hipèrbola $\frac{(y+5)^2}{49} - \frac{x^2}{9} = 1$, com una el·lipse amb dos punts a l'horitzó.

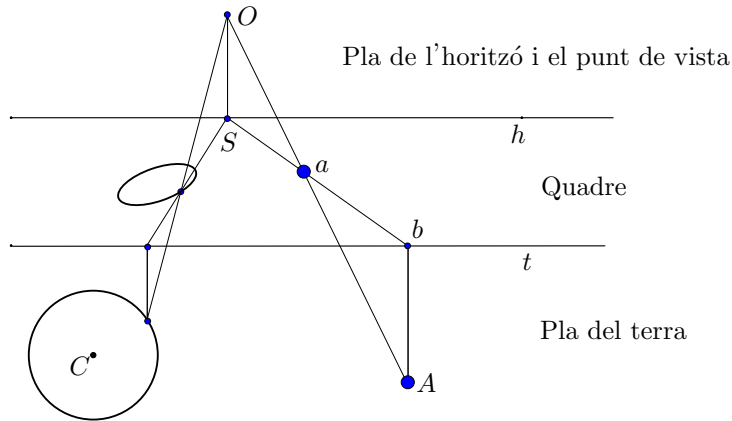
- La representació de la paràbola $y = 2 + x^2$, com una el·lipse amb un punt a l'horitzó.



7.5.1 Vegeu el fitxer **Serlio.FIG**.

7.6.1 Vegeu el fitxer **Con5pas.FIG**. Sobre el lloc geomètric resultant, considereu cinc punts qualssevol i construïu la cònica que determinen; observareu que coincideix amb el lloc geomètric.

7.7.1.i Vegeu el fitxer **Probtay.FIG**. En el gràfic adjunt es visualitza l'última etapa de la construcció, en què també s'ha traçat la visió perspectiva d'un cercle.



7.7.1.ii Per a la construcció de les macros, s'ha creat el fitxer **Obinipt.FIG**, en què s'hi inclouen tots els objectes inicials:

- Cinc segments i un punt que controlen els paràmetres següents:

- Amplada del pla del terra i del quadre.
- Punt sobre aquesta amplada, el qual determina la posició horitzontal del punt de fuga.
- Profunditat del terra.
- Alçada del quadre que hem fet coincidir amb la del punt de vista sobre el terra.
- Distància del punt de vista al quadre.
- Elevació sobre el terra del punt a representar.
- Una semirecta r sobre la que es construirà el pla del terra i els punts que es volen representar.
- Un punt W que serà l'extrem esquerre inferior del quadre en què es construiran les representacions perspectives dels punts.

Les macros creades són:

- **Finestrapt.MAC**: Amb els objectes inicials del fitxer **Obinipt.FIG**, amb excepció de l'elevació sobre el terra del punt a representar, construeix el pla del terra —a partir de la semirecta—, el pla del quadre —amb W com a vèrtex inferior esquerre—, el punt central i la representació del pla del terra en el quadre. El fitxer **Finestpt.FIG** presenta el resultat de l'aplicació de la macro.
- **Ptay.MAC**: Amb els objectes inicials del fitxer **Obinipt.FIG**, amb excepció de l'elevació sobre el terra del punt a representar, i un punt P del pla del terra, construeix la representació P' ,—en el quadre de vèrtex W —, de P .
- **Ptayh.MAC**: Amb tots els objectes inicials del fitxer **Obinipt.FIG** i la projecció Q , en el pla del terra, del punt P a representar, construeix les representacions P' i Q' , —en el quadre de vèrtex W —, de P i Q .
- **Ptayh0.MAC**: Igual que l'anterior, però només torna P' .

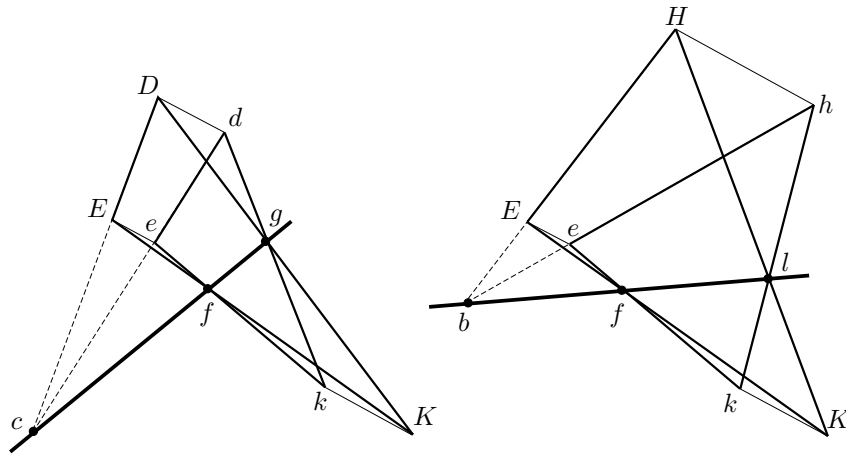
Si es volen crear representacions perspectives en què es visualitzin el pla del terra, i el quadre, la manera d'actuar seria:

- Obrir el fitxer **Objinipt.FIG**, i guardar-lo amb un altre nom.
- Carregar la macro **Finestrapt.MAC**, per crear el pla del terra, el quadre i la representació del pla del terra en el quadre.
- Carregar les macros **Ptay.MAC**, **Ptayh.MAC**, **Ptayh0.MAC**, segons convingui, crear un punt P amb elevació o sense, i trobar el seu transformat P' amb la macro convenient.

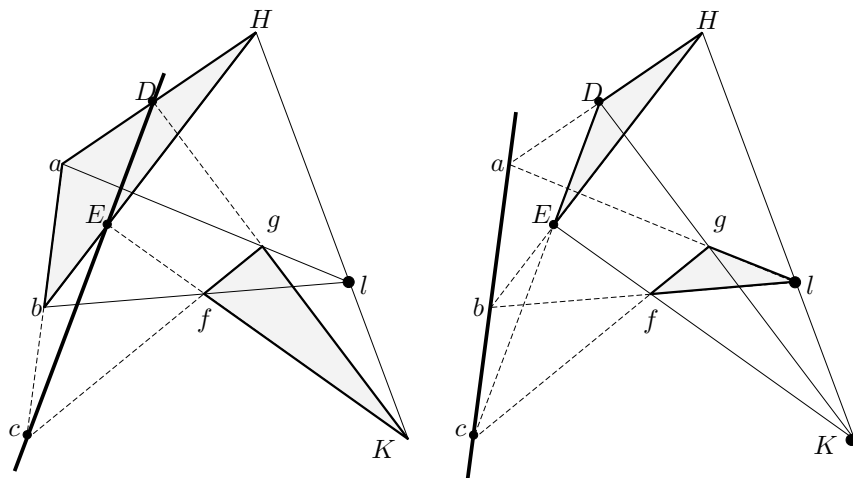
De manera alternativa es pot obrir el fitxer `Finestpt.FIG` i desar-lo amb un altre nom. D'aquesta manera, podem passar directament a la tercera etapa en què es carreguen les macros que construeixen P' .

7.7.2 Vegeu el fitxer `Mitjesf.FIG`. A més d'aquesta construcció, en trobareu d'altres, utilitzant aquestes macros, en els fitxers CABRI de les activitats del capítol 6.

7.8.1.i De la consideració dels dos grups de tres paral·leles en resulten les dues configuracions:



7.8.1.ii De la consideració dels centres de perspectiva l i K , en resulten les dues configuracions:



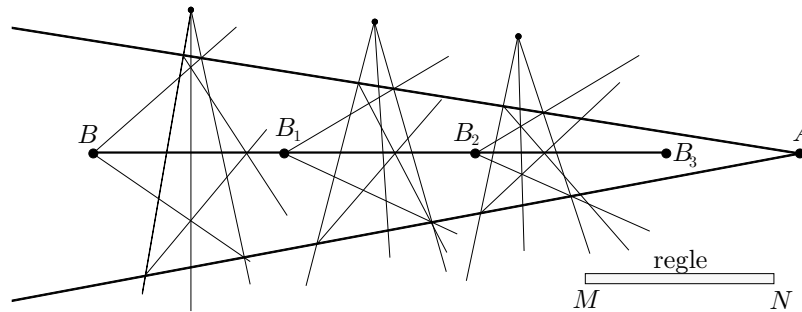
7.8.2 Vegeu el fitxer `Tdesd.FIG`.

7.8.3.i Sigui λ la longitud del regle. La figura que hem adjuntat a l'enunciat de l'activitat suggereix la construcció d'un primer segment BB_1 , de longitud λ , contingut a BA , a partir dels punts B i C_1 . El punt C_1 de la recta BA s'ha obtingut aplicant el teorema de Desargues als triangles PQR i $P'Q'R'$. Per construir aquests dos triangles i el punt C_1 tracem:

- Dues rectes r i s , per A , utilitzant diverses vegades el regle, de manera que passin “prop” de B .
- Tres rectes a, b i c , des d'un punt X , “a la vora” de B . Entre d'altres, en resulten els punts $P = a \cap r$, $Q = c \cap r$, $P' = a \cap s$ i $Q' = c \cap s$.
- Els segments BQ i BQ' , els quals tallen la recta b , respectivament en R i R' . Així han quedat construïts els triangles PQR i $P'Q'R'$ tals que PP' , QQ' i RR' convergeixen en el punt X .
- El punt $C_1 = PR \cap P'R'$. Pel teorema de Desargues, aquest punt està alineat amb BA .

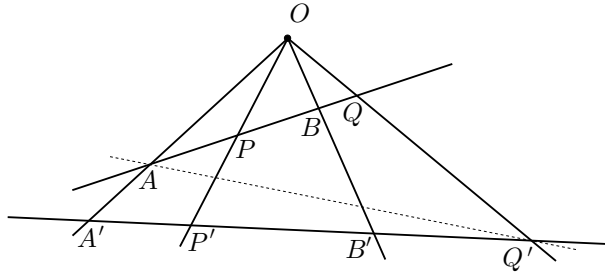
Notem que aquestes construccions es poden realitzar amb el nostre petit regle MN , si triem adequadament X, r, s, a, b i c . Llavors, en ser $BB_1 = BB_2 = BB_3 = \dots = \lambda$, podrem completar BA , pel postulat d'Arquimedes.¹⁴

7.8.3.ii Vegeu els fitxers `Rectdes.FIG`, `Rectdes2.FIG`, `Rectdes3.FIG` i `Rectades.MAC`. En el gràfic adjunt obtenim el segment AB , després d'aplicar tres vegades el mètode i completar el segment B_3A amb una última aplicació del regle.



7.9.1.i Primerament apliquem la proposició VII.129 de Pappo a la configuració formada per les rectes pel punt O , la recta AQ i la recta AQ' , i després a la formada per les rectes pel punt O , la recta $Q'A$ i la recta $Q'A'$.

¹⁴Vegeu la secció 5.1, pàgina 216.



Amb les notacions de la figura adjunta tenim,

$$\begin{aligned} (AB, PQ) &= (AY, XQ') = \frac{AX}{AQ'} : \frac{YX}{YQ'} = \\ &= \frac{Q'Y}{Q'A} : \frac{XY}{XA'} = \frac{Q'B'}{Q'A'} : \frac{P'B'}{P'A'} = \frac{A'P'}{A'Q'} : \frac{B'P'}{B'Q'} = (A'B', P'Q'). \end{aligned}$$

7.9.1.ii Si AB i PQ són dues parelles de punts conjugats harmònics podem escriure

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{BQ} \implies \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP} = 1.$$

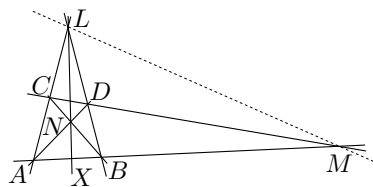
Llavors, com que es conserva la raó doble, podem escriure

$$\begin{aligned} \frac{A'P'}{A'Q'} \cdot \frac{B'Q'}{B'P'} &= \frac{A'P'}{A'Q'} : \frac{B'P'}{B'Q'} = (A'B', P'Q') = (AB, PQ) = \\ &= \frac{AP}{AQ} : \frac{BP}{BQ} = \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP} = 1. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\frac{A'P'}{A'Q'} = \frac{B'P'}{B'Q'}.$$

7.9.2.i En el pla del quadre els punts L i M es troben sobre la recta de l'horitzó, i les relacions d'incidència es conserven. Per tant, la configuració resultant és com la del gràfic adjunt, en què, per designar els punts, hem utilitzat les mateixes lletres que en el pla del terra.



7.9.2.ii En el pla del terra tenim que N és el centre del paral·lelogram $ABCD$. Per tant, X és el punt mitjà de A i B . Llavors,

$$\frac{XA}{XB} = 1.$$

D'altra banda,

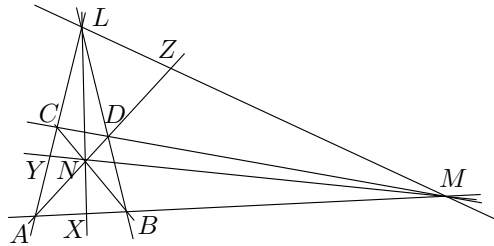
$$\frac{MA}{MB} = \lim_{\substack{P \in AB \\ P \rightarrow \infty}} \frac{PA}{PB} = \lim_{\substack{P \in AB \\ P \rightarrow \infty}} \frac{PB + BA}{PB} = 1 + \lim_{\substack{P \in AB \\ P \rightarrow \infty}} \frac{BA}{PB} = 1 + 0 = 1.$$

Consegüentment,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{XA}{XB}.$$

És a dir, la parella MX , constituïda pel punt M de l'infinit de la recta AB i el punt mitjà X de la recta AB , és una parella conjugada harmònica de la parella AB .

7.9.2.iii Si conservem les notacions pels punts en el pla del quadre, podem dir que en la configuració adjunta, les parelles MX i AB són conjugades harmòniques.



A més, si projectem A , X , B i M , des del punt L , sobre la recta AD , resulten les parelles AD i NZ conjugades harmòniques. Finalment, si projectem els punts A , N , D i Z , des del punt M , sobre la recta AC , resulten les parelles AC i LY conjugades harmòniques.

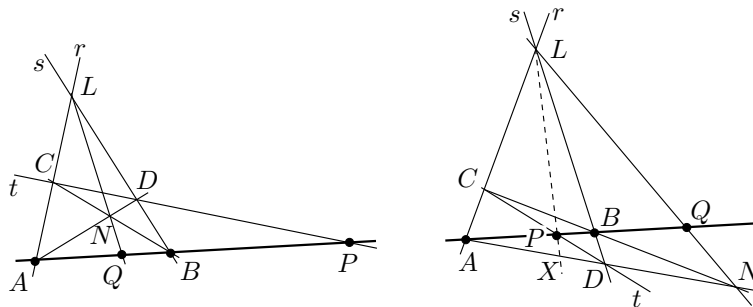
7.9.2.iv La configuració de l'apartat anterior, formada per les tres parelles de rectes que passen pels punts A , B , C i D , les quals, a més de tallar-se en aquests punts, es tallen en L , M i N , rep el nom de quadrilàter complet. Pels resultats d'aquesta activitat, en qualsevol quadrilàter complet podem determinar tres grups de parelles conjugades, a partir de les tres rectes determinades pels punts L , M i N . Això ho justifiquem en dues fases:

- Qualsevol quadrilàter complet, es pot obtenir d'una transformació perspectiva d'una configuració de paral·leles com la del primer apartat, situant els punts L i M sobre la línia de l'horitzó

- La raó doble entre punts d'una línia es conserva al passar d'una configuració a l'altra, per la proposició 129 de Pappo, i també es conserva dins del quadrilàter, quan projectem des de qualsevol de les interseccions. Per tant, també es conserva la relació de conjugació harmònica.

La construcció, amb regle sol, del quart harmònic Q dels punts alineats A , B i P , es podrà dur a terme construint:

- La recta r pel punt A , i la recta s pel punt B . En resulta el punt $L = r \cap s$.
- La recta t pel punt P . En resulten els punts $C = r \cap t$ i $D = s \cap t$.
- Les rectes AD i BC . En resulta el punt $N = AD \cap BC$.
- La recta LN . En resulta el punt $Q = LN \cap AB$ quart harmònic dels punts A , B i P .

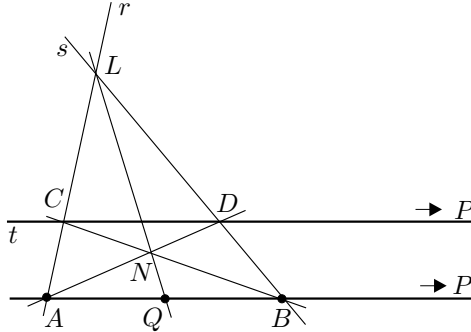


En els dos gràfics adjunts veiem la construcció en els dos casos; quan P és exterior al segment AB , i quan és interior. En el cas P interior a AB , les parelles AB i PQ són conjugades perquè són projecció, des de L , de les parelles AD i XN que també ho són.

En el fitxer `Quarthc.FIG` podeu veure la construcció pas a pas, per a les diferents posicions inicials del punt P , amb la comprovació numèrica de la relació de conjugació. Podeu trobar la macro corresponent a aquesta construcció en el fitxer `Quarthar.MAC`.

7.9.3 Construcció del punt mitjà

Considerem el quadrilàter complet de la figura adjunta en què P és el punt de l'infinit de les rectes AB i $t = CD$.



Observem que la recta CD és paral·lela a AB i, a més,

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{AP}{BP} = \lim_{\substack{X \in AB \\ X \rightarrow \infty}} \frac{AX}{BX} = 1.$$

Això significa que el punt Q és el punt mitjà de A i B . Consegüentment, donats el segment AB i la recta t paral·lela a AB , es pot construir el punt mitjà de AB , amb regle sol, traçant:

- La recta r , per A , i la recta s , per B , d'on resulten els punts $L = r \cap s$, $C = t \cap r$ i $D = t \cap s$.
- Les rectes AD i BC , d'on resulta el punt $N = AD \cap BC$.
- La recta LN , d'on resulta el punt mitjà $Q = AB \cap LN$ de AB .

Construcció de la paral·lela

Per consideracions semblants a les d'abans, en el gràfic anterior, si Q és el punt mitjà de AB , llavors P és el punt de l'infinit. Per tant, les rectes CP i AB són paral·leles. Consegüentment, donat el segment AB , el seu punt mitjà P i el punt C , es pot construir la paral·lela a AB , per C , amb regle sol, traçant:

- La recta r , que conté AC , i la recta s , per B , d'on resulta el punt $L = r \cap s$.
- La recta QL i la recta BC , d'on resulta el punt $N = BC \cap QL$.
- La recta AN , d'on resulta el punt $D = AN \cap s$.
- La recta CD , la qual és la paral·lela t cercada.

7.10.1 De la configuració de Menelau $FPQCIB$ tenim,

$$\frac{BP}{BF} = \frac{IP}{IQ} \cdot \frac{CQ}{CF} \implies \frac{QI}{PI} = \frac{BF}{BP} \cdot \frac{CQ}{CF}. \quad (9.22)$$

De la configuració de Menelau $FPQDKE$ tenim,

$$\frac{EP}{EF} = \frac{KP}{KQ} \cdot \frac{DQ}{DF} \implies \frac{QK}{PK} = \frac{EF}{EP} \cdot \frac{DQ}{DF}. \quad (9.23)$$

De la composició de les raons de les igualtats (9.22) i (9.23), obtenim

$$\frac{QI \cdot QK}{PI \cdot PK} = \frac{BF \cdot CQ}{BP \cdot CF} \cdot \frac{EF \cdot DQ}{EP \cdot DF}. \quad (9.24)$$

D'altra banda, de manera semblant, si considerem les configuracions de Menelau $PQFDGB$ i $PQFCHE$, en resulta

$$\frac{QG}{PG} = \frac{BF}{BP} \cdot \frac{DQ}{DF} \quad \text{i} \quad \frac{QH}{PH} = \frac{EF}{EP} \cdot \frac{CQ}{CF}.$$

De manera que

$$\frac{QG \cdot QH}{PG \cdot PH} = \frac{BF \cdot DQ}{BP \cdot DF} \cdot \frac{EF \cdot CQ}{EP \cdot CF} = \frac{QI \cdot QK}{PI \cdot PK}.$$

O sigui que PQ , IK i GH estan en involució.

Ara, si B , C , D i E estan sobre un cercle, per la propietat de la potència d'un punt,

$$PB \cdot PE = PL \cdot PM \quad \text{i} \quad QC \cdot QD = QL \cdot QM.$$

Llavors,

$$\frac{QL \cdot QM}{PL \cdot PM} = \frac{QC \cdot QD}{PB \cdot PE} = \frac{QC \cdot QD}{PB \cdot PE} \cdot \frac{FC \cdot FD}{FC \cdot FD}.$$

A més, en ser $FC \cdot FD = FB \cdot FE$, i per la igualtat (9.24), obtenim

$$\frac{QL \cdot QM}{PL \cdot PM} = \frac{QC \cdot QD}{FC \cdot FD} \cdot \frac{FB \cdot FE}{PB \cdot PE} = \frac{QI \cdot QK}{PI \cdot PK}.$$

És a dir que PQ , IK i LM estan en involució, i de la mateixa manera ho podríem demostrar per a PQ , GH i LM , i per a GH , IK i LM .

7.10.2.i Vegeu el fitxer `Tanconpe.FIG`.

7.10.2.ii Vegeu els fitxers `Polar.MAC` i `Tanconpe.MAC`.

7.10.2.iii Utilitzeu la macro `Polar` per construir la polar r d'un punt F . Considereu un punt P sobre r i construïu la polar de P . Comprovareu que passa per F i que, si moveu P sobre r , la polar de P varia la seva posició, però sempre passa per F .

Bibliografia

AUTORS VARIS

- [1999] «Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria», *Suma*, 31, 15–18. xi

ALBERTI, Leon B.

- [1435] *De la Peinture. De Pictura*. Florència. [Text llatí establert per C. Grayson i traducció francesa per J.L. Schefer. Macula Dédale, Paris, 1992]. 333, 336, 338
- [1784] *El tratado de la pintura por Leonardo de Vinci y los tres libros que sobre el mismo arte escribió Leon Bautista Alberti*. Madrid. [Editat pel Colegio de Aparejadores y Arquitectos Técnicos de Murcia. Murcia, 1980]. 333

ALEJANDRE, Francisco, NOLLA, Ramon

- [1984] «Sobre geometría del triángulo y cuestiones metodológicas en 3º de Bachillerato», *Papers de Batxillerat*, 6, 128–130. 452

ANDERSEN, Kirsti

- [1992] *Brook Taylor's Work on Linear Perspective*. Springer, New York. 355, 360, 361

ARISTÒTIL

- [IV aC] *Obres*. Gredos, Madrid.

BAG, A. K.

- [1979] *Mathematics in Ancient and Medieval India*. Chaukhamba Orientalia, Varanasi-Delhi. 2, 188, 200, 259

BAKULIN, P.I., KONONOVICH, E.V., MOROZ, V.I.

- [1987] *Curso de Astronomía General*. Mir, Moscú. [Traducció de l'edició original russa de 1983]. 254, 269

BARDEY, E.

- [1936] *Problemas de Aritmética y Álgebra*. Labor, Barcelona. 193

BASHMAKOVA, Isabella, SMIRNOVA, Galina

- [2000] *The Beginnings and Evolution of Algebra*. The Mathematical Association of America, Washington, DC. 62

BECKMAN, Petr

- [1971] *A History of pi*. St. Martin's Press, New York. 3

BEHBOUD, Ali

- [1994] «Greek Geometrical Analysis», *Centaurus*, 37, 1, 52–86. 136, 145

- BERGGREN, J. L.
 – [1986] *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. Springer, New York. 158, 193, 259
- BERGGREN, Lennart, BORWEIN, Jonathan, BORWEIN, Peter
 – [1997] *Pi: A Source Book*. Springer, New York. [Reedició augmentada, 2000]. 3
- BESSOT, Didier, LE GOFF, Jean Pierre
 – [1993] «Mais où est donc passée la troisième dimension?», *Histoires de Problèmes–Histoire des Mathématiques*, 199–247. Ellipses, Paris. 351
- BISHOP, Alan J.,
 – [2000] «Quines matemàtiques ha de dominar una persona en el tercer mil·lenni?», *BIAIX*, 16, 32–34. xi
- BKOUICHE, Rudolf
 – [1991] «La Naissance du Projectif, de la perspective à la géométrie projective», *Mathématiques et Philosophie*, 239–285. Éditions du CNRS, Paris. 353, 354, 356
- BONOLA, Roberto
 – [1906] *La geometria non euclidea*. Bologna. [Traducció anglesa de H. S. Carslaw, *Non-euclidean Geometry*, Dover, New York, 1955. Inclou *Science Absolute of Space* de JANOS BOLYAI i *Geometrical Researches on the Theory of Parallels* de NICHOLAS LOBACHEVSKI]. 39
- BOTTINEAU-FUCHS, Yves
 – [1994] «Abraham Bosse “Interprète” de Girard Desargues», *Desargues en son temps*, 371–388. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris. 366
- BOYER, Carl B.
 – [1968] *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, New York. [Traducció espanyola a càrrec de Mariano Martínez, *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, Madrid, 1986]. 3, 8, 103, 130, 137, 162, 185, 304, 311
- BREZINSKI, Claude
 – [1991] *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. Springer, Berlin. 204
- BROWNSON, C.D.
 – [1991] «Euclid’s *Optics* and its Compatibility with Linear Perspective», *Archive for History of Exact Sciences*, 24, 165–194. 330
- BUCK, R. C.
 – [1980] «Sherlock Holmes in Babylon», *American Mathematical Monthly*, 87, 335–345. 176
- CAJORI, Florian
 – [1928–29] *A History of Mathematical Notations*. Open Court Pub. Co., La Salle, Illinois. [Reeditat per Dover, New York, 1993]. 205, 236, 259
- CAÑÓN, Camino
 – [1993] *La Matemática creación y descubrimiento*. UPCO, Madrid. ix, 23

- CARREGA, Jean-Claude
 – [1981] *Théorie des corps. La règle et le compas*. Hermann, Paris. [Reeditat l'any 1989]. 22
- CAVEING, Maurice
 – [1982] *Zénon d'Élée. Prolegomènes aux Doctrines du Continu*. Vrin, Paris. 17
- CHABERT, Jean-Luc
 – [1993] «La vraie fausse démonstration du Cinquième Postulat», *Histoires de Problèmes–Histoire des Mathématiques*, 277–297. Ellipses, Paris. 39
- CHAKRAVARTY, G.
 – [1932] «Growth and Development of Permutations and Combinations in India», *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 24, 79–88. 189
- CHASLES, Michel
 – [1837] *Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie*. Hayez, Bruxelles. [Reeditat per Jacques Gabay, Paris, 1989]. 322, 372
 – [1860] *Les Trois Livres de Porismes d'Euclide*. Mallet-Bachelier, Paris. 305
- CHEVALIER, Jean, GHEERBRANT, Alain
 – [1969] *Dictionnaire des symboles*. Éd. Robert Laffont et Éd. Jupiter, Paris. [Traducció espanyola a càrrec de Manuel Silvar i Arturo Rodríguez, adaptada i completada per José Olives Puig, *Diccionario de los símbolos*, Herder, Barcelona, 1986, 5a. edició 1995]. 282
- COLLIER, Mark, MANLEY, Bill
 – [1998] *How to read Egyptian hieroglyphs*. British Museum Press, London. 159
- DAHAN-DALMEDICO, Amy, PEIFFER, Jeanne
 – [1986] *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*. Seuil, Paris. (Primera edició amb el títol *Routes et dédales*, Études vivantes, 1982). 61
- DALAI EMILIANI, Marisa
 – [1961] «La question de la perspective», préface a PANOFKY [1975].
- DATTA, Bibhutibushan
 – [1993] *Ancient Hindu Geometry*. Cosmo Publications, New Delhi. 2, 6, 8, 200
- DELAHAYE, Jean-Paul
 – [1997] *Le fascinant nombre π* . Pour la Science, Paris. 3
- DELLA FRANCESCA, Piero
 – [1470] *De prospectiva pingendi*. Edició crítica a càrrec de G. Nicco-Fasola. Le Lettere, Firenze, 1984. 342, 345
- DESARGUES, Girard
 – [1636] *Exemple de l'une des manières universelles du S. G. D. L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ni d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*. Paris. Vegeu FIELD-GRAY [1987], 190–201 i la traducció anglesa a les pàgines 144–160. 352
 – [1639] *Brouillon project d'une atteinte aux évènements des rencontres du Cône avec un Plan*. Paris. Vegeu TATON [1951], 99–180, i FIELD-GRAY [1987], 69–143. 141, 305, 352, 354

DESCARTES, René

- [1628] *Regulae ad directionem ingenii*. Amsterdam, 1701. Vegeu NAVARRO CORDÓN, J.M. [1984], 59–168. 137
- [1637] *La géométrie*. Leiden. Vegeu SMITH–LATHAM [1925], QUINTÁS [1981], 276–407, i PLA–VIADER [1999], 1–147.

DETLEFSEN, M., ERLANDSON D. K., HESTON J. C. YOUNG, C. M.

- [1975] «Computation with Roman Numerals», *Archive for History of Exact Sciences*, 15, 141–148. 163

DOU, Albert

- [1967] «Los paralogismos de Euclides y Saccheri en la teoría de las paralelas», *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, LXI, 2º, 155–174. ix, 36
- [1970] *Fundamentos de la matemática*. Labor, Barcelona. ix, 36
- [1986] «Euclides», *Historia de la Matemática hasta el Siglo XVII*, 61–78. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. ix, 23
- [1992] «Orígenes de la Geometría no Euclidiana: Saccheri, Lambert y Taurinus.», *Historia de la Matemática en el siglo XIX, (1ª parte)*, 44–63. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. ix, 39
- [2000] «Quines matemàtiques ha de dominar una persona en el tercer mil·leni?», *BIAIX*, 16, 40–41. 155

DREYER, J. L. E.

- [1953] *A History of Astronomy from Thales to Kepler*. Dover, New York. [Primerament publicada sota el títol *History of the Planetary Systems from Thales to Kepler* a Cambridge University Press, 1906.] 231

DUNHAM, William

- [1999] *Euler. The master of us all*. The Mathematical Association of America, Washington DC. 144

DÜRER, Albrecht

- [1525] *Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen*. Nuremberg. Vegeu PEIFFER [1995], 133–353. 123, 351

EDWARDS, Harold M.

- [1977] *Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. Springer, New York. vii, 183

ECKE, Paul Ver

- [1933] *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathématique*. Bruges. [Reeditat per Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1982]. 128, 147, 226, 248, 277, 284, 301, 327, 366, 371, 452
- [1960] «Commentaires d'Eutocius d'Ascalon», en la introducció de la seva traducció francesa de les obres d'Arquimedes *Les Oeuvres complètes d'Archimède*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris. 128, 279, 299

EFÍMOV, Nikolái Vladímirovich

- [1978] *Geometria superior*. [Traducció espanyola a càrrec de J. J. Tolosa i Yu. P. Murzín. MIR, Moscú, 1984]. 370

ENGELS, Hermann

- [1977] «Quadrature of the circle in ancient Egypt», *Historia Mathematica*, 4, 137–140. 3

EUCLIDES

- [ca. 300 aC] *Elements*. Vegeu HEATH [1908] i VERA [1970]. [També hi ha traducció espanyola a càrrec de María Luisa Puertas amb introducció de Luis Vega, *Elementos*, en tres volums. Gredos, Madrid, 1994].
- [ca. 300 aC b] *Òptica*. [Traducció espanyola a càrrec de Paloma Ortiz. Gredos, Madrid, 2000]. 244, 329
- [ca. 300 aC c] *Fenòmens*. [Traducció espanyola a càrrec de Paloma Ortiz. Gredos, Madrid, 2000]. 280

EULER, Leonhard

- [1911–] *Opera Omnia*. 144

EUTOCI D'ASCALON

- [VI] *Comentaris sobre Arquímedes*. Vegeu EECKE [1960].

EVES, Howard,

- [1963] *A Survey of Geometry*. Allyn and Bacon, Boston, Massachusetts. [Traducció espanyola a càrrec de Susana Blumovicz, revisada per Santiago Alonso, *Estudio de las geometrías*, en dos volums. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, Mexico D.F., 1969]. 50, 57, 69, 108, 370
- [1976] *An Introduction to the History of Mathematics*. Holt, Rinehart and Winston, New York. 50

FABREGAT, J., GARCÍA, M., SENDRA, R.

- [1997] *Curso de Astronomía. Teoría y Práctica*. ECIR, Valencia. 269

FAUVEL, John, GRAY, Jeremy

- [1987] *The History of Mathematics: A Reader*. MacMillan Press & The Open University. 16, 39, 62

FIELD, Judith V.

- [1997] *The invention of infinity: mathematics and art in the Renaissance*. Oxford University Press, Oxford. 333

FIELD, Judith V., GRAY, Jeremy J.

- [1987] *The Geometrical Work of Girard Desargues*. Springer, New York. 305, 352, 353, 358, 367, 376, 378, 379, 380

FLOCON, Albert

- [1994] «Voir et représenter. Abraham Bosse, l'intransigent », *Desargues en son temps*, 263–266. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris. 366

FLOCON, Albert, TATON, René

- [1984] *La Perspective*. P.U.F., col·lecció “Que sais-je”, Paris. 330

- GAUSS, Carl Friedrich
 – [1801] *Disquisitiones Arithmeticae*. Leipzig. [Traducció catalana a càrrec de Griselda Pascual, *Disquisicions Aritmètiques*. Societat Catalana de Matemàtiques, Barcelona 1996]. 119
- GAZALÉ, Midhat J.
 – [1999] *Gnomon: From Pharaos to Fractals*. Princeton University Press, Princeton. 71
- GEPPERT, Harald
 – [1929] «Sulle costruzioni geometriche che si eseguiscono colla riga ed un compasso ad apertura fissa», *Periodico di Matematiche*, X, 292–319. 49
- GHEVERGHESE, George
 – [1991] *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Penguin Books, Harmondsworth, U.K. [Traducció espanyola a càrrec de Jacobo Cárdenas, *La Cresta del Pavo Real. Las Matemáticas y sus Raíces no Europeas*. Ediciones Pirámide, Madrid, 1996]. 2, 8, 154, 160, 161, 199, 213, 259
- GHYKA, Matila C.
 – [1983] *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Poseidon, Barcelona. 282
- GILLINGS, Richard J.
 – [1972] *Mathematics in the Time of the Faraohs*. The MIT Press. Cambridge, Mass. [Reeditat a Dover, New York, 1982]. 4, 64, 160, 161, 213
- GIRBAU, Joan
 – [1984] «La geometria grega a l'ensenyament mitjà» en el curs *Noves tendències en l'educació matemàtica* de la UIMP a Barcelona. viii
- GÓMEZ PIN, Víctor
 – [1998] *La Tentación Pitagórica. Ambición filosófica y anclaje matemático*. Síntesis, Madrid. 23
- GREENBERG, Marvin Jay
 – [1993] *Euclidean and non-Euclidean Geometries: Development and History*. Freeman and Company, New York. 39
- GUELFOND, A. O.
 – [1979] *Resolución de ecuaciones en números enteros*. Col·lecció Lecciones Populares de Matemáticas, Mir, Moscú. 208
- GUZMÁN, Miguel de
 – [1986] «Los Pitagóricos», *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII*, 11–35. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. 57, 137
 – [1991] *Para pensar mejor*. Labor, Barcelona. 152
 – [1992] «Tendències innovadores en educació matemàtica». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, núm 7, 7–33. viii
- HAIRER, Ernst, WANNER, Gerhard
 – [1996] *Analysis by its History*. Springer, New York. x

HANSON, Norwood Russell

- [1973] *Constellations and Conjectures*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht. [Traducció espanyola a càrrec de Carlos Solís, *Constelaciones y conjeturas*. Alianza Editorial, Madrid, 1978, 1985]. 265

HEATH, Sir Thomas

- [1908] *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Cambridge University Press, Cambridge. [Reeditat per Dover, New York, 1956]. 19, 24, 28, 39, 44, 80, 103, 130, 149, 245
- [1913] *Aristarc of Samos*. Clarendon Press, Oxford. [Reeditat per Dover, New York, 1981]. 231, 244
- [1921] *A History of Greek Mathematics*. Clarendon Press, Oxford. [Reeditat, en dos volums, per Dover, New York, 1981]. 1, 12, 14, 16, 21, 27, 80, 132, 137, 186, 283, 291, 304, 311
- [1949] *Mathematics in Aristotle*. Clarendon Press, Oxford. [Reeditat per Thommes Press, Bristol, 1998]. 22, 279, 291

HILBERT, David

- [1899] *Grundlagen der Geometrie*. Teuber, Leipzig. [Traducció espanyola de la setena edició, Berlín, 1930, a càrrec de Francisco Cebrián, *Fundamentos de la Geometría*, CSIC, Madrid, 1991]. vi, 25, 38, 370

HIRSCH, Gérard, EGUETHER, Gérard

- [1993] *Courbes et coordonnées paramétriques ou polaires*. Masson, Paris. 268

HOUZEL, Christian

- [1991] «Histoire de la théorie des parallèles», *Mathématiques et Philosophie de l'Antiquité à l'Âge Classique*, 163–179. Éditions du CNRS, Paris. 39

IFRAH, Georges

- [1994] *Histoire universelle des chiffres*. Éditions Robert Lafont, Paris. [Traducció espanyola a càrrec de Juan M. López et al., *Historia Universal de las Cifras*. Espasa Calpe, Madrid, 1997]. 154, 156, 158, 159, 165, 172

JUNG, C. G.

- [1964] *L'homme et ses symboles*. París. 282

KAESER, Pascal

- [2000] «Dénombrément des schémas de rimes», *Quadrature*, 40, 25–30. 188

KATZ, Victor J.

- [1993] *A History of Mathematics*. Harper Collins College Publishers, New York. 4, 135, 186 199, 200, 261

KEPLER, Johannes

- [1604] *Ad Vitellionem Paralipomena, quibus Astronomiae pars Optica Traditur*, Frankfurt. [Traducció francesa i notes a càrrec de Catherine Chevalley, *Les fondements de l'optique moderne: Paralipomènes a Vitelion*. Vrin, Paris, 1980]. 353

KIRK, G.S., RAVEN, J.E.

- [1966] *The Presocratic Philosophers. A Critical History with a Selection of Texts*. Cambridge University Press. England. [Traducció espanyola a càrrec de Jesús García, *Los Filósofos Presocráticos. Historia Crítica con Selección de Textos*. Gredos, Madrid, 1974]. 13, 15, 71, 213

KLEIN, Félix

- [1908] *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. [Traducció anglesa, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. Dover, New York, 1945]. vii, x

KLINE, Morris

- [1973] *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*. Oxford University Press, Oxford. [Traducció espanyola a càrrec de Santiago Garma. Siglo XXI de España Editores, S.A., Madrid, 1984]. vii

KNORR, Wilbur R.

- [1986] *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Birkhäuser, Boston. [Edició corregida, Dover, New York, 1993]. 127, 128, 132, 134, 137, 145, 186, 227, 279, 283, 291, 302, 305, 309, 447
- [1991] «On the Principle of Linear Perspective in Euclid's *Optics*», *Centaurus*, 34, 3, 193–210. 330
- [1992] «When Circles Don't Look Like Circles: An Optical Theorem in Euclid and Pappus», *Archive for History of Exact Sciences*, 44, 287–329. 279

LAMBERT, Jean-Henri

- [1759] *La perspective affranchie de l'embaras du plan géométral*. Chez Heidegger et Comp., Zurich. [Reimpressió a Éditions Alain Brieux, Paris, 1977]. 356
- [1774] *J.-H. Lambert's freye Perspektive, oder Anweisung, jeden perspektivischen Aufriss von freyen Stücken und ohne Gründriss zu verfertigen*. Zurich. Vegeu LAURENT [1987], 193–284. 356, 364

LAURENT, Roger

- [1987] *La place de J.-H. Lambert (1728–1777) dans l'Histoire de la Perspective. Suivi de la version intégrale, inédite en français des Notes et additions à la Perspective affranchie de l'embaras du plan géométral. Traduction de Jeanne Pfeiffer. Notes et commentaires à cette traduction de R. Laurent et J. Peiffer. Préface de R. Taton*. Cedric/Nathan, Paris. 330, 356, 364

LAWLOR, Robert

- [1982] *Sacred Geometry*. Thames and Hudson, Londres. [Traducció espanyola a càrrec de María José García Ripoll, *Geometría sagrada*. Debate, Madrid, 1996]. 282

LEBESGUE, Henri

- [1950] *Leçons sur les constructions géométriques*. Gauthier-Villars, Paris. [Reeditat per Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1987]. 22, 50

LE GOFF, Jean-Pierre

- [1981–82] «Le “Cas” Abraham Bosse (1602–1676)», *Les Cahiers de la Perspective*, 2a edició de 1987, 1-2, 122–126. 366
- [1987a] «Une oeuvre aux confins des sciences et des arts: *De prospectiva Pingendi* de Piero della Francesca», *Les Cahiers de la Perspective*, reimpressió de 1993, 4, 3–74. 356
- [1987b] «La proposition cinquième du traité de perspective de Samuel Marolois (1628). Annexe 2: Vérité ou fausseté de Serlio», *Les Cahiers de la Perspective*, reimpressió de 1993, 4, 203–262. 356

LI YAN, DU SHIRAN

- [1963–64] *Zhongguo gudai shuxue jianshi*. Hong Kong. [Traducció anglesa a càrrec de John N. Crossley i Anthony W.-C. Lun, *Chinese Mathematics. A Concise History*. Oxford University Press, Oxford, 1987]. 2, 4, 199

MAHONEY, M.

- [1968] «Another Look at Greek Geometrical Analysis», *Archive for History of Exact Sciences*, 5, 318–348. 145
- [1973] *The Mathematical Career of Pierre de Fermat. 1606–1665*. Princeton University Press, Princeton. [2a. edició 1994]. 183

MAOR, Eli

- [1998] *Trigonometric Delights*. Princeton University Press, Princeton. 236

MARTÍNEZ, Mariano

- [1986] «Los orígenes del método axiomático–deductivo», *Historia de la Matemática hasta el Siglo XVII*, 37–60. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. 11

MARTZLOFF, Jean-Claude

- [1987] *Histoire des mathématiques chinoises*. Masson, Paris. [Traducció anglesa a càrrec de Stephen S. Wilson, *A History of Chinese Mathematics*. Springer, Berlin, 1997]. 2, 186

MASCHERONI, Lorenzo

- [1797] *La geometria del compasso*, Pavia. [Traducció francesa corregida per C. Pierru i J. Pierru, *Géométrie du Compas*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1980]. 50

MASIP, Ramon

- [2000] *La Geometria a l'educació secundària. Anàlisi i elaboració de recursos pedagògics*. Treball realitzat amb una llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya el curs 1999-2000, i localitzat a la Biblioteca del Departament d'Ensenyament, Barcelona. 269

MESCHKOWSKI, Herbert

- [1964] *Noneuclidean Geometry*. Academic Press, New York and London. 39

MONGE, Gaspard

- [1799] *Géométrie Descriptive*. Baudouin, Paris. [Reeditat per Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1989]. 355

MONTESINOS, José Luís

- [2000] *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Síntesis, Madrid. 291

MONTESINOS, José María

- [1992] «Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevsky y Bolyai», *Historia de la Matemática en el siglo XIX, (1ª parte)*, 65–114. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid. 39

MORROW, G. R.

- [1970] *Proclus: a Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton University Press, Princeton. 14, 24, 24, 26, 128, 39, 178, 215 283, 313, 416

NAVARRO, Juan Manuel

- [1984] *Descartes. Reglas para la dirección del espíritu*. Alianza Editorial, Madrid. 137

NEEDHAM, Joseph

- [1959] *Science and Civilisation and China*, vol. 3: *Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*. Cambridge University Press, Cambridge. 2

NEUGEBAUER, Otto

- [1957] *The Exact Sciences in Antiquity*. 2a. ed. Brown University Press, Providence, R.I.[Reeditat per Dover, New York, 1969]. 14, 167, 170, 177
- [1975] *A History of Ancient Mathematical Astronomy*. Springer, Berlin. 243

NEUGEBAUER, Otto, SACHS, Abraham

- [1945] *Mathematical Cuneiform Texts*. American Oriental Series, Vol. 29, New Haven, 1945. 176

NOGUÈS, R.

- [1932] *Théorème de Fermat. Son Histoire*. Librairie Vuibert, Paris. [Reeditat per Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992]. 183

ORE, Oystein

- [1948] *Number Theory and its History*. McGraw-Hill, New York. [Reedició a Dover, New York, 1988]. 200

PACIOLI, Luca

- [1509] *De Divina Proportione*. Venecia. [Traducció espanyola a càrrec de Juan Calatrava, *La Divina Proporción*. Akal, Madrid, 1991]. 141

PANOFSKY, Erwin

- [1975] *La perspective comme forme symbolique et autres essais*. Les Éditions de Minuit, Paris. 330, 345

PAPPOS D'ALEXANDRIA

- [III] *La Collection Mathématique*. Vegeu Eecke [1932].

PASCAL, Blaise

- [1640] *Essay pour les coniques*. Paris. [Vegeu TATON [1951] 190–194, i les traduccions angleses de FIELD–GRAY [1987], 180–184, i SMITH [1929], 326–330]. 358

PAVANELLO, Gian Carlo, TRINCHERO Aldo

- [1998] *Relojes de Sol*. Editorial De Vecchi, Barcelona. 71

PEDOE, Dan

- [1976] *Geometry and the Liberal Arts*. [Traducció espanyola a càrrec de Caroline Phipps, *La geometria en el arte*. Gustavo Gili, Barcelona, 1979]. 330

PEIFFER, Jeanne

- [1995] *Albrecht Dürer. Géométrie*. Seuil, Paris. 123, 334, 351

PERNETY, Dom Antoine-Joseph

- [1758] *Dictionnaire Mytho-hermétique, dans lequel on trouve les allégories fabuleuses des poètes, les métaphores, les énigmes et les termes barbares des philosophes hermétiques expliqués*. Chez Deladain, librairie, Paris. [Traducció espanyola a càrrec de Santiago Jubany, *Diccionario Mito-Hermético*. Ediciones Indigo, Barcelona, 1993]. 282

PEYROUX, Jean

- [1993] *Les opérations arithmétiques chez les grecs*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris. 181

PLA, Josep

- [1995] «Sherlock Holmes y Pitágoras en Mesopotamia», *Mundo Científico*, num. 161, vol. 15 836–845. 176
- [1998] «El mètode com un canvi de llenguatge», *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 13, 2, 35–84. 90, 309
- [1998b] «Panoràmica del sistema decimal posicional des dels orígens indis a l'Arismètica de Santcliment», *Calligraphia et Tipographia, Arithmetica et Numerica, chronologia*, Rubrica 7, de Paleographica et Diplomatica Studia, 102–256. 172

PLA, Josep i VIADER, Pelegrí

- [1999] *René Descartes. La Geometria*. IEC - Pòrtic - Eumo, Barcelona. 89, 223, 278

PLATÓ

- [IV aC] *Obres*, Gredos.

PLUTARC

- [I-II] «Convivia septem sapientium», *Moralia*, II. [Traducció espanyola, introducció i notes a càrrec de C. Morales i J. García López *Obras Morales y de Costumbres*. Gredos, Madrid, 1986]. 72, 299

POINCARÉ, Henri

- [1908] *Science et méthode*. [Traducció espanyola *Ciencia y método*, Espasa Calpe, Madrid, 1963]. vii

PÓLYA, George

- [1945] *How to solve it*. Princeton University Press, USA. [Traducció espanyola a càrrec de Julián Zagazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México D.F., 1965, reimpressió 1994]. 127, 151
- [1962] «L'enseignement des mathématiques et la loi biogénétique», *Quand les savants laissent libre cours à leur imagination*, 210–214; rassemblée et rédigée sous la direction de I. J. Good. Dunod, Paris, 1967. [És una traducció de l'obra *The scientist speculates: an anthology of partly baked ideas*. Basic Books, New York, 1962]. vii

PONCELET, Jean-Victor

- [1822] *Traité des propriétés projectives des figures*. Bachelier, Paris. [Reimpressió de la 2a. edició, Gauthier-Villars, Paris, 1865–66: Éditions Jacques Gabay, Paris, 1995]. 355

PROCLE

- [v] *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*. B.G. Teubner, Leipzig, 1873. [Vegeu MORROW [1970]].

PTOLEMEU, Claudi

- [ii] *Composition Mathématique* o [*Almagest*]. [Facsímil de la traducció francesa d'Halma dels anys 1813–1816. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1988]. 121, 232, 233, 236, 249, 251, 255, 263

QUINTÁS, Guillermo

- [1981] *René Descartes. Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Alfaguara, Madrid.

RAMELLINI, Guido

- [2000] «El algoritmo de la raíz cuadrada. Dos tipos distintos de aproximación heurística.», *Suma*, 35, 63–69. 185

RASHED, Roshdi

- [1972] «L'induction mathématique: al-Karaji, as-Samaw'al», *Archive for History of Exact Sciences*, 9 (1972), 1–21. 189
- [1978] «L'Extraction de la Racine $n^{\text{ième}}$ et l'invention des Fractions Décimales (XI^e–XII^e Siècles)», *Archive for History of Exact Sciences*, 18 (1978), 191–243. 189, 193
- [1984] *Entre Arithmétique et Algèbre. Recherches sur l'Histoire des Mathématiques Arabes*. Les Belles Lettres, Paris. 185, 189, 193
- [1997] «Analyse combinatoire, analyse numérique, analyse diophantienne et théorie des nombres», *Histoire des Sciences arabes*, 55–91. Éditions du Seuil, Paris. 185

RASHED, R., HOUZEL, Ch., CHRISTOL, G.

- [1999] *Oeuvres de Pierre de Fermat*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris. 183

- RASHED, R., VAHABZADEH, B.
 – [1999] *Al-Khayyām Mathématicien*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris. 278
- REY PASTOR, Julio, BABINI, José
 – [1984] *Historia de la Matemática*. Gedisa, Barcelona. 24, 130
- REVENTÓS, Agustí
 – [1993] *Geometria Axiomàtica*. Institut d'Estudis Catalans, Barcelona. 38
- RICARD, Matthieu, TRINH XUAN THUAN
 – [2000] *L'infini dans la paume de la main*, Nil éditions/Fayard, Paris. [Traducció espanyola a càrrec d'Alberto Magent, *El infinito en la palma de la mano*, Urano, Barcelona, 2001]. 15
- ROBINS, Gay, SHUTE, Charles
 – [1987] *The Rhind Mathematical Papyrus. An Ancient Egyptian Text.*. British Museum Press, London. 3, 161, 213
- ROUCHÉ, Eugène, COMBEROUSSE, Ch. de
 – [1883] *Traité de Géométrie*. Gauthier–Villars, Paris. 52
- SACCHERI, Giovanni Girolamo
 – [1733] *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiluntur Prima ipsa universae Geometriae Principia*. Milan. [Edició bilingüe llatí–anglès a càrrec de George Bruce Halsted, *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus*, Chelsea Publishing Company, New York, 1986. 39
- SALINAS, Ignacio, BENÍTEZ, Manuel
 – [1940] *Aritmética*. Salinas y Benítez, Madrid. 193
- SÁNCHEZ, Ángel
 – [2000] *Astronomía y Matemáticas en el Antiguo Egipto*. Alderabán Ediciones, Madrid. 71
- SANTCLIMENT, Francesc
 – [1482] *Summa de l'art d'aritmètica*. [Edició amb introducció, transcripció i notes a càrrec d'Antoni Malet, Eumo, Vic, 1998. 172
- SCHRÖDINGER, Erwin
 – [1996] *Nature and the Greeks*. Cambridge University Press, Cambridge. [Traducció espanyola a càrrec de Víctor Gómez Pin, *La naturaleza y los griegos*. Tusquets Editores, Barcelona, 1997]. 15
- SIMPLICI
 – [VI dC] *On Aristotle 'Physics' 6*. Gerald Duckworth & Co. Ltd., London, 1989. 40
- SMITH, David Eugene
 – [1929] *A source book in mathematics*. McGraw-Hill, New York. [Reedició a Dover, New York, 1959]. 358
- SMITH, David E., LATHAM, Marcia L.
 – [1925] *The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition*. Open Court Publishing Co., New York. [Reeditat per Dover, New York, 1954].

TATON, René

- [1951] *L'oeuvre mathématique de G. Desargues. Textes publiés et commentés avec une introduction biographique et historique*. Presses Universitaires de France, Paris. [Reeditat per Vrin, Paris, 2a. ed. 1988]. 305, 352, 358, 366, 367, 371, 376, 378, 379, 380

TAYLOR, Brook

- [1719] *New Principles of Linear Perspective*. London. [Vegeu ANDERSEN [1992], 147–243]. 360, 361

TEÓ D'ESMIRNA

- [II] *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*. [Traducció francesa a càrrec de J. Dupuis. Hachette, Paris, 1892]. 78, 299

THORUP, Anders

- [1992] «A Pre-Euclidean Theory of Proportions», *Archive for History of Exact Sciences*, 45, 1–16. 214

TOEPLITZ, Otto

- [1949] *The Calculus. A Genetic Approach*. The University of Chicago Press, Chicago, 1963. [És una traducció de l'obra *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, Springer, Berlin, 1949]. viii

TORELLÓ, Ramon M.

- [1993] *Introducció a la filosofia grega*. Enciclopèdia Catalana, Barcelona. 11

TOSSUT, Rosane

- [1995] «Desargues et Pappus», *Mnémosyne*, 9, 19–44. 372

TRAVESA, Artur

- [1998] *Aritmètica*. Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona. 153

TRIGNAN, Jean

- [1994] *Fractions Continues*. Editions du Choix, Argenteuil. 208

TURNBULL, H. W.

- [1951] *The Great Mathematicians*. Methuen, London. 64

UNGURU, Sabetai

- [1975] «On the need to rewrite the history of Greek mathematics», *Archive for History of Exact Sciences*, 15 (1975), 67–114. 62

VAN DER WAERDEN, B. L.

- [1961] *Science Awakening*. Oxford University Press, New York. 14, 62, 176.
- [1983] *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer, Berlin. 4, 65

VERA, Francisco

- [1970] *Científicos Griegos*, 2 volums. Aguilar, Madrid. 24, 217, 227, 231, 287, 291

VILA, Antoni

- [1997] *La resolució de problemes de matemàtiques a l'ESO: Elaboració d'un material transversal, gestió de la classe i avaluació*.
<http://www.xtec.es/sfgp/licencias/199697/resums/vila.htm>. 151

VITRUVI, Marc Luci

- [I aC] *De architectura*. [Traducció espanyola a càrrec de Agustín Blázquez, *Los diez libros de arquitectura*. Iberia, Barcelona, 1997. 331

VON FRITZ, Kurt

- [1945] «The discovery of incommensurability by Hipasus of Metapontum» a *Annals of Mathematics*, 46, 242–264. 90

YOUSCHKEVITCH, Adolf P.

- [1976] *Les Mathématiques arabes*. Vrin, Paris. (És una traducció, a càrrec de Cazenaze i Jaouiche, de la versió en llengua alemanya de la tercera part d'una obra en llengua russa sobre “Les matemàtiques a l'edat mitjana”). 193, 259, 260

Obres col·lectives:

OC.DST [1994] *Desargues en son temps*. Dirigida per Jean Dhombres i Joël Sakarovitch. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris. 366

OC.GTF [1995] *Grand théorème de Fermat. 1641–1994*[†]. Número 22, monogràfic, de la revista *Quadrature*, Éditions du Choix, Marseille. 182

OC.HGS [1957–64] *Histoire générale des sciences*. Dirigida per René Taton, en 4 volums. Presses Universitaires de France, París. [Traducció espanyola a càrrec de Manuel Sacristán *et al.*, *Historia General de las Ciencias*. Destino, Barcelona, 1971. Orbis, Barcelona, 1988]. 196

OC.HPH [1993] *Histoires de Problèmes–Histoire des Mathématiques*. Ellipses, Paris. 39, 351

OC.LFM [1995] *Learn from the Masters*. The Mathematical Association of America, Washington. vi, ix, 162

OC.HSA [1997] *Histoire des sciences arabes*, sous la direction de Roshdi RASHED. Éditions du Seuil, Paris. 185

OC.MEP [1991] *Mathématiques et Philosophie*, sous la direction de Roshdi RASHED. Éditions du CNRS, Paris. 353, 354, 356

OC.SES [2000] *Sessions de Preparació per a l'Olimpíada Matemàtica*. Societat Catalana de Matemàtiques, Barcelona. 112

