

Façana principal de la Catedral de Tarragona

Rosasses i arcs decoratius



RAMON NOLLA SANS

2020

Reality is far from being intrinsically literal. It is literalized by the peculiar perspective of our modern consciousness. It is peculiar because it is the only perspective which insists that it is not a perspective at all but a true vision of the actual world. It has in fact lost perspective because 'perspective' means 'seeing through', and it fails to see through itself. So forceful is the literalism of our world-view that it is almost impossible for us to grasp that it is exactly that - a view, and not the world.

Pero la realidad está lejos de ser intrínsecamente literal. Es literalizada por la perspectiva peculiar de nuestra conciencia moderna. Es peculiar, pues es la única perspectiva que pretende no ser en absoluto una perspectiva, sino la verdadera visión del mundo real. De hecho, ha perdido la perspectiva, porque «perspectiva» significa «ver a través», y no consigue ver a través de sí misma. Tan fuerte es la literalidad de nuestra visión del mundo que es casi imposible para nosotros comprender que es exactamente eso: una visión, y no el mundo.

The Philosophers' Secret Fire. A History of Imagination

PATRICK HARPUR [2002],

El fuego secreto de los filósofos

Traducción: FERNANDO ALMANSA [2016, 5a ed.]

Índex

Preàmbul	5
Introducció	7
1 Rosassa sobre la porta de l’Evangeli	8
1.1 Observació de simetries	8
1.2 Tangències de la rosassa, hipòtesi i anàlisi	10
1.3 La rosassa com a corba hipotrocoide	13
2 Arcs decoratius	14
2.1 Arc-I	14
2.2 Arc – II	16
3 Rosassa de la part central de la façana	18
3.1 Simetries	18
3.2 Tangències i contactes	21
4 Indicacions i propostes de resolució de les activitats	28
4.1 Activitats de la secció 1	28
4.2 Activitats de la secció 2	35
4.3 Activitats de la secció 3	38
5 Annex	49
5.1 Sobre el mètode de l’anàlisi	49
5.2 François Viète i l’ <i>Apollonius Gallus</i>	50
5.3 Model per experimentar les composicions de simetries	51
5.4 Model de rosassa per acolorir	54
5.5 Model pautat per dibuixar la rosassa a mà alçada	55
5.6 Model pautat per dibuixar la rosassa amb regla i compàs	56
5.7 Model de rosassa de la porta de l’Evangeli per plegar i retallar	57
5.8 Activitat sobre el model epicicle-deferent per a 3r d’ESO	58
5.9 Activitat sobre el model epicicle-deferent per a 1r de BAT	59
5.10 Models d’arcs decoratius per acolorir	62
5.11 Model de la rosassa central	63
5.12 Model de la rosassa del Claustre basada en una estrella tartèssica	64
Referències	66

Preàmbul

Presentar i treballar la matemàtica en contextos culturals i patrimonials, o parafrasejant Puig Adam, com una unitat amb la vida natural i social amb consideració cap al seu origen i els processos històrics de la seva evolució,¹ és una qüestió que com a ser immers en el corrent de l'existència i de la cerca de coneixement està sempre present. Els passejos matemàtics s'han erigit en una modalitat d'accés a la cultura i a la matemàtica que permet avançar en aquesta concepció unitària.

En aquest cas es pretén contemplar alguns elements de la façana principal de la Catedral de Tarragona, aportar idees per a la creació d'activitats generades de d'aquesta contemplació i donar accés a la utilització o adaptació dels materials produïts. Es vol compartir la idea que la creació de projectes, activitats o tallers basats en fer lectures del Patrimoni o de l'entorn on es viu, des de l'òptica que aporta la matemàtica, pot contribuir a un aprofundiment en el coneixement de la realitat des de diferents punts de vista i a l'obtenció de sensibilitat per assolir una experiència estètica d'allò que aquesta amaga. Això proporciona una oportunitat per descobrir la matemàtica com una disciplina que proporciona un llenguatge per fer-se preguntes i cercar respostes, allunyada de la inèrcia de presentar-la com un coneixement tancat i acabat, i per a molts avorrit i hermètic, sense cap connexió amb la realitat, sigui el que sigui allò que vulguem entendre per aquest terme. Des d'aquesta perspectiva l'aproximació a la realitat quedarà potenciada si es pot col·laborar amb altres opcions temàtiques de lectura.

A mode de resum es pot dir que el contingut d'aquest document és geomètric, tot i que alguns tractaments algebrics de la matèria hi són presents. La idea clau present en la majoria dels seus apartats és la d'utilitzar el mètode de l'anàlisi en la resolució dels problemes que plantegen els dissenys estudiats, tant en la seva concepció clàssica com en la de la geometria analítica de Descartes. Aquesta incorpora l'àlgebra a l'anàlisi geomètrica i, com ell descrivia, «corregia tots els defectes de l'una per l'altra».²

El públic a qui va dirigit és tot aquell que comparteixi els punts de vista expressats i el professorat de matemàtiques. Quant a la metodologia a emprar en el desenvolupament amb l'alumnat de les activitats proposades, seria bo que es comencés per fer una primera aproximació als dissenys que es presenten des de la seva contemplació en directe i elaborar-ne uns esbossos a mà alçada. Això aportaria una identificació amb la complexitat diversa d'allò que es percep i proporcionaria uns primers indicis per a una anàlisi dels elements contemplats.

Qualsevol tipus d'alumnat, des d'Infantil fins a Batxillerat es pot beneficiar de fer activitats relacionades amb aquests elements. En el nivell de l'alumnat més jove, aquestes activitats quedarien restringides a adquirir l'estat de contemplació per a, posteriorment, submergir-se en la part plàstica de fer esbossos i acolorir-los, de plegar i retallar paper o qualsevol altre pràctica que impliqués la interacció amb materials manipulables. Un altre estadi d'activitat, indicat per a l'alumnat iniciat en l'ús de rudiments matemàtics, és el que implicaria elaborar anàlisis pertinents, en llenguatges més tècnics, de cara a la resolució de qüestions que es plantegen en l'aproximació contemplativa i manipulativa inicial.

En les tres primeres seccions del document es presenten els elements estudiats junt amb unes propostes d'activitat. D'aquestes s'indiquen alguns possibles tractaments en la secció 4

¹Vegeu PUIG ADAM [1960], pàg. 157-163

²Vegeu ADAM-TANNERY [1902], VI, pàg. 20 i QUINTÁS [1981] pàg. 17.

que, naturalment, no pretenen ser únics. Totes les activitats tenen relació amb l'estudi de simetries, tangències, l'ús del regle i del compàs i del programa GeoGebra. Concretament la secció 1, en què s'estudia una rosassa, presenta activitats proposades per a diferents nivells d'alumnat, des d'Infantil fins a Batxillerat. La secció 2 estudia dos arcs decoratius i proposa, principalment, activitats per a alumnat de la ESO i el Batxillerat, amb alguna activitat pel cicle superior de Primària. La secció 3 conté més complexitat. Estudia la rosassa central de la façana. En aquest cas, les activitats relacionades amb l'estudi de simetries es poden adaptar a molts nivells i, quant a les segones, podria ser bo restringir-les a fer-ne estudis parcials o a servir de context per a un treball de recerca de Batxillerat.

Finalment, la secció 5 està composta d'annexos on es troben materials per ser utilitzats en alguna de les activitats proposades i alguna qüestió relacionada amb contextos històrics sobre el mètode de l'anàlisi.

Quan s'ha cregut convenient s'ha introduït l'estudi d'algun element de la Catedral no inclòs a la façana o aliè a ella. S'ha fet així per tal d'insistir en el treball dels conceptes que es presenten i per donar una mostra de la gran varietat d'estudis que es poden emprendre des de l'observació d'objectes del nostre entorn.

En moltes de les exposicions que es fan i de les activitats que es proposen es presenten dissenys realitzats amb el programa GeoGebra. D'aquests uns són animats i d'altres no ho són. Els primers pretenen ser simulacions de construccions amb regle i compàs que es visualitzen pas a pas. Els segons són construccions acabades que poden ser útils per realitzar anàlisis de la seva construcció.

Sempre que ha semblat convenient i ha sigut possible s'han introduït enllaços entre parts del propi document de color vermell violat o dirigits a documentació externa de color verd. Aquest últims eren funcionals en l'època de redacció d'aquest preàmbul, el setembre de 2020. Entre els enllaços interns estan els de les activitats; els de tipus S22 porten a les indicacions de proposta de resolució de l'activitat que s'està llegint, en què el nombre indica el nombre de pàgina on aquesta es troba; els de tipus (E11) es troben en la indicació de la resolució i porten a la pàgina on es troba l'enunciat.

Per als interessats en els passejos matemàtics, aquest document forma part d'un conjunt de materials elaborats en relació al passeig matemàtic per la Tarragona romana i el Casc Antic celebrat en el marc del C²EM, Congrés Català d'Educació Matemàtica 2020. Ha consistit en un recorregut de quatre etapes, la Casa Castellarnau, la façana principal de la Catedral, la torre del Pretori i l'amfiteatre, en què s'han fet lectures des de les òptiques històrica i matemàtica. Els materials es poden trobar a <http://www.xtec.cat/~rnolla/PM2020/indexPM2020.htm>.

Tanco aquest preàmbul amb tres consideracions. La primera per manifestar el reconeixement de l'existència de perspectives diverses i complementàries a l'hora de fer lectures de la realitat; les quals promouen la capacitat de discerniment a través de les aparences. La segona per declarar que els materials elaborats s'han fet amb la intenció que el resultat sigui allò que hagués sigut bo trobar en els anys d'activitat com alumne i com professor i que en ocasions comptades i valuoses es va trobar; això sí, sense els defectes que allò que s'ha aportat té. La tercera i última per donar un agraïment als meus amics i col·legues Ramon Masip i Albert Armenteras que han tingut l'amabilitat d'intercanviar amb mi lectures, comentaris, opinions i treballs, la qual cosa fa possible que pàgines com aquestes puguin ser escrites.

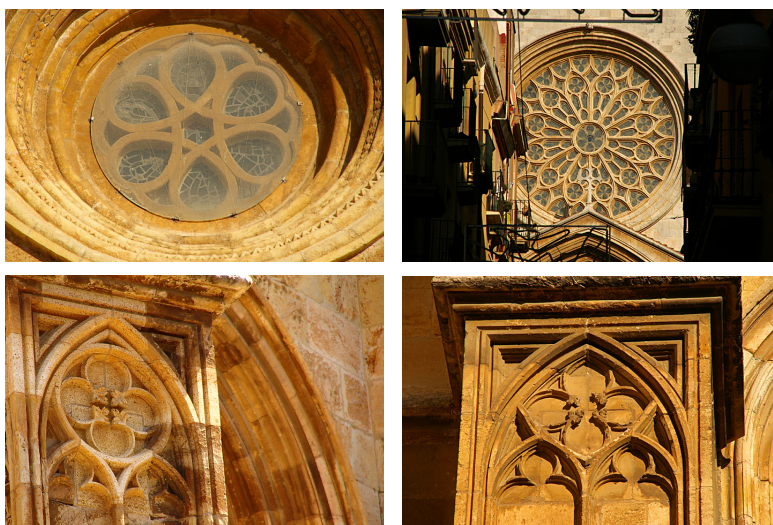
Desembre de 2020

Introducció

L'anàlisi geomètrica dels dissenys de rosasses i arcs ens aboca de ple a l'estudi de les seves simetries i tangències. Aquests elements apareixen amb finalitats arquitectòniques funcionals i ornamentals. Les rosasses són descendents dels òculs romans que proporcionaven llum i ventilació a les estances. Evolucionen en el romànic, amb elements de traceria de pedra calada creant una atmòsfera que convida al recolliment amb els contrastos de llum i foscor. Finalment culminen en les característiques de grandiositat i complexitat de disseny i l'acompanyament de fileres de grans finestrals del període gòtic, en què la llum assoleix cada cop més protagonisme; com si aquella actitud d'experiència interior primera fes eclosió per mostrar els seus fruits.³ Mentre, com passa a la façana de la catedral de Tarragona, s'alcen torres i agulles que es revesteixen d'ornaments sovint amb motius emmarcats per arcs apuntats.



Observarem i analitzarem la geometria d'algunes rosasses i arcs decoratius de la façana principal de la Catedral. Concretament, la gran rosassa central, la rosassa situada sobre la porta de l'Evangeli i un parell d'arcs de les torres laterals. Per als arcs apuntats treballarem amb la hipòtesi que són equilàters. Aquest estudi pot facilitar el disseny de projectes en que s'inclogui l'activitat geomètrica en contextos d'estudi del patrimoni ciutadà.⁴



³Per a un estudi del canvi d'estil que significà la transició al gòtic podeu consultar [SIMSON](#) [1962].

⁴Vegeu estudis i propostes relacionades a [SYKES](#) [1912], pàg. 151-326 i [TICÓ](#) [2004], pàg. 41-55, 99-112.

1 Rosassa sobre la porta de l'Evangeli

Si ens situem en el Pla de la Seu de cara a la façana de la Catedral, trobem la porta de l'Evangeli que tanca la nau lateral esquerra. Se'n data la construcció durant la prelatura de l'arquebisbe Bernat d'Olivella (1272-87). Hi ha indicis que el timpà, on s'hi representen l'Adoració dels Mags, l'Anunciació de l'Àngel a Maria i l'anunci als pastors, pogués ser obra del mestre Bartomeu de Girona.⁵ Damunt del timpà trobem una rosassa romànica de traseria de pedra calada i disseny senzill en front de la complexitat que presenten en el període gòtic. Observarem aquesta rosassa i proposarem unes hipòtesis per al seu traçat a partir de tangències entre dos tipus de circumferències.

1.1 Observació de simetries

Abans d'entrar en el tema de les tangències, és interessant observar-la des del punt de vista de les seves simetries i comparar-la amb les de la part central de la rosassa romànica del mur de l'absis central del monestir de Santes Creus.

Sembren del tot equivalents, però si afinem l'atenció hi ha diferències a més del nombre de lòbuls enllaçats. En els dos casos hi ha simetries rotacionals, però mentre en la de Tarragona, (sota a la dreta), hi trobem simetries axials, en la de Santes Creus, (a l'esquerra i al centre), aquestes desapareixen perquè en els encreuaments dels enllaços els lòbuls se solapen.



Tècnicament els grups de simetria de les dues rosasses, (grup de moviments que transformen una figura en ella mateixa), són grups de Leonardo que es caracteritzen per ser finits i tots els moviments que contenen tenen un punt fix compartit. Aquest punt s'anomena centre de simetria de la figura. Aquest grups poden ser de dos tipus, *cíclics*, si només tenen rotacions, com en el cas de Santes Creus, i *diedrals*, si a més de les rotacions tenen simetries axials com en el cas de Tarragona. Els símbols que els representen en els nostres dos casos són C_6 i D_8 .⁶

⁵Per a més detalls de l'arquitectura i el programa iconogràfic de tota aquesta façana podeu consultar [LIAÑO \[1989\]](#), [LIAÑO \[2019\]](#), [BATLLE \[1979\]](#), [GADEA \[2018\]](#) i [AUTORS DIVERSOS \[1995\]](#). Als interessats els pot agradar el contrast entre les diferents opinions que aquests autors citen o donen i, en el cas de Liaño, l'anàlisi sobre l'autoria dels diferents elements iconogràfics.

⁶Per al concepte i classificació de rosasses vegeu [MASIP \[2000\]](#), pàg. 81-83.

● Activitats per a nivells diversos

Es proposen activitats que s'hauran d'adaptar a diferents nivells d'alumnat. Per exemple, les activitats de plegar i retallar, —*kirigami*—, o d'acolorir, es creu que poden ser executades des del nivell de Infantil fins a nivell universitari, en aquest cas integrades en una activitat de teoria de grups.



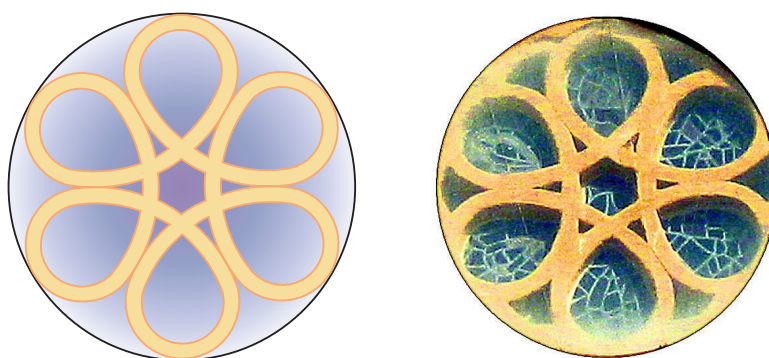
1.1.1. Elements de simetria i generació.

S₂₈

- a) Trobeu elements de simetria de la rosassa, (simetries axials i rotacions que la deixin superposada i coincident sobre ella mateixa).

Comproveu que si feu composicions de dues simetries, una rere l'altra, surt una altra de les simetries trobades, (podeu fer comprovacions amb els models de l'annex 5.3).

Construïu una taula de doble entrada en què es doni el resultat de compondre dues qualssevol d'aquestes simetries.



- b) Imagineu i descriuiu dues circumferències a partir de les quals es pugui dibuixar un motiu que permeti generar tota la rosassa aplicant-li rotacions.



1.1.2. Acoloriu al vostre gust el model de rosassa de l'annex 5.4.

S₃₀



1.1.3. Dibuixeu la rosassa a mà alçada; pot ser útil marcar prèviament uns punts que serveixen de referència. Si no aconsegiu un resultat satisfactori, utilitzeu el model i els punts pautaats de l'annex 5.5.

S₃₀



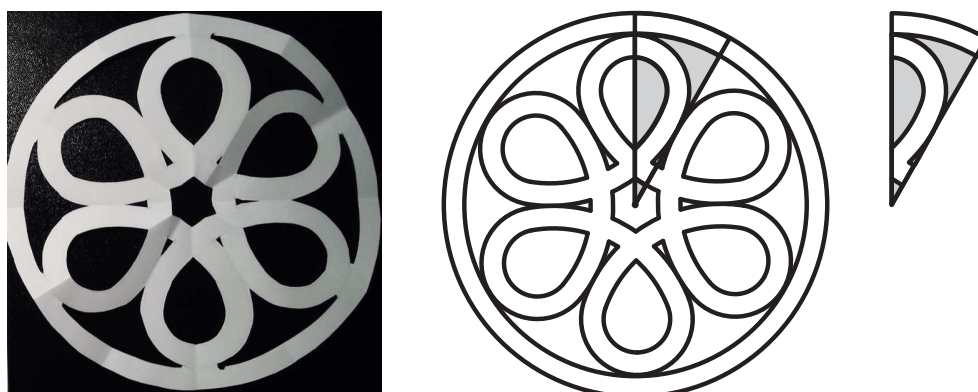
1.1.4. Amb les pautes mostrades en l'annex 5.6, dibuixeu la rosassa amb regla i compàs.

S₃₀



1.1.5. Amb el model de l'annex 5.7, plegueu el cercle en dotze sectors iguals, tal com s'indica en la imatge de sota. Després retalleu i descarteu la regió grisa i, finalment, desplegueu i observeu la rosassa obtinguda.

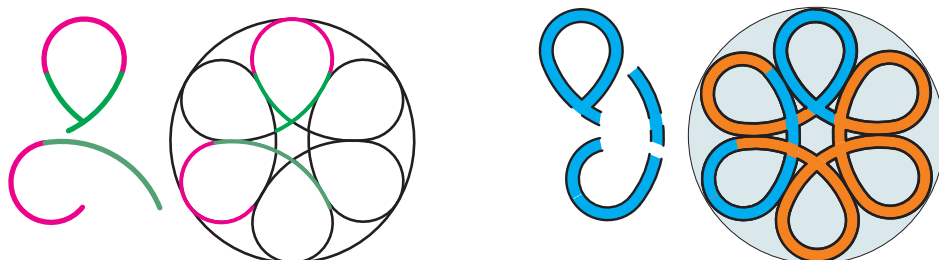
S₃₀



1.2 Tangències de la rosassa, hipòtesi i anàlisi

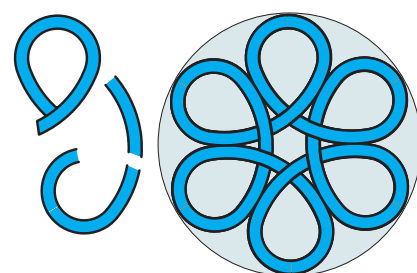
• **Tria d'un motiu per generar la rosassa.** Una possible actuació pot ser la de considerar un motiu que permeti generar la rosassa a partir de la seva simetria rotacional. En aquest cas els angles de gir que deixen la figura igual són de $n \cdot 60^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dues possibilitats de tria d'aquest motiu les veiem en el gràfic adjunt, en què també es mostrem dues possibilitats de tracia, sense gruix i amb gruix.



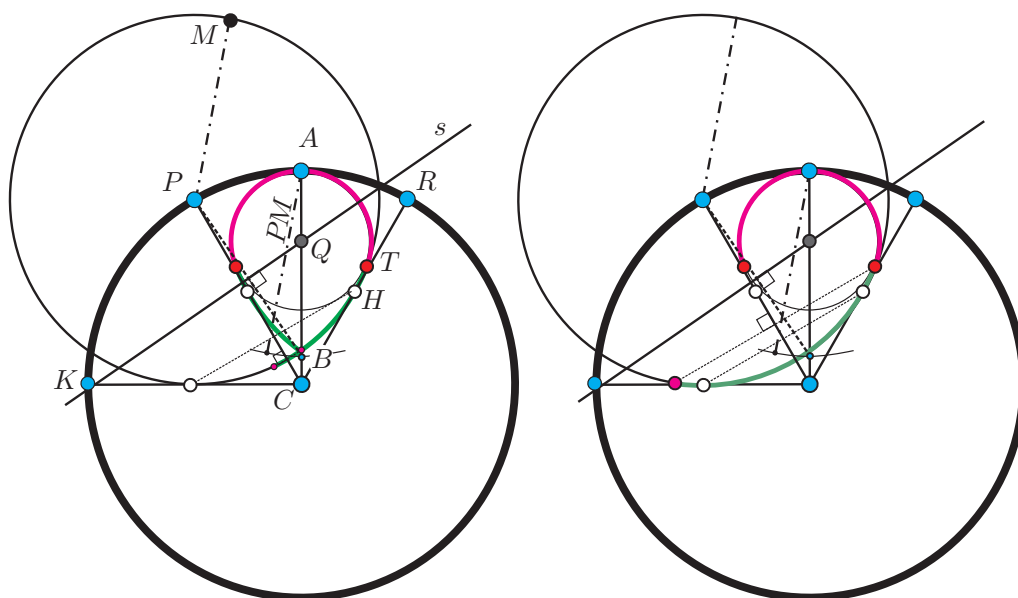
En la imatge del costat observem les petites diferències en el perímetre del motiu escollit en la tracia amb gruix, si la rosassa hagués tingut només simetria rotacional.

• **Una ullada a la construcció.** Sota d'aquestes línies es mostren les línies auxiliars de construcció d'una de les parts més complexes d'aquests motius. En farem una anàlisi més avall.



• **Establiment d'hipòtesi.** Adoptem la hipòtesi que els motius de la tracia estan determinats per dues circumferències tangents. Una d'elles té el centre P sobre el perímetre de la rosassa de centre C i és tangent a dos radis, CR i CK de la rosassa separats per 120° . L'altra és tangent a aquesta, té el centre sobre el radi-bisectriu CA dels radis CR i CP , i passa per l'extrem A del radi CA . S'observa que el problema que s'hi presenta és,⁷

Traçar una circumferència de centre Q sobre una recta CA donada, que passi pel punt A donat i sigui tangent a la circumferència (P, PM) donada.



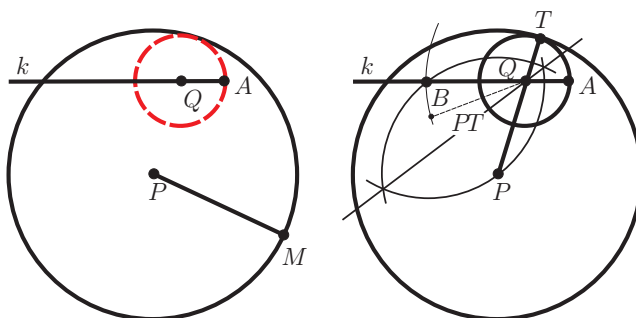
⁷La notació (A, r) o (A, FG) indicarà a partir d'ara la circumferència de centre A i radi r o radi FG .

• **Anàlisi del problema.** Repetim l'enunciat,⁸

Donada la circumferència (P, PM) la recta k i el punt $A \in k$, construïu la circumferència (Q, QA) amb centre sobre k i que passa per A .

Anàlisi

- Suposem el problema resolt.
- Sabem que P , Q , i el punt de tangència T estan alineats.
- Si fem $(A, PT) \cap k = B$ obtenim que $QB = AB - AQ = TP - TQ = QP$. (*) **Punt clau**
- Llavors $Q \in$ mediatriu(B, P) i l'anàlisi és acabada.



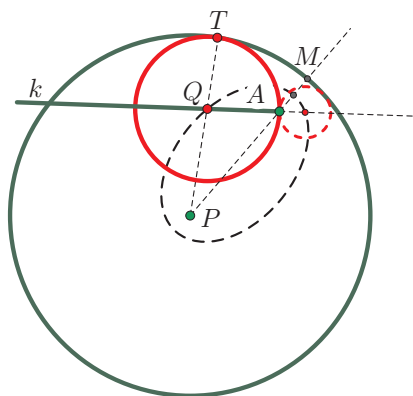
Síntesi. La circumferència buscada és (Q, QA) i a partir d'aquí la construcció de la solució és immediata. Tracem,

- La circumferència (A, PM) de centre A i radi PM .
- La intersecció B de (A, PM) amb la recta k .
- La mediatriu del segment BP .
- La intersecció Q de l'anterior mediatriu amb la recta k donada.
- La circumferència (Q, QA) de centre Q que passa per A .

(*) **Punt clau.** La consideració del trasllat del radi de la circumferència (P, PM) a partir de P sobre la recta k , no és d'intuïció immediata. Pot resultar després de fer moltes proves i traçats. Ara bé si tenim al nostre abast coneixements de propietats sobre còniques, concretament sobre l'el·lipse, podem tenir una intuïció bastant immediata d'aquest punt de l'anàlisi.⁹

Efectivament, el fet que el punt Q , centre de la circumferència cercada, satisfagui la propietat $PQ + QA = PT$, en què P , A i el radi PT són coneguts, permet traduir el problema de trobar Q en els termes següents.¹⁰

Donada l'el·lipse de focus P i A i eix major el radi $PT = PM$ del cercle, trobar la seva intersecció amb la recta k que passa pel focus A . (La intersecció trobada serà el centre Q de la circumferència.)



⁸En totes les construccions en què hi ha dos circumferències tangents implicades tenim present la propietat d'alineació dels seus centres i el punt de tangència.

⁹Aquesta idea és deguda al professor Ramon Masip. En l'activitat 1.2.2 trobareu l'anàlisi que s'havia fet per resoldre el problema abans de tractar-ho amb ell.

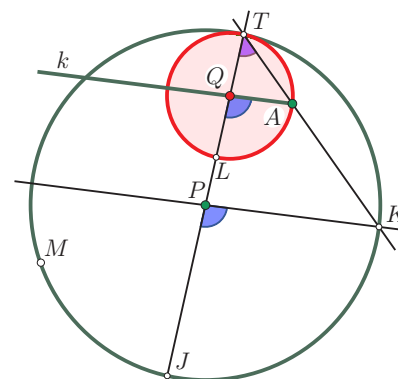
¹⁰Per a la resolució d'aquesta qüestió i vegeu l'activitat 1.2.4. En l'activitat 1.2.3 trobareu una aproximació a l'adquisició d'aquesta intuïció per una altra via, l'ús del llenguatge algebraic.

Activitats per a Secundària

 **1.2.1.** (ESO i BAT) Feu la construcció de la rosassa a partir de la informació recollida en aquesta secció.

- Amb regla i compàs.
- Amb el programa GeoGebra.

 **1.2.2.** Proposem de fer la construcció del problema de tangències d'aquesta secció a partir d'una anàlisi geomètrica alternativa. Aquesta consistirà en determinar el punt T de tangència a partir de l'observació ordenada de les línies de la figura adjunta i els angles que determinen. (Suposant el problema resolt, les línies s'han traçat en aquest ordre, la recta TP , la recta TA , que talla (P, PM) en K i la recta PK .)



 **1.2.3.** (BAT) Feu un estudi analític del problema de tangències tractat en aquesta secció. Amb això volem dir que feu una anàlisi geomètrica en llenguatge algèbric.¹¹ Aquest estudi us ha de portar a l'obtenció d'una condició algèbrica per al radi de la circumferència buscada i, per tant, un mètode per al seu traçat. Esbrineu si la condició trobada us pot portar a les etapes de construcció proposades en la síntesi d'aquesta secció.

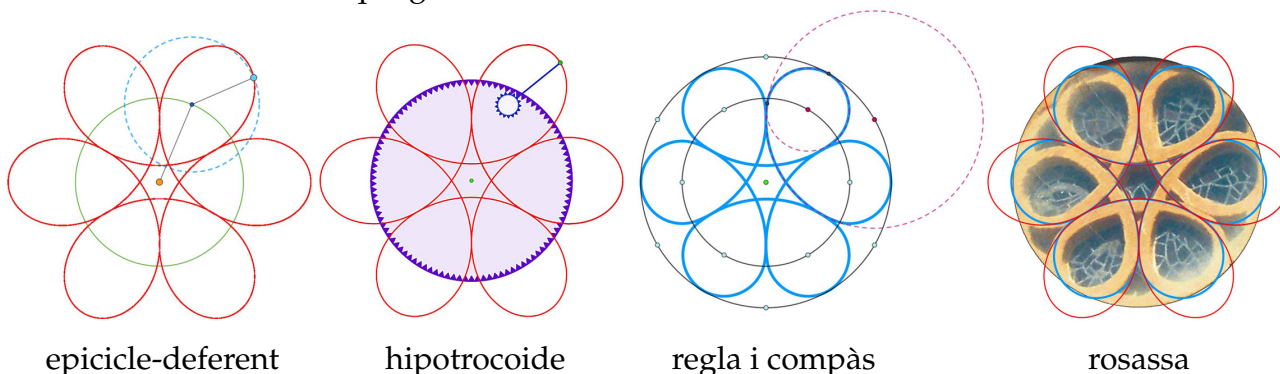
 **1.2.4.** (BAT) Resoleu el problema sobre l'el·lipse enunciat en aquesta secció i justifiqueu les propietats utilitzades.

¹¹Aquí hi ha implicat el significat del concepte *anàlisi* originat en la Grècia clàssica i la seva evolució, amb la introducció del llenguatge algebri en el segle XVII, per obra de René Descartes. Vegeu l'annex 5.1 en relació a aquest tema.

1.3 La rosassa com a corba hipotrocoide

Durant la contemplació de la rosassa de la porta de l'Evangelí, emergeixen intuïcions diverses de cara a la seva generació i el seu simbolisme. Algunes apareixen després d'acudir al nostre magatzem particular de coneixements, d'altres afloren de manera sorprenent, sense fer soroll. Fins ara hem treballat amb la intuïció en què, per al seu disseny, s'implica el concepte de tangència, però una de més dinàmica pugna per fer-se un lloc en la nostra ment. Neix mentre seguim el seu traçat a mà alçada i sentim estar girant al voltant d'un punt que gira al voltant d'un altra punt. Aquest sentiment es transforma en una idea que manifesta que més enllà de la nostra petita concepció del món, sempre enfocant-lo des dels mateixos punts de vista, hi pot haver un altre punt de vista, un altre centre d'observació, des del qual es pot adquirir una visió més global. Abandonant la interpretació simbòlica i acudint a la mirada matemàtica, aquesta idea ve molt ben explicada pel model epicicle-deferent utilitzat per Ptolemeu en la seva *Sintaxi Matemàtica* o *Almagest*.¹² La pregunta que ens fem és: aquesta aproximació al disseny de la rosassa, que podríem qualificar de dinàmica i molt directa si es disposa de l'instrument de construcció adequat, és més encertada que la treballada anteriorment a partir de circumferències tangents, o el seu valor rau més en el seu simbolisme?

Per a contestar-la, en termes d'aproximació al disseny, es tracta de generar la corba mitjançant el sistema epicicle-deferent, en què els sentits de gir dels dos punts són contraris. També, tenint en compte que la corba resultant és una *hipotrocoide*, es pot generar per un punt lligat exteriorment a un cercle que gira sense lliscament a l'interior d'un altre cercle.¹³



● Activitats

 **1.3.1.** (ESO i BAT) Dissenyeu amb el GeoGebra, mitjançant el sistema epicicle-deferent, una aproximació a la rosassa. S₃₃

 **1.3.2.** (BAT) Trobeu les equacions d'una hipotrocoide i dissenyeu una aproximació a la rosassa amb el sistema consistent a fer rodar un cercle sense lliscament interiorment a la circumferència d'un altre cercle. Compareu-lo amb el disseny obtingut amb regla i compàs a la secció 1.2. S₃₃

¹²A l'annex 5.8 trobareu el disseny d'una activitat experimentada a 3r d'ESO consistent en la creació d'un document GeoGebra en què es generen tot tipus de trajectòries a partir d'aquest model. També, a l'annex 5.9, trobareu una altra activitat per a Batxillerat on s'estudia analíticament un tipus de trajectòria concreta creada amb aquest model la qual després es generalitza.

¹³Si el punt es troba sobre la circumferència del cercle, la hipotrocoide s'anomena *hipocicloide*; si és interior al cercle s'anomena hipocicloide escurçada i si és exterior hipocicloide allargada. La joguina anomenada *espirògraf*, vegeu IBÀÑEZ [2020], permet dibuixar hipotrocoides.

2 Arcs decoratius

En les diferents cares de les torres laterals trobem una bona col·lecció d'arcs decoratius. N'hi ha de repetits però hi ha prou varietat per a plantejar-se qüestions de dificultat diversa.

2.1 Arc-I

Establim les hipòtesis que està compost per un arc apuntat equilàter i dos arcs apuntats equilàters iguals, tangents entre si i tangents a l'arc principal interiorment en el seus suports; la mediatriu del segment base és un eix de simetria vertical; finalment, una circumferència contacta tangencialment amb els tres arcs en l'espai interior que aquests delimiten. No considerem els lòbuls interiors, però trobareu una construcció d'aquests a <https://www.geogebra.org/m/swtfzqqc> i també a <https://www.geogebra.org/m/h7jywu4x>.

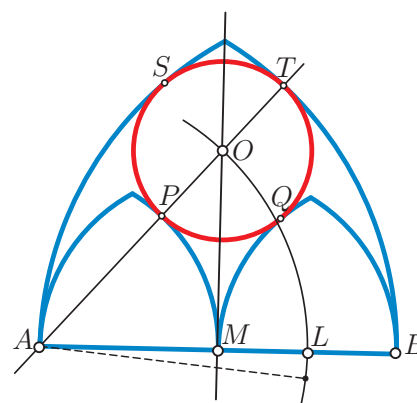


Dades. Tres arcs apuntats equilàters, tangents en els seus contactes de la manera descrita.

Problema. Construcció amb regla i compàs d'una circumferència tangent als tres arcs en els punts P , T , Q i S .

Anàlisi. Suposem el problema resolt i considerem la unitat de mesura AM .

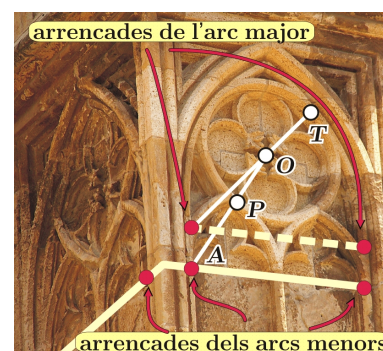
- Per simetria, O pertany a la mediatriu de AB .
- La tangència implica que P i T estan alineats amb A i O .
- Llavors, $\begin{cases} AP = AM = 1 \\ AT = AB = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PT = AT - AP = 1 \\ OP = \frac{1}{2} \\ AO = \frac{3}{2} \end{cases}$
- Per tant, el centre O pertany a la circumferència (A, AL) , en què L és el punt mitjà de MB i l'anàlisi s'ha acabat.



Síntesi. La circumferència buscada és (O, OP) i passem a la construcció. Tracem,

- Els arcs apuntats equilàters sobre el segment AB i el seu punt mitjà M .
- El punt mitjà L de MB i el cercle (A, AL) .
- La mediatriu del segment AB i la seva intersecció O amb (A, AL) .
- El segment AO i la seva intersecció P amb l'arc equilàter sobre AM .
- La circumferència (O, OP) .

• **Una observació final.** La hipòtesi utilitzada no s'adapta exactament al disseny d'un arc similar d'una altra torre que veiem a la imatge adjunta. Aquí els dos arcs adjacents arrenquen de la mateixa altura. Veurem en la secció 2.2 que en l'arc de l'esquerra les arrencades de l'arc major i els dos menors no són les mateixes, les últimes estan "més avall", sobre la prolongació en línia recta de les arrencades del major. Llavors si fem el mateix en l'arc de la dreta de la torre, l'anàlisi és molt diferent perquè els punts A , P , O i T no estan alineats. Estudiarem aquesta situació en l'activitat 2.1.5



• Activitats per a nivells diversos



2.1.1. (Tots els nivells) Acoloriu el primer model de l'annex 5.10.

S₃₅



2.1.2. (Primària i Secundària)

S₃₅

- Descriuiu els elements de l'arc estudiat en primer terme i feu-ne una construcció a mà alçada.
- Feu una construcció de l'arc amb regle i compàs de tots els elements amb excepció de la circumferència, la qual aproximareu fins aconseguir un resultat acceptable.



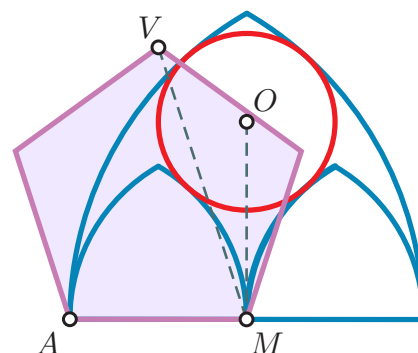
2.1.3. (ESO i BAT) Feu la construcció de l'arc a partir de la informació recollida en aquesta secció.

S₃₅

- Amb regle i compàs.
- Amb el programa GeoGebra.



2.1.4. (4t d'ESO i BAT) Si considerem, com en l'anàlisi de la pàgina anterior, la unitat de mesura igual a AM , calculeu la mesura exacta del segment MO i esbrineu quina diferència hi ha entre aquesta mesura i la de la diagonal VM d'un pentàgon regular construït sobre AM . Comproveu-ho amb les eines de mesura del programa GeoGebra.



S₃₅

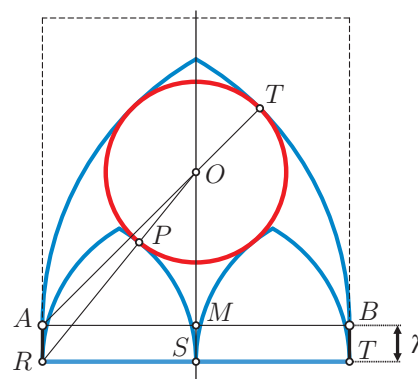


2.1.5. (4t d'ESO i BAT) Feu un estudi analític del problema que es proposa en l'observació final de la pàgina 14. Observeu que les arrencades de l'arc major i dels dos menors són diferents. Considereu-les situades com les trobades més endavant a la secció 2.2, pàgina 16, en què s'ha obtingut $\lambda = \sqrt{5} - 2$. Una proposta de treball és la d'aplicar el teorema de Pitàgores sobre $\triangle AMO$ i $\triangle RSO$, i considerar AM com a unitat de mesura.

A partir del resultat dissenyeu una construcció amb el programa GeoGebra.

Observacions.

- Per a una altra construcció amb regle i compàs, en la secció 3, a partir de la pàgina 23, es trobarà una anàlisi estrictament geomètrica més general de les tangències implicades.
- Queda clar que la hipòtesi que plantegem està feta "a ull", basada en la visió que en tenim des del terra. Per a una hipòtesi més aproximada caldria prendre diverses mesures directament sobre els arcs.



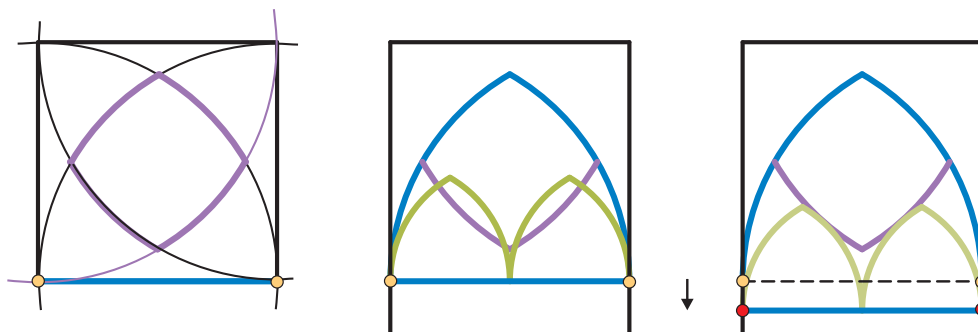
S₃₅

2.2 Arc – II

Observem un arc semblant a l'estudiat anteriorment en què el cercle interior ha estat substituït per un quadrilàter curvilini. La hipòtesi que proposem per a la construcció d'aquest quadrilàter és que aquest s'obté de la intersecció de dues *vesica piscis* inscrites en un quadrat seguint la direcció de les diagonals. En aquest disseny hi ha una dificultat afegida: si tracem els tres arcs apuntats equilàters com en el cas anterior no s'aconsegueix la tangència amb el quadrilàter curvilini.



El que es proposa per aconseguir la tangència entre el quadrilàter i els dos arcs menors, és prolongar els suports de l'arc major per situar els dos arcs menors "més avall". Llavors, per realitzar la construcció, el problema a resoldre és el de calcular aquest desplaçament.



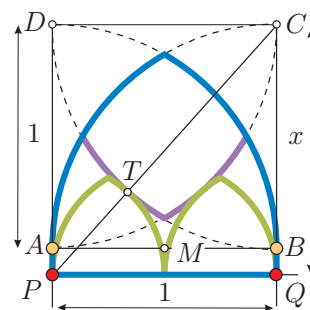
Dades. Tenim el quadrilàter curvilini, determinat per la intersecció de dues *vesica piscis*, inscrit en un arc apuntat equilàter. També tenim dos arcs apuntats equilàters menors i tangents entre si, tal com s'ha descrit, que han de ser tangents en un punt indeterminat de la prolongació en línia recta de les arrencades del major.

Problema. Trobar la posició de la prolongació de l'arrencada per tal que els arcs menors siguin tangents al quadrilàter curvilini.

Anàlisi. Suposem el problema resolt i considerem la unitat de mesura igual a AB i P i Q els punts a obtenir en la prolongació de les arrencades.

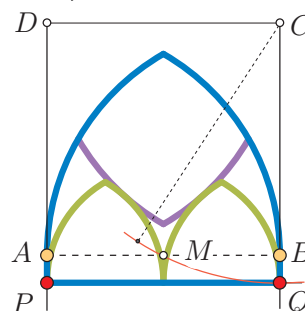
- Anomenem $x = CQ$.
- La tangència implica que P , T i C estan alineats.

- Llavors, pel teorema de Pitàgores en $\triangle PQC$, $x = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$
- L'última expressió ens permet construir el punt Q i l'anàlisi s'ha acabat.



Síntesi. La línia d'arrencada partirà de Q . Passem a la construcció i tracem,

- El quadrat inicial $\square ABCD$ i la intersecció de les dues *vesica piscis*.
- El punt mitjà M de AB . Llavors $CM = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = CQ$.
- El cercle (C, CM) i la intersecció Q amb la prolongació de CB .
- Construïm el segment PQ i la resta del disseny és immediata.



● Activitats per a nivells diversos



2.2.1. (Tots els nivells) Acoloriu el segon model de l'annex 5.10.

S₃₇



2.2.2. (Primària i Secundària)

S₃₇

- Descriuiu els elements de l'arc feu-ne una construcció a mà alçada.
- Feu una construcció exacta amb regle i compàs de l'arc apuntat major i la *vesica piscis*. Aproximeu la posició de la base PQ de manera que quan traceu els arcs apuntats menors resultin tangents al quadrilàter curvilini.
- Feu el mateix amb el GeoGebra.



2.2.3. (ESO i BAT) Feu la construcció de l'arc a partir de la informació recollida en aquesta secció.

S₃₇

- Amb regle i compàs.
- Amb el programa GeoGebra.



2.2.4. (ESO i BAT) Per fer una construcció alternativa que no requereixi el teorema de Pitàgores per ser justificada, utilitzeu que la longitud de la diagonal CP de la figura final és coneguda.

S₃₈

3 Rosassa de la part central de la façana

En l'observació d'aquesta rosassa s'haurà notat la dificultat del seu disseny, no així l'estudi de la seva simetria. Això fa que, de cara a l'activitat regular amb estudiants, les activitats de simetria es puguin adaptar a molts nivells però pel que fa al disseny el seu interès sigui qüestionable. Tot i així, si es divideix aquest disseny en parts, amb un guiatge adequat, l'estímul de cara al seu tractament apareix. També pot ser interessant per a propostes de treball de recerca de Batxillerat relacionats amb problemes de tangència.¹⁴ Aquí es presentaran alguns aspectes rellevants de cara a la seva construcció amb regla i compàs.

La part central de la façana fou construïda posteriorment a les façanes laterals romàniques i és totalment gòtica. Data del segle XIV, amb algunes escultures de construcció posterior a la consagració de la Catedral el juny de 1331. La rosassa es troba lleugerament descentrada damunt del ràfec que protegeix l'arc amb arquivoltes que conté el timpà, el mainell amb una Mare de Déu amb Nen i una representació del judici final damunt les portes. Presenta un cercle central amb sis lòbuls interiors des del que s'obren dotze sectors radials que es tanquen amb arcs apuntats i contraposats a vint-i-quatre arcs apuntats que descansen interiorment al cercle exterior.



3.1 Simetries

Podem observar que el seu grup de simetria és el grup dièdric D_6 de 12 elements. Aquest consisteix en les rotacions de 0° , 60° , 120° , 180° , 240° i 300° , i les sis simetries axials del nucli circular central. Si prescindim del disseny del nucli central, s'obté el grup de simetria dièdric D_{12} de 24 elements, amb les dotze rotacions d'angles múltiples de 30° i dotze eixos de simetria, sis que contenen els nervis que separen els dotze sectors radials i els sis eixos de simetria d'aquests sectors.



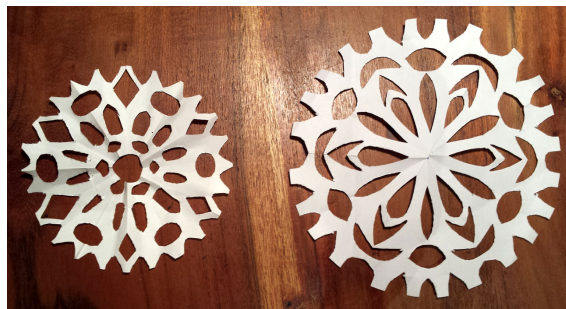
¹⁴Un exemple podria ser un treball relacionat amb l'anàlisi dels problemes de l'obra desapareguda *Tangències* d'Apol·loni de Perge (III aC) que cita Pappos d'Alexandria (III-IV AD) en el llibre VII de la seva Col·lecció Matemàtica; un altre, la versió d'un d'aquests problemes que trobem en la correspondència de Descartes amb la princesa Elisabeth de Bohemia; un últim exemple podria ser la col·lecció de problemes de tangències que trobem en el disseny de sangakus al Japó del període EDO. Vegeu [ECKE \[1933\]](#), vol 2, pàg. 483-485, [AUTORS DIVERSOS \[2011\]](#), pàg. 562-569, [ADAM-TANNERY \[1901\]](#), IV, pàg. 37-50 i [FUKAGAWA-ROTHMAN \[2008\]](#).

• Activitats

 **3.1.1.** En aquesta activitat podeu treballar sobre una fotografia o esbós de la rosassa que hagueu elaborat *in situ* o sobre la imatge de l'annex 5.11. Esbrineu a quin moviment del grup D_{12} , sobre la rosassa sense el nucli circular central, equival la composició d'una simetria axial d'eix vertical i una rotació de 120° . I si apliqueu els dos moviments canviant l'ordre, a quin moviment és equivalent? Dels resultats, podeu inferir alguna afirmació sobre la commutativitat de la composició? Podeu trobar una composició de gir d'angle major que 0° i simetria axial que sigui commutativa? En cas afirmatiu descriviu-la.

S₃₈

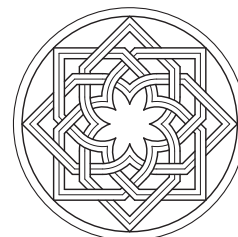
 **3.1.2.** En la imatge adjunta es mostren unes rosasses elaborades plegant paper segons angles adequats i retallant-lo, inspirades en la rosassa central, encara que amb molta menys complexitat. Esbrineu les seves simetries i elaboreu-ne una amb les mateixes simetries que s'inspira també en el disseny de la rosassa central.



S₃₈

 **3.1.3.** Fem una petita escapada a una altre sector de la Catedral, que ens permetrà reforçar l'estudi de simetries. En el Claustre es poden observar una col·lecció de petites rosasses de traceria calada. S'agrupen en parelles, sota arcs apuntats i sobre grups de tres arcs de mig punt. Es proposa de treballar amb la mostrada a sota, en la què es percep la influència mudèjar i islàmica en la seva traceria amb llaços, basada en el polígon (8,2) que alguns anomenen estrella tartèssia.

S₃₈

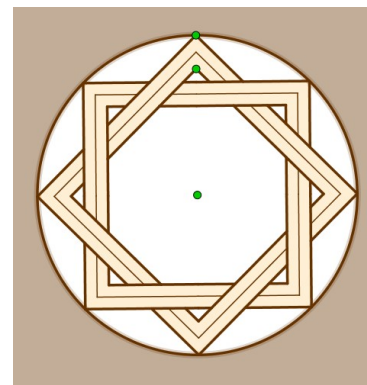


- Acoloriu el model de l'annex 5.12.
- Estudieu les simetries de la rosassa, (podeu observar el model de l'annex 5.12). Feu un esbós d'un motiu mínim que la generi per rotació.¹⁵
- Retoqueu el motiu mínim per tal d'afegir simetries axials al seu grup de simetria.

¹⁵Per a un estudi de totes les rosasses del Claustre consulteu el treball de recerca de Batxillerat de BLAY [2007].

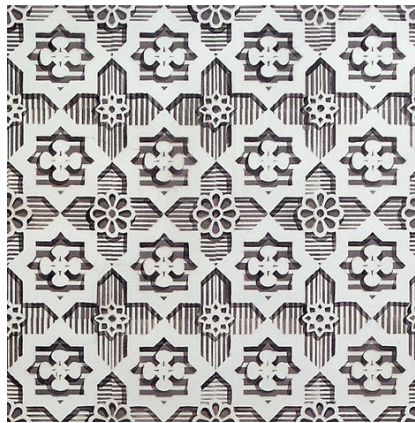


3.1.4. Tartessos fou una cultura que s'ha impregnat de molts components mítics. Se la situa contemporània amb les cultures fenícia i grega i localitzada en una regió que s'estendria per la desembocadura del riu Guadalquivir. Com s'ha indicat en l'activitat anterior, hi ha hagut una tendència a incorporar l'estrella octogonal (8,2) com un símbol propi d'aquesta cultura. Però segons GONZÁLEZ-CAMPOS [2017], l-pàg. 364 “esta representación es una completa invención actual que no se puede relacionar ni con las fuentes clásicas, ni con los historiadores antiguos o modernos, pero que ha sido aceptada por la sociedad, y que así lo identifica”.



S₃₉

Sense entrar més a fons en aquesta qüestió ens proposem de treballar amb aquest disseny que es pot trobar en diferents indrets d'Andalusia, de la península i, fora d'ella, en el món islàmic. En teniu una representació en la imatge adjunta i en les fotografies d'una decoració de la façana d'una casa del carrer Méndez Núñez de Tarragona.¹⁶

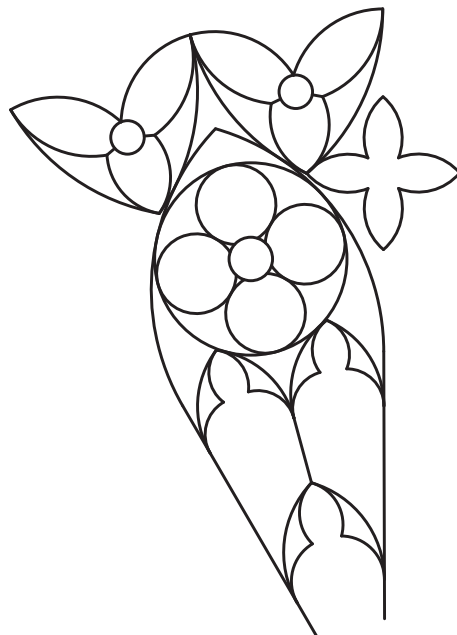
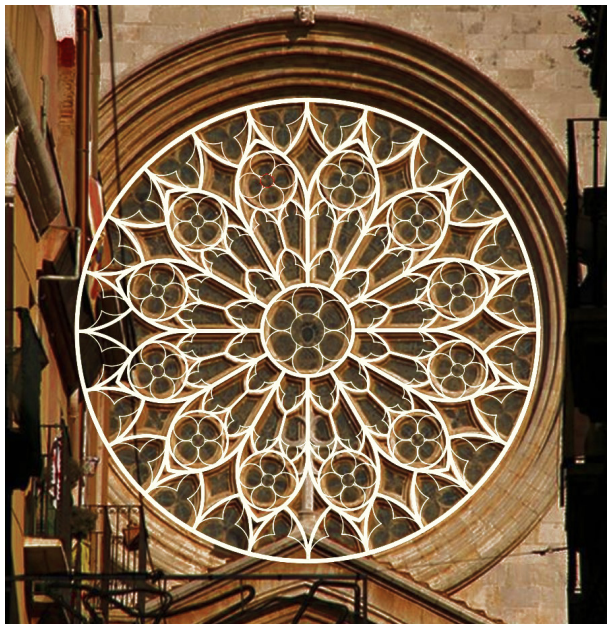


- Estudieu les simetries de l'estrella tartèssia de la primera imatge i les de l'estrella tartèssia que trobem en el disseny del mosaic del carrer Méndez Núñez.
- Elaboreu un document GeoGebra en què es visualitzi l'estrella de la primera imatge i s'indiqui el motiu mínim que la genera per rotació.
- Estudieu les simetries del mosaic del carrer Méndez Núñez i feu-ne una reproducció amb el programa GeoGebra.

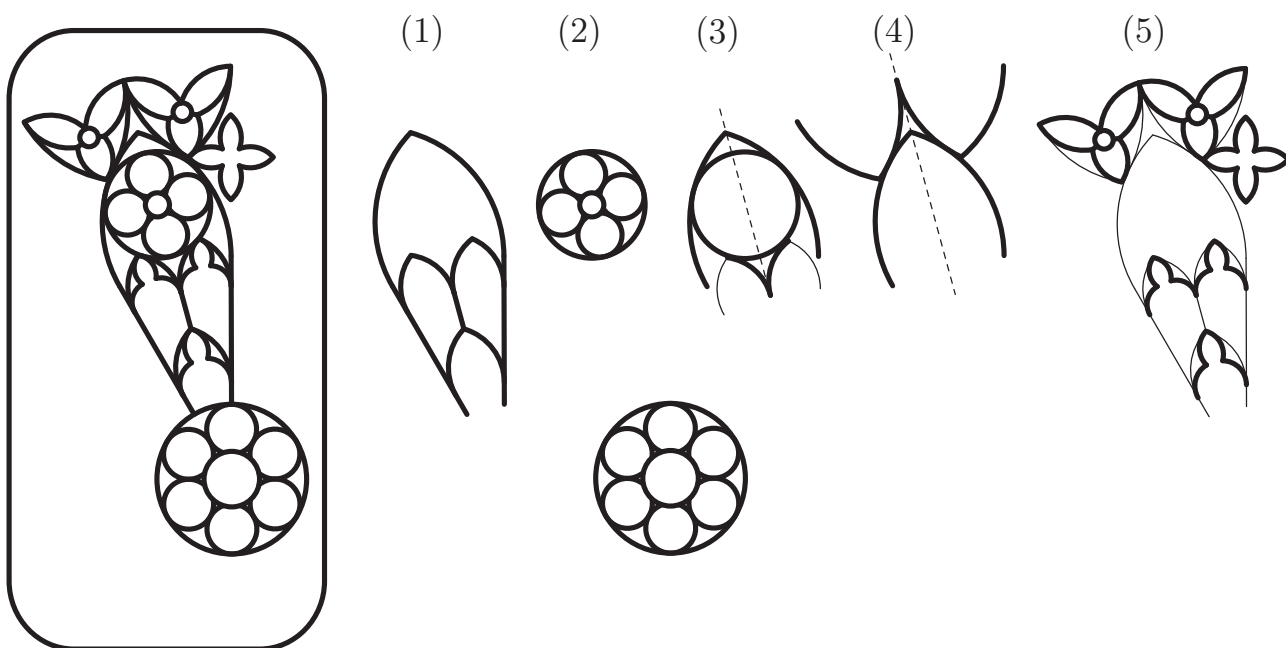
¹⁶En relació a la cultura i civilització tartèssia podeu consultar GONZÁLEZ [2014] i GONZÁLEZ-CAMPOS [2017].

3.2 Tangències i contactes

En aquest cas, per la seva complexitat, és important conservar molt present la imatge de la rosassa. A la dreta observem el motiu mínim, si no considerem les simetries axials, que permet generar per rotació els dotze sectors amb els seus arcs apuntats i els vint-i-quatre arcs apuntats contraposats tancant el perímetre.

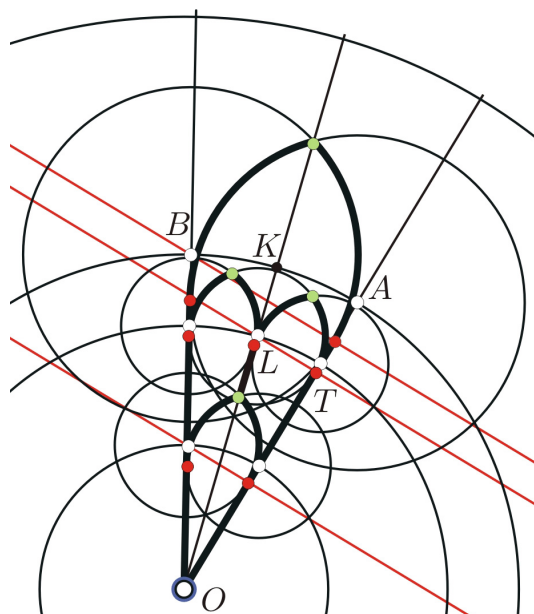


A la part esquerra de la imatge de sota, emmarcat, observem el motiu mínim junt amb el nucli central amb sis cercles tangents. La proposta és dividir l'estudi en cinc apartats que hem denotat amb els nombres que van de l'1 al 5. A continuació i en les activitats donarem indicacions per als tres primers apartats i podreu trobar una aproximació a l'estudi del disseny global de la rosassa, tant dels tres apartats tractats com dels dos últims, en el document GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/uvb5vxad>



• **Apartat 1.** Tracem tres circumferències de centre O en el centre de la rosassa i interiors al seu perímetre. Sobre aquestes situem, en color blanc, els set centres dels tres nivells d'arcs apuntats del sector radial. Observem que,

- Els sectors $\triangle AOB$ resulten de dividir el cercle en dotze parts iguals, (n parts per a altres ordres de simetria rotacional), i en cada sector es considera la bisectriu AK .
- Comptabilitzem quatre arcs apuntats en cada sector:
 - a) Dos han de ser tangents a OA i OB .
 - b) Un ha de ser tangent a OB i OK .
 - c) Un ha de ser tangent a OA i OK .



A partir d'aquí, el problema de construcció és el mateix en tots els casos:

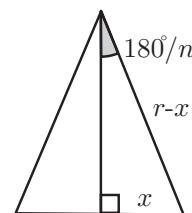
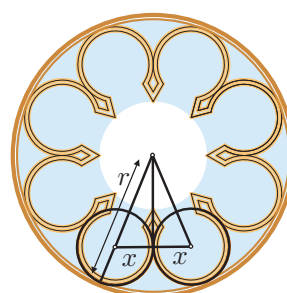
Traçar una circumferència de centre donat que sigui tangent a una recta donada.

En la imatge superior dreta, en vermell, s'han traçat tres línies perpendiculars sobre OA des de tres i s'han obtingut tres punts de tangència, en vermell, dels arcs apuntats. La resta de tangències s'obté igual. Els punts verds són els vèrtexs de cada arc apuntat.

• **Apartat 2.** Per traçar els sis lòbuls iguals i tangents interiorment al cercle central, i els quatre dels cercles interiors als dotze sectors, treballem amb la hipòtesi que són tangents entre si. En aquests dos casos no cal utilitzar la trigonometria però és còmode i ho farem a partir del cas general de n lòbuls, (en la imatge $n = 8$).

Suposem el problema resolt. A partir del radi r del cercle on estan inscrits els n lòbuls, volem determinar el valor x del seu radi amb la hipòtesi que són tangents entre si. Llavors,

$$\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{x}{r-x} \iff x = \frac{r \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{1 + \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}.$$



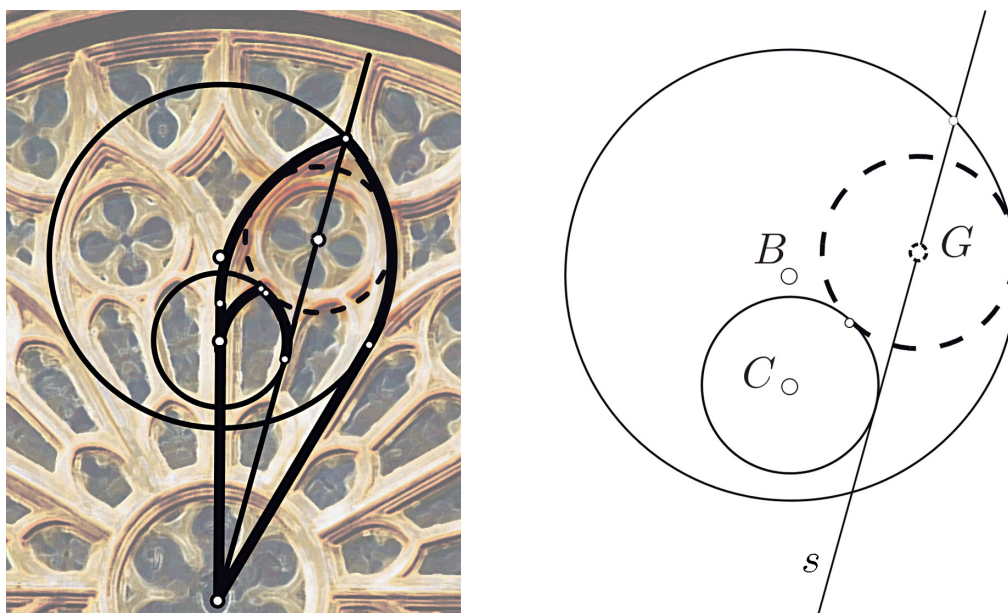
Exemples de casos particulars són per a $n = 4 \implies x = (\sqrt{2} - 1)r$, i per a $n = 6 \implies x = \frac{r}{3}$.

La construcció és proposa a l'activitat 3.2.2.

• **Apartat 3.** En aquest cas el problema que es presenta es troba en la circumferència interior dels sectors radials i és de major complexitat. L'anàlisi que proposarem no serà algèbric sinó estrictament geomètric. És d'interès de cara a algun projecte o treball de recerca de batxillerat per introduir l'estudi de tangències contextualitzat en l'observació del patrimoni. També es pot constituir en un element de motivació de cara a la introducció dels conceptes de potència d'un punt, eix radical i centre radical d'una, dues i tres circumferències respectivament.

Insistim que el que ens interessa és fer-ne l'anàlisi pel seu interès en l'enfocament *heurístic* de la resolució de problemes.¹⁷ Problemes d'aquest tipus els podem trobar resolts en manuals o llocs web dedicades al Dibuix tècnic. El cas és que, igual que en els clàssics grecs, en molt poques ocasions proporcionen el mètode de descobriment o una anàlisi, es limiten a donar-ne una construcció i, a diferència d'ells, no demostren que és correcta la qual cosa podria donar pistes sobre el camí de descobriment.

En el disseny que ens ocupa, observem que s'ha de construir una circumferència tangent als dos arcs apuntats, amb el centre sobre una recta. En la figura els objectes donats estan traçats en línia contínua i la circumferència desconeguda en línia discontinua.



Així, a partir de les figures, el problema es pot traduir de la manera següent:¹⁸

Donades dues circumferències i una recta, construir una circumferència tangent a les dues amb el centre sobre la recta.

¹⁷Recordem la definició *moderna* que dona POLYA [1945], pàg. 129-130 de l'edició de 1957 i pàg. 102 de la reimpressió de 1994 de la traducció espanyola de 1965, del terme *heurística*: "disciplina que estudia les operacions mentals típicament útils en els processos de resolució de problemes". I una mica abans dóna una concepció més clàssica del terme com una "ciència que tenia per objecte l'estudi de les regles i els mètodes del descobriment i de la invenció". Afegeix que "un estudi seriós de l'heurística no ha de descuidar les aportacions fetes per autors com Pappos, Descartes, Leibniz i Bolzano, però ha de fixar-se més en l'experiència objectiva. L'experiència en la resolució de problemes i en l'observació d'altres persones resolent problemes ha de ser la base sobre la que es construeix l'heurística". Tot això està d'acord amb un dels objectius d'aquest document, l'adopció de l'anàlisi, —vegeu l'annex 5.1—, com un dels mètodes heurístics a utilitzar de cara a la resolució de problemes.

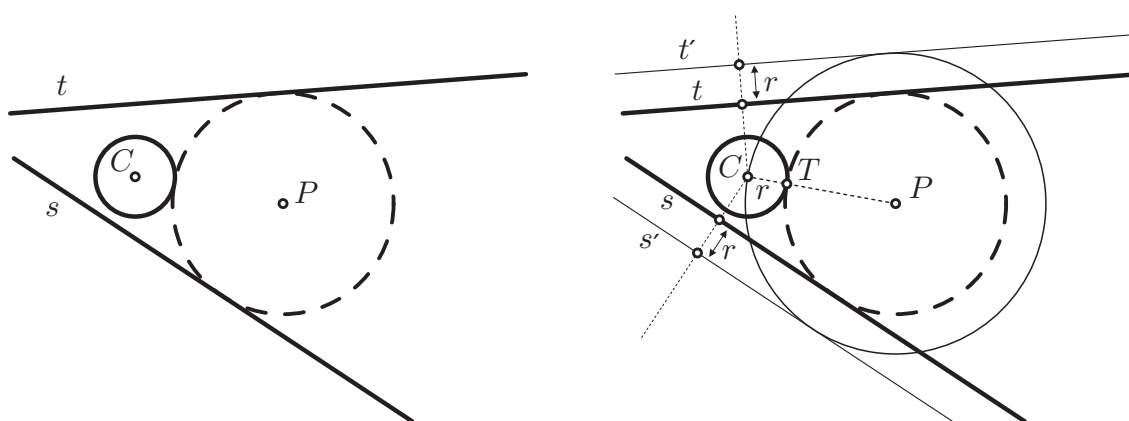
¹⁸ Una construcció, sense anàlisi ni demostració, per a un cas en què les circumferències són exteriors i la recta és exterior a aquestes la trobem a <https://www.mongge.com/ejercicios/7373>.

Prèviament, per dirigir una anàlisi d'aquest problema, recorrerem a la guia del matemàtic francès François Viète [1540-1603] en la presentació que fa d'un altre problema contingut en la proposició 5 de la seva obra *Apollonius Gallus*. Aquest tractat consisteix en un intent de restitució de l'obra desapareguda *Tangències* d'Apol·loni de Perga [III aC], citada i comentada per Pappos d'Alexandria [III-IV AD] com a pertanyent al «domini de l'anàlisi». En aquesta proposició, Viète ataca el problema següent per al cas de tangència exterior:

Construir un cercle tangent a un cercle donat i dues rectes donades, (**rrc**).

Aquest no és el problema que ens ocupa i l'introduïm com ajuda perquè ens ha semblat de menor complexitat. Viète, seguint l'estil clàssic grec, només en presenta la demostració sintètica, però ens interessa l'estratègia que utilitza. El punt essencial es troba en la manera de reduir el problema a un altre de construcció coneguda.¹⁹

En donem un apunt amb ajut de dos gràfics en què els objectes coneguts estan donats en traçat gruixut, la circumferència desconeguda es dona en traçat discontinu i els objectes auxiliars resultants de la reducció del problema es donen en traçat més fi.



Concretament, disminueix el radi r de la circumferència donada de centre C fins a convertir-la en un punt, (el seu centre C), i allunya paral·lelament les dues rectes donades s i t una distància igual a la longitud del radi r . Llavors el problema queda reduït al de la construcció d'un cercle que passa pel punt C donat i és tangent a dues rectes donades s' i t' , (**pr**). Aquest el soluciona en la proposició 4 del tractat. Finalment només li queda revertir la reducció, restant una longitud r del radi de la circumferència (P, PC) trobada.²⁰

Tractament del problema de construir la circumferència inscrita en cada sector radial

Seguidament ens proveïm d'aquesta estratègia de reducció i passarem a fer una anàlisi i una resolució del nostre problema d'inscripció de circumferències en els sectors radials de la rosassa. Recordem que es tractava de, donades dues circumferències i una recta, construir una circumferència tangent a les dues amb el centre sobre la recta.

¹⁹Sobre el text de Pappos podeu consultar JONES [1986] i EECKE [1933]; sobre text en llatí de l'*Apollonius Gallus*, consulteu VIÈTE [1600] i per a un estudi i una traducció francesa d'aquest últim text, consulteu BOYÉ [1998], t. 1 i t. 2 respectivament. A l'annex 5.2 trobareu la dedicatòria del text de Viète.

²⁰En l'activitat 3.2.3 es proposa de desenvolupar els detalls que s'han apuntat.

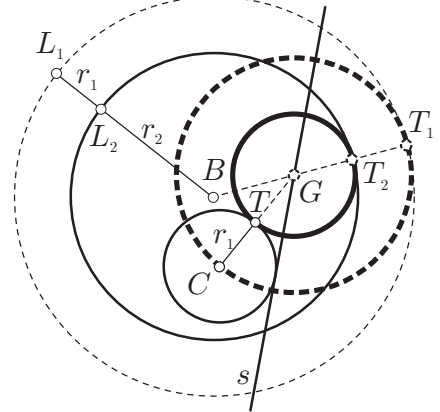
Suposem el problema resolt, és a dir donades les circumferències (C, r_1) i (B, r_2) , tenim la circumferència buscada $(G, GT) = (G, GT_2)$, en què T i T_2 són els punts de tangència respectivament amb les dues donades i G es troba sobre la recta s .

Etapla 1 Reducció. Si augmentem el radi de (B, r_2) fins aconseguir una circumferència auxiliar $(B, r_2 + r_1) = (B, BL_1)$ i reduïm el radi r_1 de (C, r_1) fins anul·lar-lo i obtenir el punt C , la circumferència $(G, GC) = (G, GT + r_1)$ passa per C i és tangent a l'augmentada (B, BL_1) .

Si podem, doncs, construir (G, GC) només caldrà revertir aquesta construcció, reduint el radi de (G, GC) , per obtenir la circumferència (G, GT) inicialment buscada.

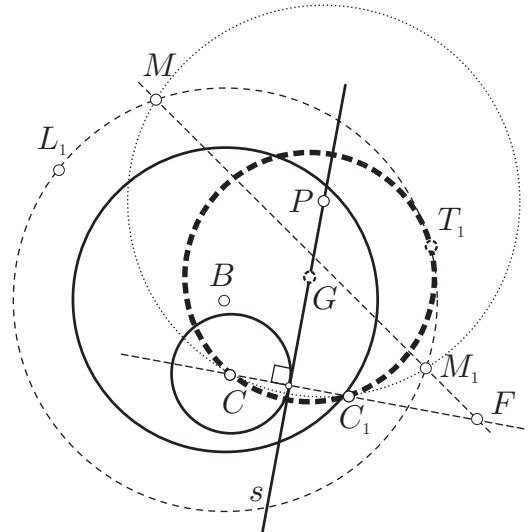
Així el problema queda reduït a la qüestió següent:

Donat un punt C , una circumferència (B, BL_1) i una recta s , construir una circumferència amb centre G sobre s , que passi pel punt C i sigui tangent a (B, BL_1)



Etapla 2 Resolució del problema reduït.²¹

Suposem el problema resolt. La circumferència solució (G, GC) passa per C i el seu simètric C' respecte s . Llavors si considerem una circumferència auxiliar (P, PC) qualsevol per aquests dos punts de manera que talli (B, BL_1) , es compleix $P \in s$ i podrem relacionar la circumferència solució (G, GC) amb les dues conegudes (B, BL_1) i (P, PC) . Aquesta relació vindrà explicitada per les propietats basades en els conceptes de *potència d'un punt* respecte d'una circumferència, *eix radical* de dues circumferències i *centre radical* de tres circumferències.



Considerem (P, PC) i els seus punts M, M_1 i C, C_1 d'intersecció respectivament amb la circumferència coneguda (B, BL_1) i la circumferència solució (G, GC) . Les rectes MM_1 i CC_1 es tallen en el centre radical F de les tres circumferències i, per tant,

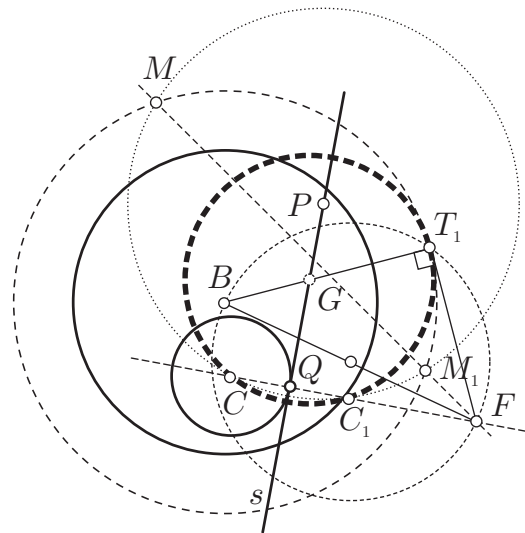
$$FM_1 \cdot FM = FC_1 \cdot FC = FT_1^2,$$

en què T_1 és el punt de tangència de la circumferència solució (G, GC) i la donada (B, BL_1) .

²¹Utilitzarem una estratègia consistent en el traçat de circumferències auxiliars i en l'ús de les propietats en què es basen els conceptes de potència d'un punt, eix radical de dues circumferències i centre radical de tres circumferències. Aquesta és sovint utilitzada en l'anàlisi i construcció de tangències. Trobem aquestes propietats en els *Elements* d'Euclides III.35 a III.37, vegeu FITZPATRICK [2008], pàg. 104-108, HEATH [1908], pàg. 71-77 de l'edició de 1956, NOLLA [2006], pàg. 115-118 [2005] i PLA [2018], pàg. 232-237. El concepte de potència d'un punt, tal com el coneixem, no apareix fins a l'obra de Jacob Steiner el 1826, vegeu FRIED [2010] i STEINER [1826], pàg. 22. Quant a als conceptes d'eix i centre radicals es troben per primera vegada a GAULTIER [1813], pàg. 139 i pàg. 143. Si no es tenen aquestes eines a mà, aquest podria ser un bon moment per introduir-les i fer-ne un relat.

Llavors l'anàlisi s'ha acabat perquè sabem construir T_1 , a partir de F , el centre $G = BT_1 \cap s$ i, finalment, la circumferència solució (G, GC) .

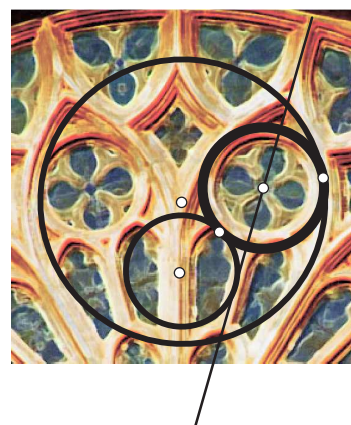
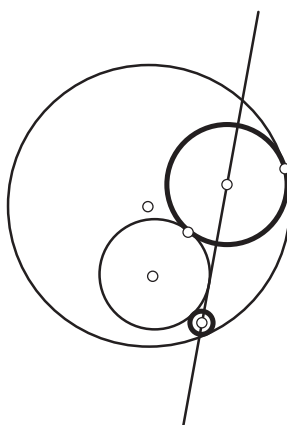
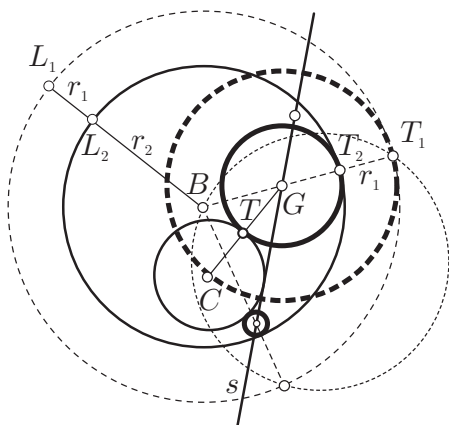
Quant a la construcció de T_1 hi ha possibilitats diverses. Una és a partir de que $\widehat{BT_1F} = 90^\circ$ implica que T_1 pertany a la circumferència de diàmetre FB . Aquesta construcció coincideix amb la trobada al lloc web de la nota 18.



Etapa 3 Reversió al problema inicial.

Un cop construïda (G, GC) només caldrà reduir el seu radi per obtenir la circumferència $(G, GT_2) = (G, GT)$ inicialment buscada. Així, per obtenir-la, construirem $T = GC \cap (C, r_1)$ o $T_2 = GT_1 \cap (B, BL_2)$ i finalment traçarem (G, GT) o (G, GT_2) .

Si observeu el gràfic hem construït les dues circumferències solució del problema amb traçat més gruixut. Per a la nostra rosassa només interessa la circumferència tangent situada més amunt.



• Activitats



3.2.1. Acoloriu el model de la rosassa central que es presenta en l'annex 5.11.

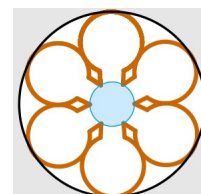
S₄₀



3.2.2. Feu una construcció amb GeoGebra dels cercles lobulats presentats a l'apartat 2.

S₄₁

- Per als casos $n = 4$ i $n = 6$, utilitzant els valors dels radis respectius dels lòbuls, $x = (\sqrt{2} - 1)r$, $x = \frac{r}{3}$, sense recórrer als valors dels angles implicats per a la construcció del primer lòbul.
- En general per a qualsevol n , suposant construït el sector d'angle $\frac{360^\circ}{n}$ que circumscriu el lòbul.



Indicació. En el segon apartat podeu idear construccions diverses per als centres dels lòbuls.

- Utilitzar directament el resultat de la fórmula

$$x = \frac{r \sin \alpha}{1 + \sin \alpha},$$

en què $\alpha = 180^\circ / n$, i x i r són els radis respectius dels lòbuls i de la circumferència.

- Aplicar el teorema de Tales, tenint en compte la relació $\frac{x}{r} = \frac{r \sin \alpha}{r(1 + \sin \alpha)}$.
- Trobar el centre del lòbul com a incentre del triangle determinat pels costats del sector circular i la tangent a la circumferència pel punt mitjà de l'arc d'aquest sector.



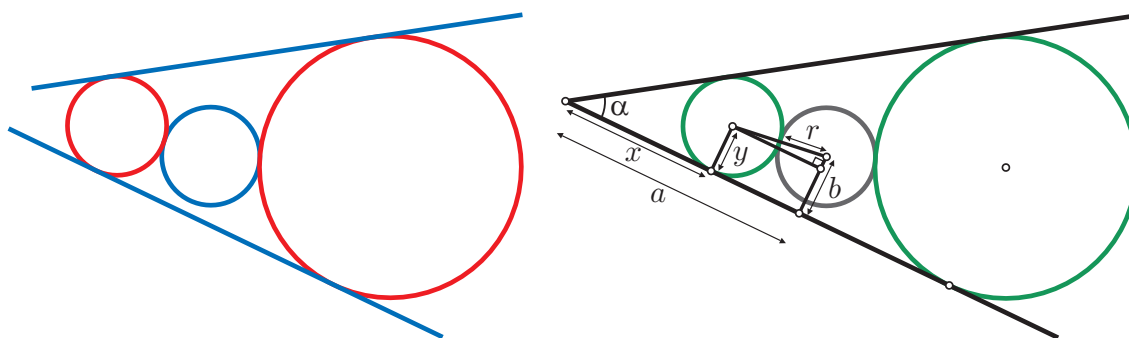
3.2.3. Feu una anàlisi geomètrica completa i la construcció de la solució de la proposició 5 de l'*Apol·lonius Gallus* que hem presentat en l'apartat 3. És a dir del problema **rrc**, sobre la construcció d'un cercle tangent, [exterior], a un cercle donat i dues rectes donades.

S₄₂



3.2.4. Feu l'anàlisi del problema tractat a la proposició 5 citada en l'activitat anterior utilitzant el llenguatge algèbric. Deduiu-ne una construcció amb regla i compàs i executeu-la en un document GeoGebra. Seguidament feu la mateixa construcció mitjançant la introducció directa en la línia de comandaments de GeoGebra del resultat obtingut en l'estudi analític, prèvia assignació de les variables implicades a l'angle i segments implicats.

S₄₄



3.2.5. Feu aproximacions al disseny de la rosassa central en què podeu utilitzar els estudis fets en aquesta secció.

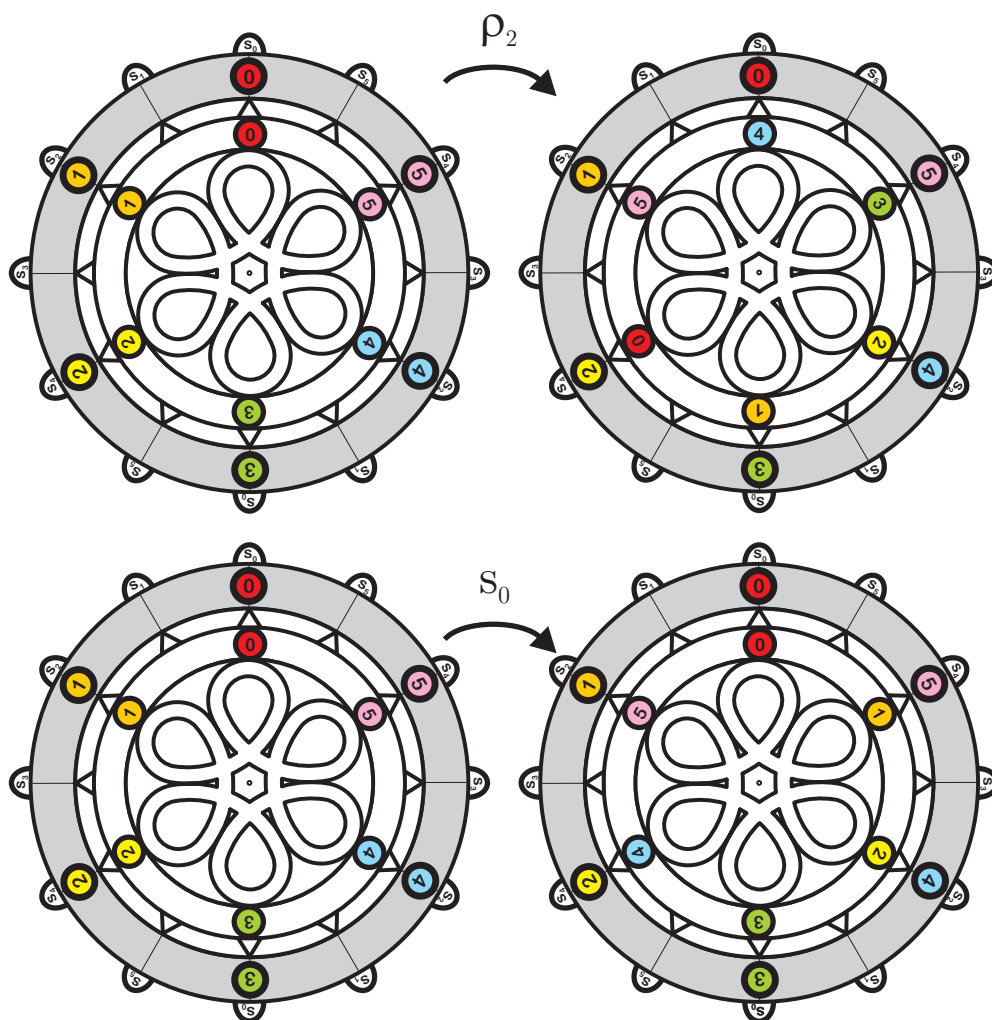
S₄₈

4 Indicacions i propostes de resolució de les activitats

4.1 Activitats de la secció 1

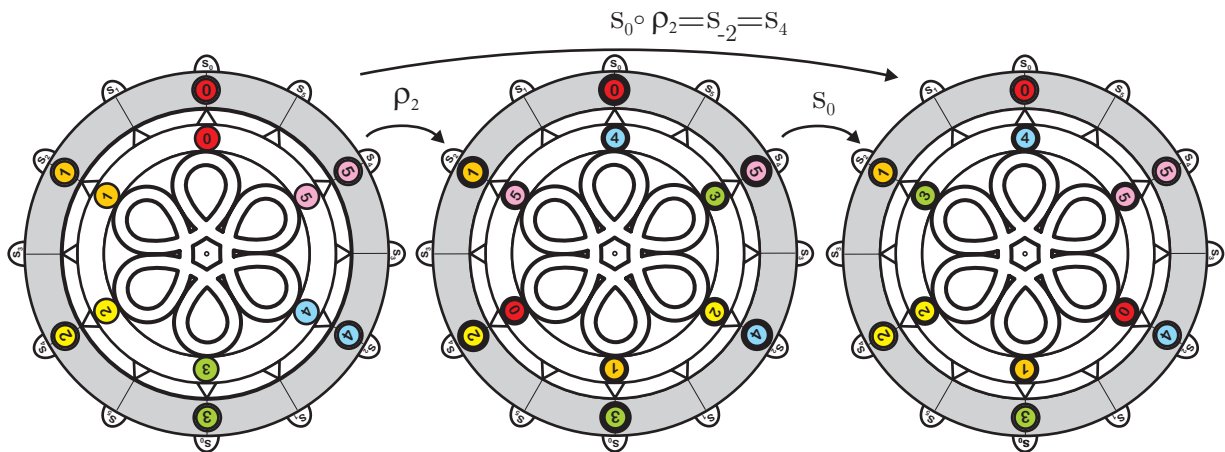
1.1.1.a (E9) Fem notar que presentem els resultats en un llenguatge que no és adient per als nivells de primària i per a alguns de secundària. Proposem que el professorat adapti els símbols utilitzats a un llenguatge més proper a l'alumnat i que es treballi amb els models de l'annex 5.3.

Observem *simetries rotacionals* amb centre el centre de la rosassa i angles 0° , 60° , 120° , 180° , 240° i 300° . Les representarem respectivament per ρ_n , $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. També hi trobem *simetries axials* amb els eixos determinats en el gràfic de sota per les posicions de les parelles de símbols s_p , $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ iguals de la corona. Aquests mateixos símbols s_p seran utilitzats per representar les simetries.²² Presentem gràficament, sobre el model esmentat més amunt, l'aplicació d'una rotació, ρ_2 , de 120° i de la simetria axial s_0 .



²²Gràficament situarem la rosassa dins d'una corona circular de referència. Aquesta corona circular es mantindrà fixada amb el nombre 0 a la part superior, amb la numeració en sentit antihorari i té la funció de marcar la posició de sortida de la rosassa interior abans d'aplicar-li una simetria o una composició de simetries.

Quant a la composició de simetries representem la corresponent a la rotació ρ_2 seguida de la simetria s_0



A continuació presentem la taula que resulta de fer totes les composicions de dues simetries,

$\circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_0	s_5	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_0	ρ_1	s_4	s_5	s_0	s_1	s_2	s_3
ρ_3	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_0	ρ_1	ρ_2	s_3	s_4	s_5	s_0	s_1	s_2
ρ_4	ρ_4	ρ_5	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	s_2	s_3	s_4	s_5	s_0	s_1
ρ_5	ρ_5	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_0
s_0	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_0	ρ_5	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
s_2	s_2	s_3	s_4	s_5	s_0	s_1	ρ_4	ρ_5	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3
s_3	s_3	s_4	s_5	s_0	s_1	s_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_0	ρ_1	ρ_2
s_4	s_4	s_5	s_0	s_1	s_2	s_3	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_0	ρ_1
s_5	s_5	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_0

En el quadre podem veure que per a la composició de dos simetries es compleix,

$$s_p \circ \rho_n = \begin{cases} s_{p-n} & , \text{ si } p-n \geq 0 \\ s_{p-n+6} & , \text{ si } p-n < 0 \end{cases} \quad \rho_m \circ \rho_n = \begin{cases} \rho_{n+m} & , \text{ si } n+m < 6 \\ \rho_{n+m-6} & , \text{ si } n+m \geq 6 \end{cases}$$

$$\rho_n \circ s_p = \begin{cases} s_{p+n} & , \text{ si } p+n < 6 \\ s_{p+n-6} & , \text{ si } p+n \geq 6 \end{cases} \quad s_q \circ s_p = \begin{cases} \rho_{q-p} & , \text{ si } q-p \geq 0 \\ \rho_{q-p+6} & , \text{ si } q-p < 0 \end{cases}$$

Observació. No calen dues opcions si considerem p, q, m, n com elements de $\mathbb{Z}_6$.

Per exemple, $s_3 \circ \rho_3 = s_{3-3} = s_0$ $s_0 \circ \rho_1 = s_{0-1} = s_{-1} = s_5$ $s_3 \circ s_3 = \rho_{3-3} = \rho_0$.

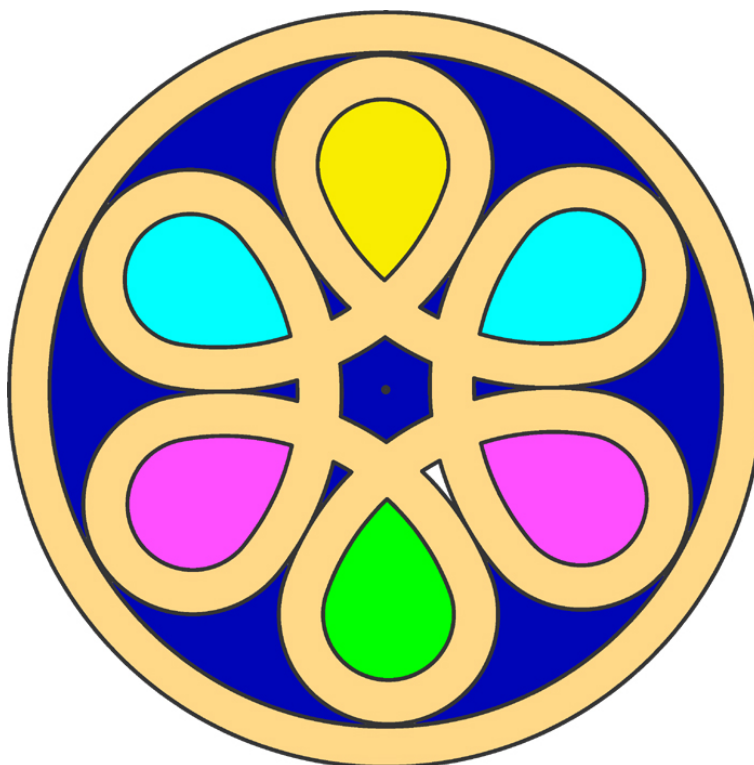
En general, $s_p \circ \rho_n = s_{p-n}$, $\rho_n \circ s_p = s_{p+n}$, $\rho_m \circ \rho_n = \rho_{n+m}$, $s_q \circ s_p = \rho_{q-p}$.

Proposta d'ampliació.

- Estudi de la commutativitat de la composició de simetries i de les seves inverses.
- Construcció de la taula de composició de simetries d'una rosassa D_3 .
- Estudi general de la composició de translacions, rotacions i simetries axials.

1.1.1.b Vegeu l'establiment d'hipòtesi de la secció 1.2, pàgina 10.

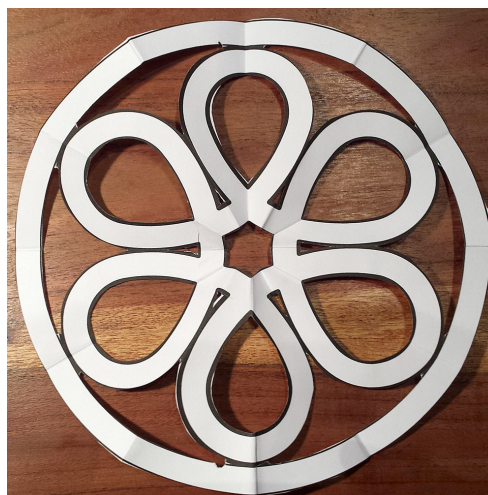
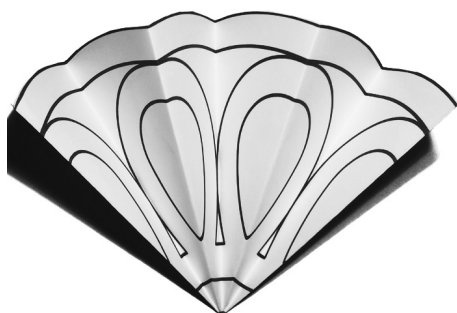
1.1.2 (E9) Es mostra un exemple acolorit del model de l'annex 5.4.



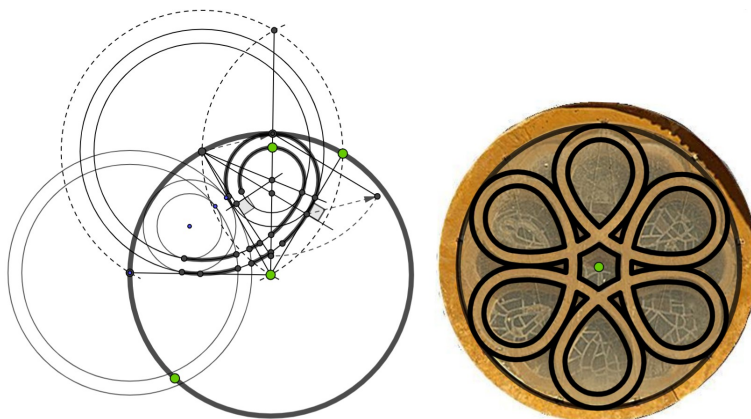
1.1.3 (E9) En l'annex 5.5, trobareu la pauta que proporcionen els punts de tangència, els centres i els punts d'encreuament de la rosassa. També hi trobareu el disseny del motiu que serveix per reproduir mitjançant rotacions la rosassa sense gruix.

1.1.4 (E9) En l'annex 5.6, es proporciona el mateix model que en l'apartat anterior sense el disseny del motiu a girar. Es tracta de repetir, ara amb regla i compàs, l'acció del traçat.

1.1.5 (E9) Per evitar dificultats i aconseguir un resultat més acurat, és aconsellable retallar el model de l'annex 5.7, en més d'una etapa. Podeu ajuntar els plecs en dos o tres grups i retallar en cada grup.



1.2.1.a (E12) Seguiu les instruccions de la síntesi de la pàgina 11. També podeu veure la construcció pas a pas en <https://www.geogebra.org/m/cjqhjkz9>.



1.2.1.b Vegeu el llibre de GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/sxsuz4g8>.

1.2.2 (E12) En l'anàlisi utilitzarem les propietats,

- L'angle α inscrit en un cercle i l'angle central β de l'arc que aquest subtendeix sobre el cercle satisfan $\beta = 2\alpha$.
- Si una recta determina sobre unes altres dues rectes angles corresponents iguals, llavors aquestes dues rectes són paral·leles.

Recordem el problema:

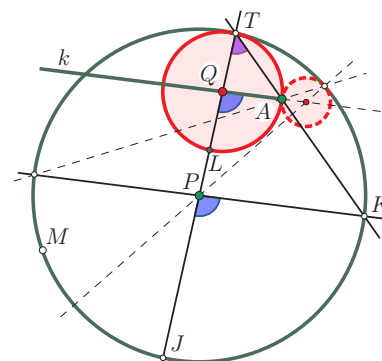
Donades una recta k , un punt $A \in k$ i una circumferència (P, PM) , construir una circumferència (Q, QA) que passi per A , amb centre Q sobre k i tangent a (P, PM) .

Anàlisi. Suposem el problema resolt i sigui T el punt de tangència. Si tracem les rectes TP i TA i observem que aquesta última talla (P, PM) en K , llavors

$$\widehat{PTK} = \widehat{QTA}.$$

Això implica que els angles centrals corresponents són iguals, és a dir,

$$\widehat{KPJ} = \widehat{AQL}.$$

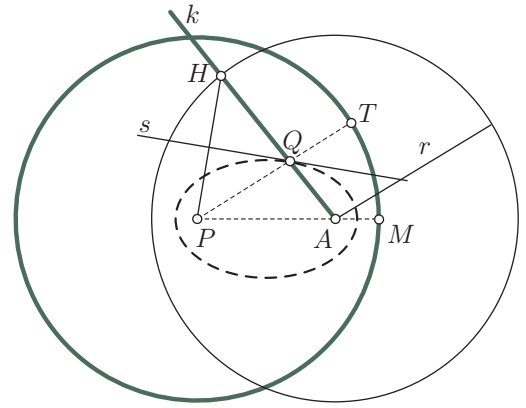


D'aquesta igualtat obtenim que les rectes k i PK són paral·leles i l'anàlisi s'ha acabat perquè a partir d'aquest paral·lelisme obtindrem K , després T i finalment Q que ens permetrà traçar la circumferència tangent buscada. Observem que també es mostra una segona solució.

Síntesi i construcció. Tracem,

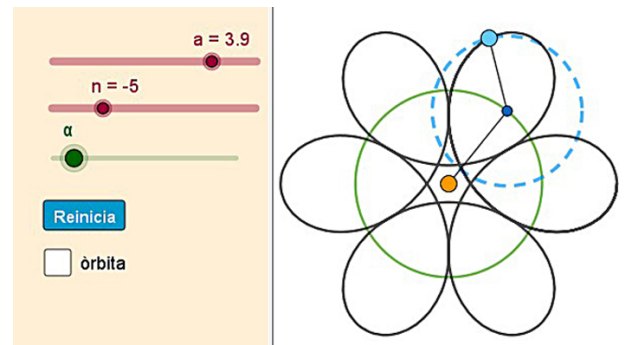
- Pel centre P , la recta r paral·lela a la recta k donada.
- La recta que passa pel punt A donat i el punt $K = (P, PM) \cap r$. Obtenim el punt de tangència T .
- La recta per T i el centre P . Obtenim el centre Q sobre k de la circumferència buscada.
- La circumferència solució (Q, QA) .

1.2.4 (E12) La propietat utilitzada la podem enunciar així: Donada l'el·lipse d'eix major r i focus A i P , considerem la circumferència $\mathcal{C}$ de centre A i radi r i una recta k que passi pel focus A . La mediatriu s del segment d'extrem el focus P i el punt H d'intersecció de la recta k amb la circumferència $\mathcal{C}$, passa pel punt Q de l'el·lipse que pertany a la recta k . (A més aquesta recta és tangent a l'el·lipse, però aquí no ho utilitzem.)



Llavors la resolució del problema enunciat és immediata. També ho és l'adquisició de la intuïció, de cara a la construcció, de considerar el punt H que resulta del trasllat de $PM = PQ + QA = PT = PM$ a partir del punt A sobre k , en el punt clau de l'anàlisi de la pàgina 11.

1.3.1 (E13) En el document GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/vZJfuzYv> trobareu una animació per visualitzar el model epicicle-deferent. Si varieu els paràmetres tal com s'indica a la imatge, obtindreu una aproximació a la rosassa de la porta de l'Evangeli. En l'annex 5.8 trobareu una guia per construir-la.



1.3.2 (E13) Considerem,

- Les circumferències $\mathcal{C}_1 = (T, r_1 = TB)$ i $\mathcal{C}_2 = (S, r_2 = SH)$, $H \in \mathcal{C}_1$, que roda sense lliscar per l'interior de $\mathcal{C}_1$.
- L'angle de gir orientat $\alpha \geq 0$ del punt S al voltant de T .
- L'angle de gir $\alpha - \beta = \widehat{HSQ}$ dels punts Q i P respecte del centre S , en què H és el punt de contacte de les dues circumferències, $\beta \leq 0$ és orientat i $d = SP$.
- Les coordenades x, y , del punt P respecte d'una referència orto-normal d'origen T , tal que al principi del moviment $\alpha = 0$ i $P = (r_1 - r_2 + d, 0)$.

Si $\mathcal{C}_2$ roda sense lliscar per l'interior de $\mathcal{C}_1$, tenim $2\pi r_1 = n \cdot 2\pi r_2$ i $n = r_1/r_2$.

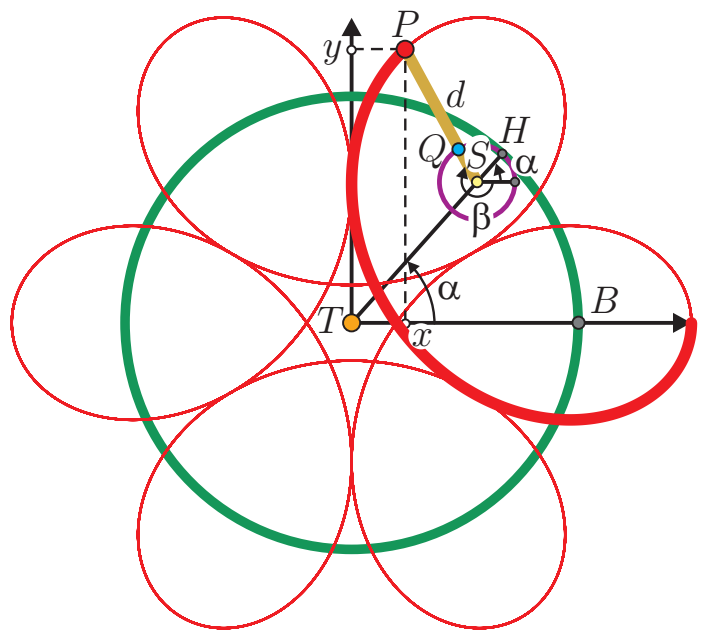
A més, en no haver-hi lliscament,

$$(\alpha - \beta)r_2 = \alpha \cdot r_1 = \alpha \cdot n \cdot r_2.$$

Per tant, $\alpha - \beta = n \cdot \alpha$ i $\beta = (1 - n) \cdot \alpha$.

Finalment, $P = T + \overrightarrow{TP} = T + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SP}$, implica que les coordenades de P són

$$\begin{cases} x = (r_1 - r_2) \cos \alpha + d \cos((1 - n)\alpha) \\ y = (r_1 - r_2) \sin \alpha + d \sin((1 - n)\alpha) \end{cases}$$



És a dir, en ser $1 - n = 1 - \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_2}$, s'obtenen les equacions de $P = (x, y)$,

$$\begin{cases} x = (r_1 - r_2) \cos \alpha + d \cos \left(\frac{r_1 - r_2}{r_2} \alpha \right) \\ y = (r_1 - r_2) \sin \alpha - d \sin \left(\frac{r_1 - r_2}{r_2} \alpha \right). \end{cases}$$

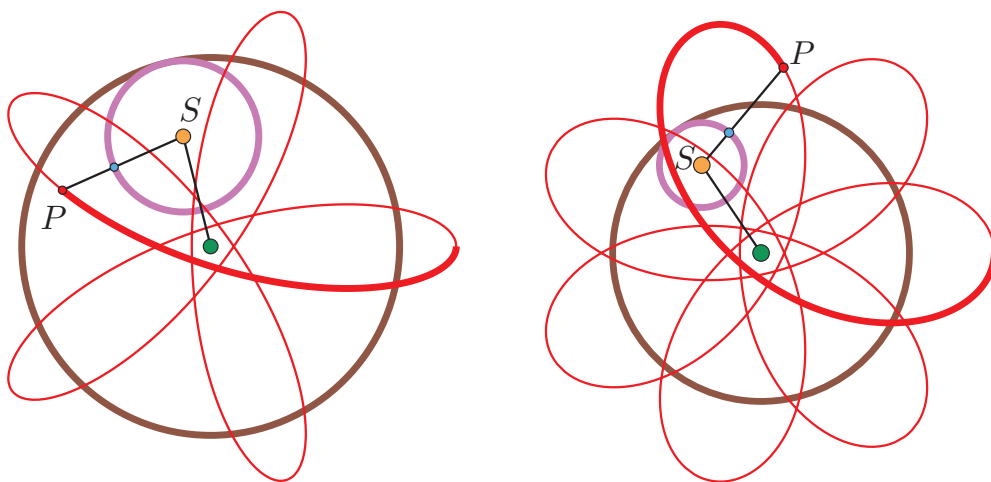
• **Interpretació per a $n \in \mathbb{Q}$**

Considerem $p, q \in \mathbb{Z}$ tals que $(p, q) = 1$ i $\begin{cases} n = \frac{r_1}{r_2} = \frac{p}{q} \\ 1 - n = \frac{r_1 - r_2}{r_2} = \frac{p}{q} - 1 = \frac{p - q}{q}. \end{cases}$

$n = \frac{p}{q}$ Un punt Q fixat sobre la roda C_2 , inicialment sobre B , tocarà p vegades C_1 , —la hipotrocoide tindrà p lòbuls—, abans de tancar la seva trajectòria. Per aconseguir-ho, caldran q voltes senceres de S al voltant de T .

$1 - n = \frac{p}{q} - 1$ La relació de velocitats entre β i α és $\frac{r_1 - r_2}{r_2} = \frac{p - q}{q}$ amb signes contraris. Això implica que mentre P i Q fan $p - q$ voltes al voltant de S , aquest últim en fa q al voltant de T .

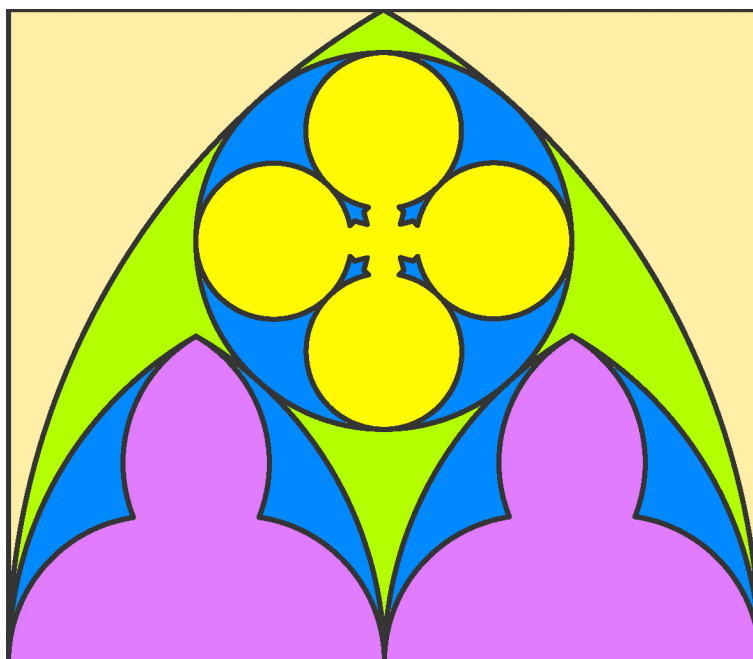
Observem dos exemples de hipotrocoide en les imatges. Les proporcions entre radis són de $5/2$ i $7/2$. La trajectòria del primer té 5 lòbuls i es tanca la trajectòria quan S i P han donat 2 i 3 voltes respectivament. En el segon cas, hi ha 7 lòbuls i es tanca la trajectòria després de 2 voltes de S i 5 voltes de P .



En el document <https://www.geogebra.org/m/u4ngvpcf> trobareu una animació GeoGebra en què es pot comparar el disseny amb hipotrocoide i el traçat amb regle i compàs. Una de les observacions que es poden fer és que la idea del disseny pot néixer d'una intuïció dinàmica, de moviment, com és el cas de les òrbites que orbiten en una altra òrbita i en aquest característica pot residir un dels seus valors simbòlics; però la seva execució s'aproxima molt més bé amb el regle i el compàs amb la implicació del concepte de tangència. Vegeu més documents sobre epicles i hipotrocoides a <https://www.geogebra.org/m/tawaucn3>.

4.2 Activitats de la secció 2

2.1.1 (E15) Es mostra un exemple acolorit del primer model de l'annex 5.10.



2.1.2.a (E15) Podeu llegir la descripció donada al principi de la secció 2.1.

2.1.2.b Els arcs apuntats equilàters es construeixen a partir de dues circumferències amb els centres sobre el perímetre de l'altra i en els extrems de la base de l'arc. Quant al cercle, cal dibuixar la mediatriu de la base de l'arc i temptejar sobre aquesta la posició del centre fins aconseguir un resultat acceptable. Comprovareu que el centre s'ha d'agafar a una distància de la base lleugerament superior a la meitat de la longitud d'aquesta. Si mesureu les dues distàncies i dividiu la major entre la menor obtindreu un resultat que s'aproxima a 1.2.

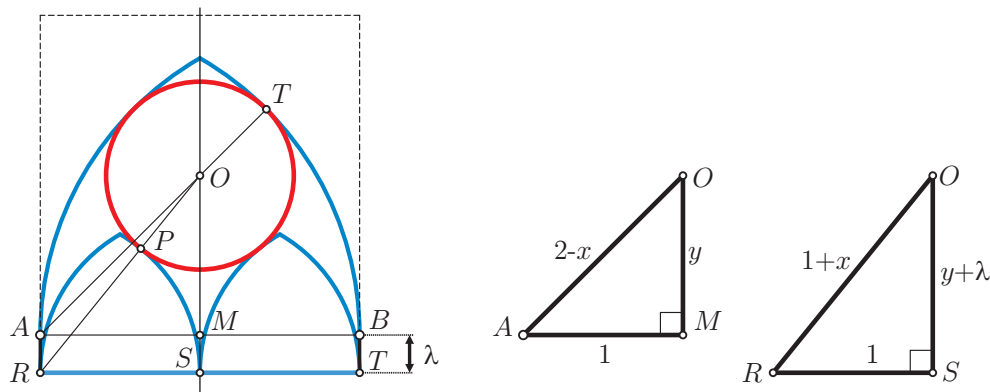
2.1.3.a (E15) Seguiu les instruccions de la síntesi de la secció 2.1.

2.1.3.b Vegeu el document GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/swtfzqqc>.

2.1.4 (E15) La diferència entre els dos és igual a la quarta part de la base de l'arc. Prèviament cal demostrar que, en el gràfic de la pàgina 14, $OM = \sqrt{5}/2$ i la diagonal del pentàgon proposat mesura $(1 + \sqrt{5})/2$. Vegeu el document <https://www.geogebra.org/m/ekuhbrkg>.

2.1.5 (E15) Suposem el problema resolt. Sigui (O, OP) la circumferència buscada i $AM = 1$.

- Segons l'anàlisi de la secció 2.2, $\lambda = AR = 2(\sqrt{5}/2 - 1) = \sqrt{5} - 2$ és coneguda.
- x = radi desconegut de la circumferència.
- $y = OM$, longitud desconeguda.



Apliquem el teorema de Pitàgores sobre $\triangle AMO$ i $\triangle RSO$,

$$\begin{cases} (2-x)^2 - 1^2 = y^2 \\ (1+x)^2 - 1^2 = (y+\lambda)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3-4x+x^2 = y^2 \\ 2x+x^2 = y^2 + 2\lambda y + \lambda^2 \end{cases}$$

$$\iff 6x-3 = 2\lambda y + \lambda^2 \iff y = \frac{6x-3-\lambda^2}{2\lambda}$$

Substituïm a la primera equació del segon sistema,

$$(4\lambda^2 - 36)x^2 + (36 - 4\lambda^2)x + 6\lambda^2 - \lambda^4 - 9 = 0, \quad \lambda = \sqrt{5} - 2.$$

Substituïm el valor de λ i obtenim l'equació,

$$4\sqrt{5}x^2 - 4\sqrt{5}x + 29 - 12\sqrt{5} = 0.$$

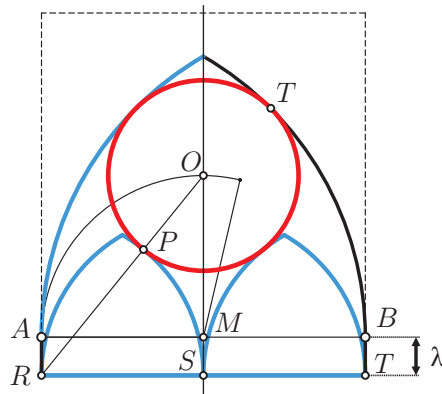
Finalment obtenim per a x i $y = \frac{6x-3-(\sqrt{5}-2)^2}{2(\sqrt{5}-2)}$ els valors,

$$x = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{13 - \frac{29\sqrt{5}}{5}} \right), \quad y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{10} \sqrt{25 - 5\sqrt{5}} \approx 0.9972101146 \approx 1 = AM.$$

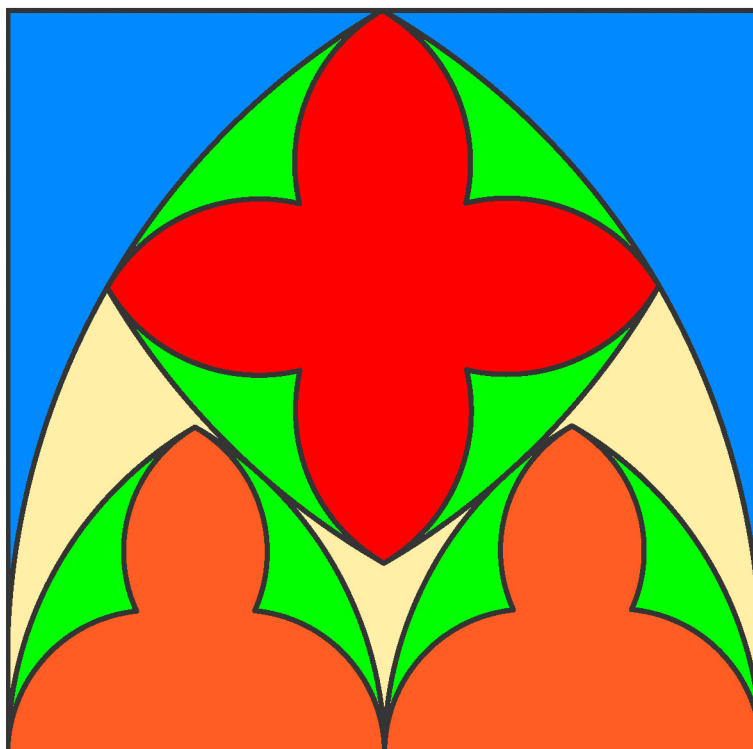
Per a la construcció amb GeoGebra i una comparació amb l'arc de les activitats precedents i el de la secció següent vegeu el document <https://www.geogebra.org/m/swuvmjnn>



• **Observació.** Per a una construcció amb regle i compàs és interessant notar que s'ha obtingut $OM \approx 1 = AM$. Llavors una construcció aproximada del centre O , amb un error no perceptible a la vista, es pot fer mitjançant la intersecció de la mediatriu de AB amb la circumferència (M, MA) . Recordem que per a una construcció més general amb regle i compàs es pot consultar la secció 3.



2.2.1 (E17) Es mostra un exemple acolorit del segon model de l'annex 5.10.



2.2.2.a (E17) Podeu llegir la descripció donada a l'inici de la secció 2.2; allí es parla del quadrilàter curvilini resultant de la intersecció de dues *vesica piscis*. Cadascuna d'aquestes resulten de la intersecció de dos cercles d'igual radi en què el centre cada centre està sobre el perímetre de l'altre cercle.

2.2.2.b Un cop feta la construcció de l'arc apuntat major i el quadrat curvilini a partir del quadrat inicial, si no tenim en compte el resultat de l'anàlisi de la figura, s'obté un resultat força acceptable amb el desplaçament "avall" de la base PQ una distància igual a $0.12 \cdot BC$.

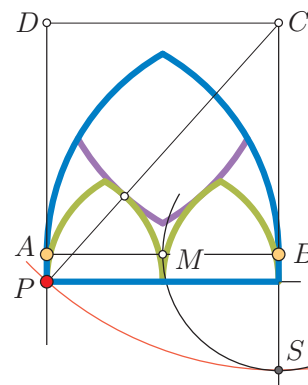
2.2.2.c Vegeu el document <https://www.geogebra.org/m/spssmtgh>.

2.2.3.a (E17) Utilitzeu el resultat de la síntesi d'aquesta secció.

2.2.3.b Vegeu el document <https://www.geogebra.org/m/rvzpyd5S> en què trobareu dues construccions simultànies, la resultant de la síntesi d'aquesta secció i la que s'obté de l'apartat 2.2.4 que segueix.

2.2.4 (E17) Observem que $CP = CT + TP = CB + MB$. Llavors, només cal prolongar CB fins a S de manera que $BM = BS$. O sigui que buscarem el punt mitjà M de AB , construirem la intersecció S de la circumferència (B, BM) amb la prolongació de CB i, finalment, construirem la intersecció de (C, CS) amb la prolongació de DA . Podeu veure la construcció en el document GeoGebra de l'enllaç de l'apartat anterior.

Comentem que no es va tenir consciència d'aquesta anàlisi més simple amb posteritat a la més complexa en què utilitzàvem el teorema de Pitàgores.



4.3 Activitats de la secció 3

3.1.1 (E19) Anomenem,

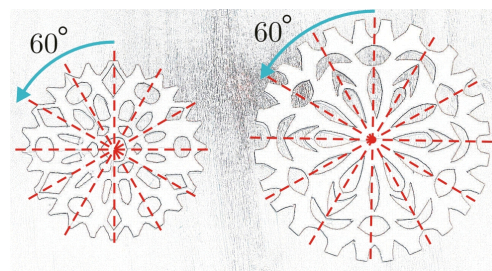
- s_n la simetria d'eix que forma un angle de $n \cdot 15^\circ$ amb l'eix de simetria vertical, en què $(0 \leq n \leq 11)$,
- ρ_n gir d'angle $n \cdot 30^\circ$ amb centre en el centre de la rosassa.

Llavors, $s_0 \cdot \rho_4 = s_8 \neq s_4 = \rho_4 \cdot s_0$. Per tant podem afirmar que el producte no és commutatiu.

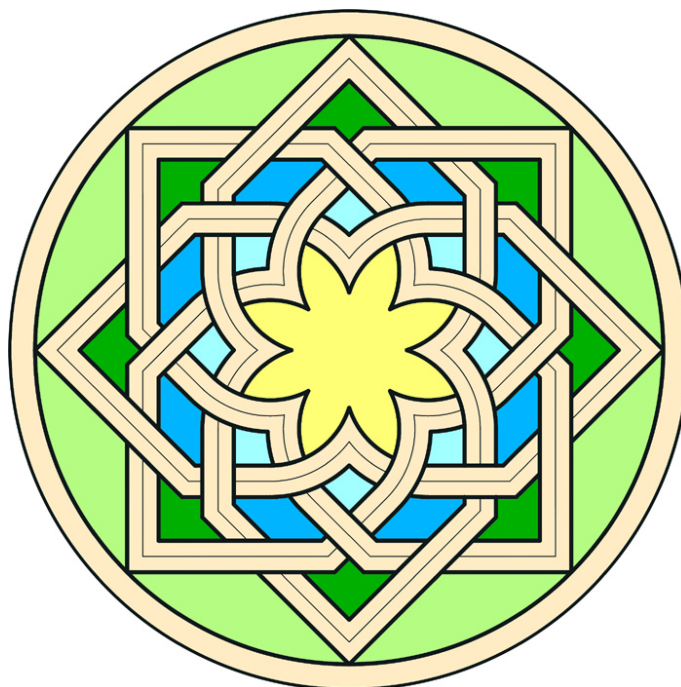
Això no implica que en alguns casos particulars no ho puguem ser. Per exemple,

$$s_4 \cdot \rho_6 = s_{10} = \rho_6 \cdot s_4.$$

3.1.2 (E19) Són rosasses del tipus D_6 . Les deixen invariants sis rotacions d'angles $n \cdot 60^\circ$, $1 \leq n \leq 6$, i 6 simetries axials, tal com es mostra a la imatge.



3.1.3.a (E19) Es mostra un exemple acolorit del model de l'annex 5.12.



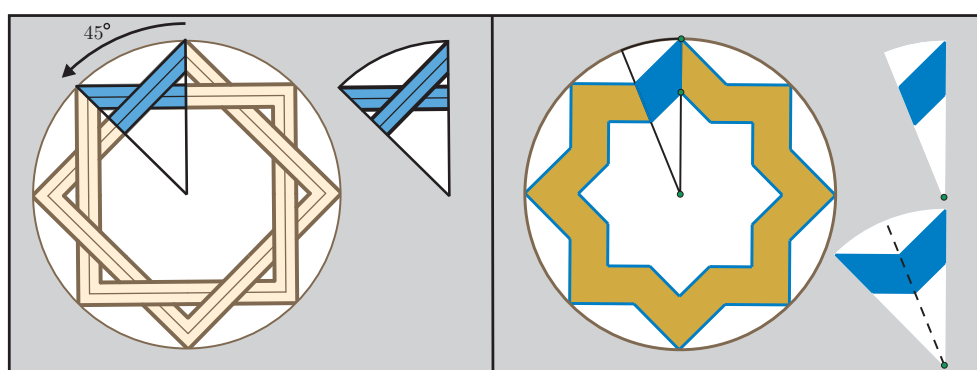
3.1.3.b És una rosassa C_8 . La deixen invariant vuit rotacions d'angles $n \cdot 45^\circ$, $1 \leq n \leq 8$. El tipus de traceria amb enllaços per damunt i per sota dels diversos llaços trenquen l'existència de simetries axials. Una possible elecció de motiu mínim és la que es presenta acolorida en la imatge adjunta.



3.1.3.c En la imatge adjunta es mostra una possible alteració del disseny de cara a aconseguir la introducció de simetries axials en el grup de simetries de la figura. Amb motiu de l'existència de vuit simetries axials, s'observa que la regió que proporciona un motiu mínim queda reduïda a la meitat de superfície que en el disseny original.



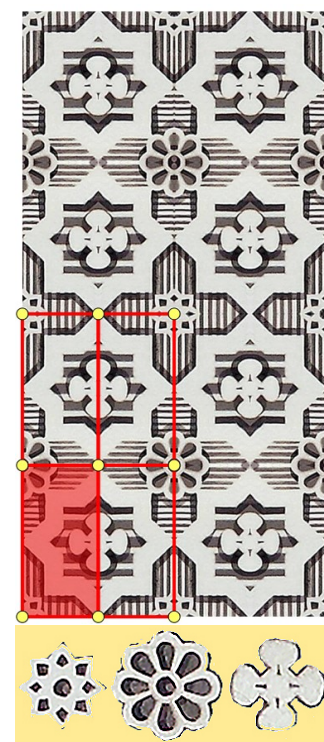
3.1.4.a (E_{20}) En el primer cas trobem que la figura queda invariant per vuit rotacions d'angles $n \cdot 45^\circ$, $1 \leq n \leq 8$. En el segon cas s'afegeixen vuit simetries axials al seu grup de simetria. Consegüentment el motiu mínim del segon cas resulta ser una de les dues meitats del sector del primer cas.



3.1.4.b Vegeu <https://www.geogebra.org/m/yguksj2t>.

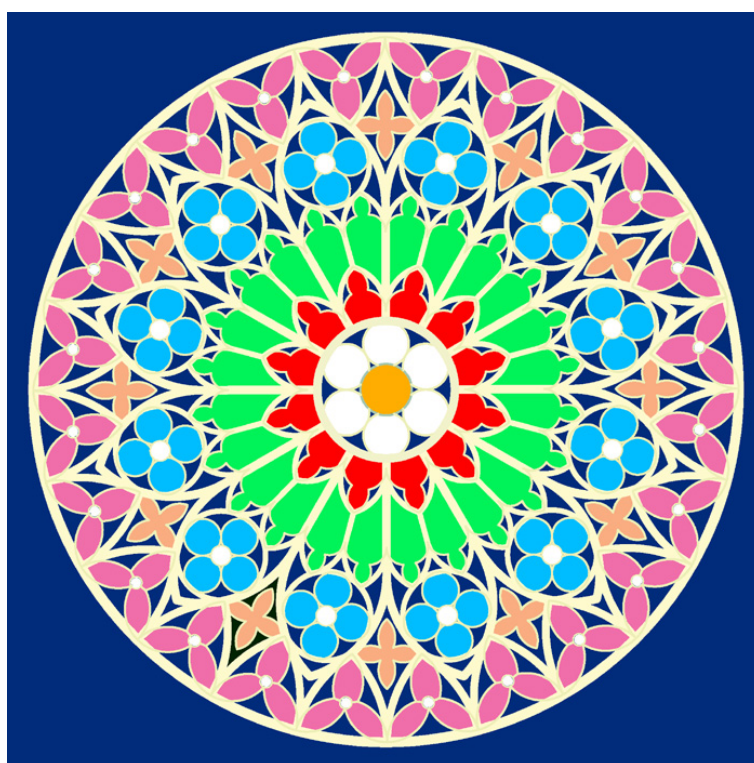
3.1.4.c A primera vista es podria pensar en que té simetria rotacional d'ordre 4. Amb una mica d'atenció observem que les col·leccions de segments que hi trobem, anul·len aquesta possibilitat. En la imatge indiquem l'existència de simetries rotacionals d'angle 180° , amb centre en els punts grocs, i simetries axials d'eixos en les línies vermelles. Aquest mosaic periòdic es diu que és del tipus PMM. El motiu mínim és l'inclos en el rectangle més petit i la cel·la reticular és el contingut del rectangle gran. Les translacions venen determinades pels segments orientats que constitueixen els costats del rectangle gran.

A més de l'estrella tartèssia observem tres rosasses, o estrelles, més, dues del tipus D_4 i una de tipus D_8 . També tenim la creu amb simetria D_2 . Si no existissin les col·leccions de segments horitzontals i verticals a l'interior de l'estrella tartèssia i de la creu, el mosaic tindria simetries rotacionals d'angles $k \cdot 90^\circ$ i es pot comprovar que seria del tipus anomenat P4M.

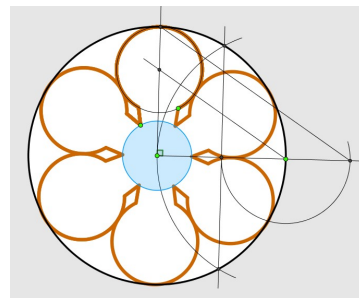


En l'enllaç <https://www.geogebra.org/m/p7pcwbqj> trobareu la generació dinàmica amb indicació de la cel·la reticular i el motiu mínim.

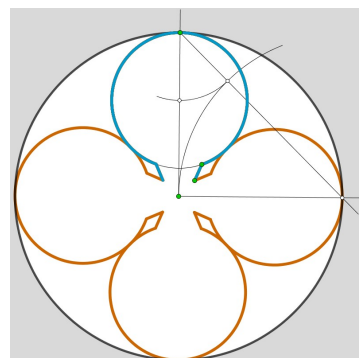
3.2.1 (E_{27}) Es mostra un exemple acolorit del model 5.11.



3.2.2.a (E27) Per al cercle amb sis lòbuls vegeu una construcció animada en el document <https://www.geogebra.org/m/tphzd4t5>. S'ha utilitzat que el radi de cadascun dels lòbuls és la tercera part del radi del cercle. Llavors s'ha construït la tercera part d'aquest radi aplicant el teorema de Tales.



Per al cercle amb quatre lòbuls vegeu una construcció animada en <https://www.geogebra.org/m/h7jyu4x>. S'ha construït el centre del lòbul mitjançant la diferència entre un segment de longitud $r\sqrt{2}$ i el radi r .

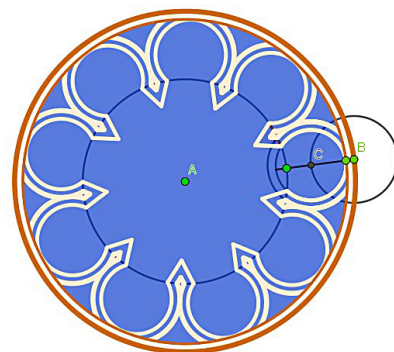


Per a la visualització de tots els lòbuls s'han utilitzat les eines Rotació i Seqüència del GeoGebra.

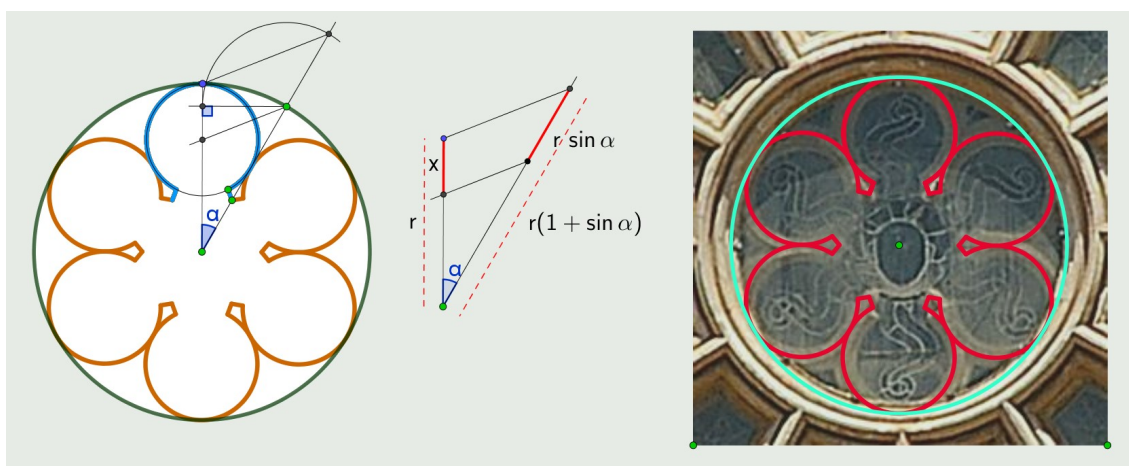
3.2.2.b Es presenten les construccions d'acord amb les indicacions de l'enunciat.

- a) En el document <https://www.geogebra.org/m/bhge7uqy> trobareu una presentació en què s'ha introduït directament la fórmula del radi del lòbul en la línia d'entrada.

$$x = \frac{r \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

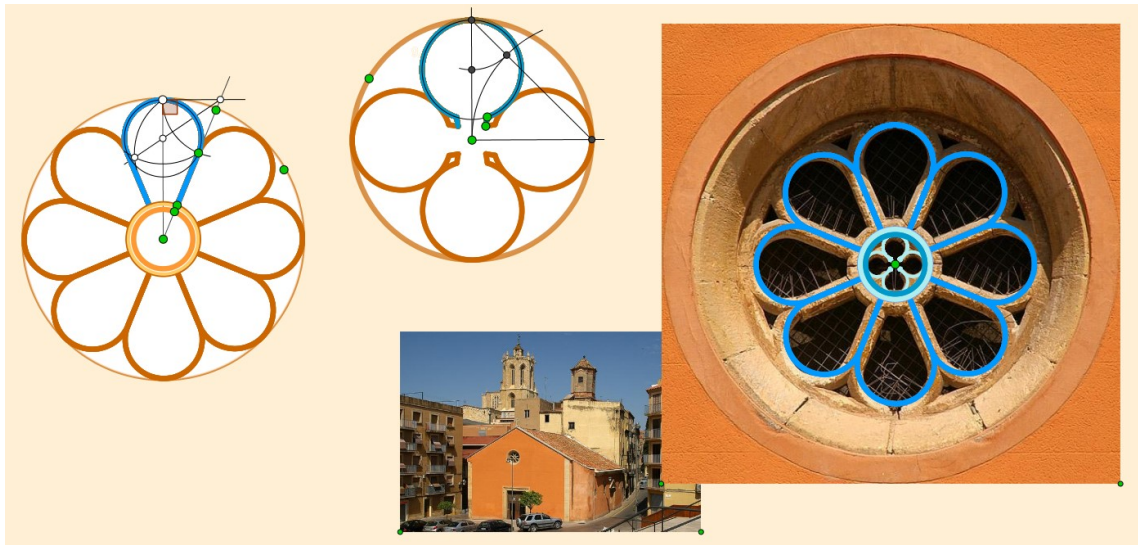


- b) En el document <https://www.geogebra.org/m/yacgrk2k> es presenta una construcció animada pas a pas, a partir de la relació entre els radis i del teorema de Tales aplicat tal com es veu a la imatge.



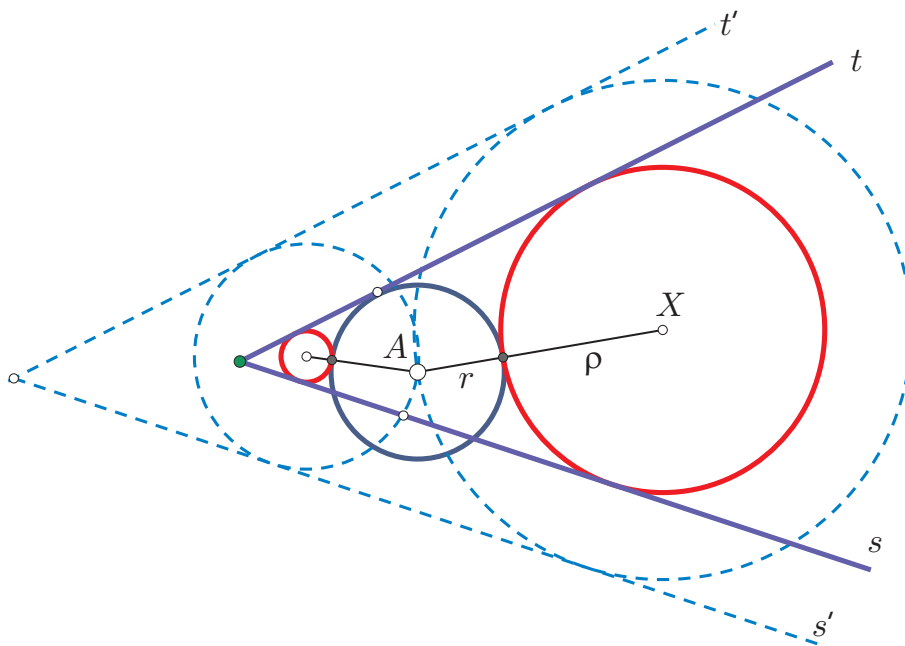
- c) En el document <https://www.geogebra.org/m/uwkyjw4a> es presenta una construcció animada pas a pas de la cerca del centre del lòbul com a incentre del triangle apuntat en la indicació de l'enunciat.

Podeu veure una aplicació al disseny de la rosassa de l'església de Sant Llorenç a Tarragona, en el document <https://www.geogebra.org/m/yvwzdhwu>. La rosassa D_4 del centre s'ha construït mitjançant el mètode que resulta de restar el radi r de la circumferència central, del segment de longitud $r\sqrt{2}$.

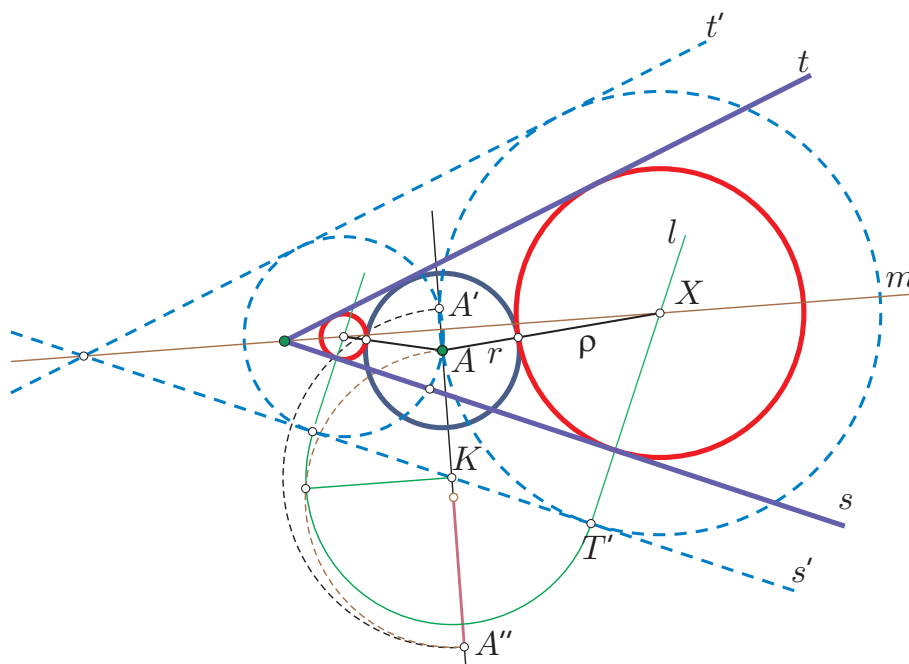


3.2.3 (E27) Seguirem les indicacions donades en aquesta secció. Primerament reduïrem el problema al de traçar una circumferència tangent a dues rectes donades i que passi per un punt donat. Resoldrem aquest pel mètode de l'anàlisi i després revertirem la reducció inicial.

Etapla 1 **Reduïm el problema rrc** a un problema **pr**. Si suposem el problema resolt, sigui (X, ρ) el cercle solució tangent a les rectes s i t donades i al cercle (A, r) donat. Llavors el cercle $(X, \rho + r)$ serà tangent a dues rectes s' i t' paral·leles a s i t i a distància $\rho + r$ de X . Tenim així plantejat un nou problema, el problema **pr** consistent a traçar el cercle $(X, \rho + r)$ tangent a les rectes s' i t' i que passa per A .



Etapa 2 Fem l'anàlisi del problema reduït. Suposem-lo resolt. El centre X de la circumferència es troba sobre la bisectriu m de les rectes s' i t' . A més, aquesta circumferència passa pel punt simètric A' de A respecte de la recta m . Així, ara es tractarà de construir una circumferència per A i A' , tangent a s' .



Si fem $K = AA' \cap s'$, llavors $KT' = KA \cdot KA'$ en què T' és el punt de tangència de la circumferència amb s' . En aquest punt l'anàlisi s'ha acabat perquè podem construir el punt T' pel teorema de l'altura, considerant el triangle rectangle $\triangle ALA''$ en què $KA'' = KA'$ i KL és l'altura. Un cop construït T' es podrà construir la perpendicular l a s' per T' , el centre $X = m \cap l$ i, finalment, la circumferència buscada $(X, XT') = (X, \rho + r)$.

Etapa 3 Revertim a la situació inicial. La circumferència de centre X , tangent a (A, r) , és concèntrica amb la circumferència $(X, XT') = (X, XA)$. Per tant, només caldrà construir $Y = s \cap XT$ o $Z = AX \cap (A, r)$ i la circumferència solució $(X, XY) = (X, XZ)$.

– Podeu veure la construcció amb totes les línies auxiliars implicades a <https://www.geogebra.org/m/xzc5ssk4>.

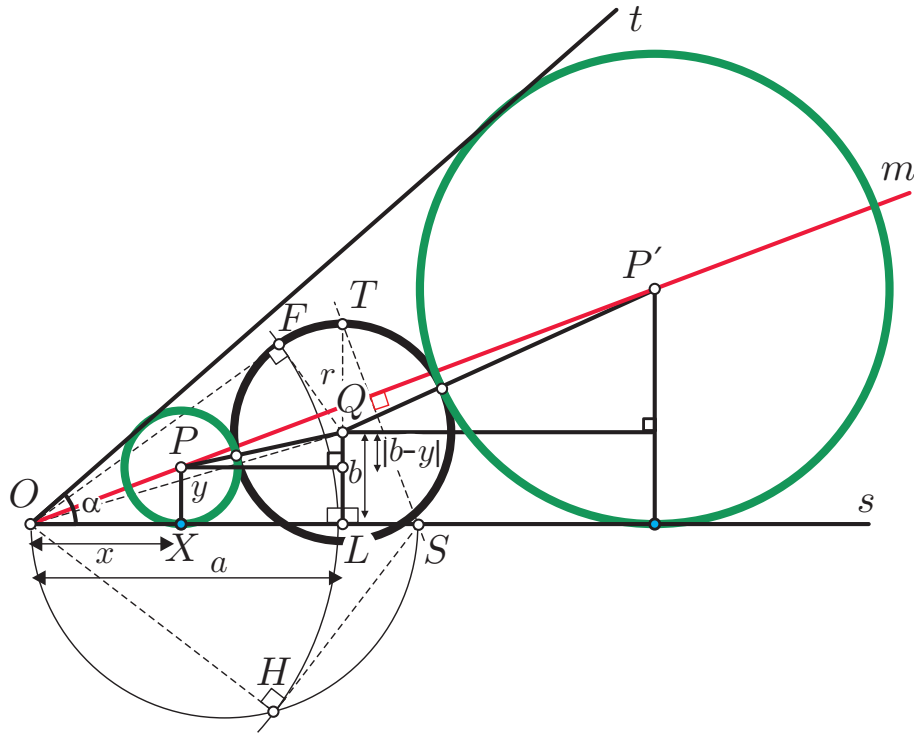
3.2.4 (E27) Estudiem el cas de tangència exterior per a dues semirectes amb origen el punt de tall de les rectes i suposem el problema resolt. En el gràfic observem les dues rectes donades s i t , la seva bisectriu m , el cercle donat de centre Q , les circumferències de centres P i P' que es volen construir i, (en la referència d'origen $O = s \cap t$ i eix d'abscisses la recta s), les variables,

(a, b) = coordenades del centre de la circumferència donada

r = radi de la circumferència donada

α = angle de les dues rectes donades

(x, y) = coordenades de la circumferència que es vol construir



Cercarem el valor de x en funció de a, b, r i del pendent $\lambda = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{y}{x}$ de la bisectriu m .

Pel teorema de Pitàgores aplicat sobre el triangle rectangle d'hipotenusa PQ ,

$$\begin{aligned} (r + \lambda x)^2 - (b - y)^2 &= (a - x)^2 \\ \Leftrightarrow r^2 + 2r\lambda x + \lambda^2 x^2 - b^2 + 2b\lambda x - \lambda^2 x^2 &= a^2 - 2ax + x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(a + (r + b)\lambda)x - r^2 + a^2 + b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= a + (r + b)\lambda \pm \sqrt{(a + (r + b)\lambda)^2 - (a^2 + b^2 - r^2)}. \end{aligned}$$

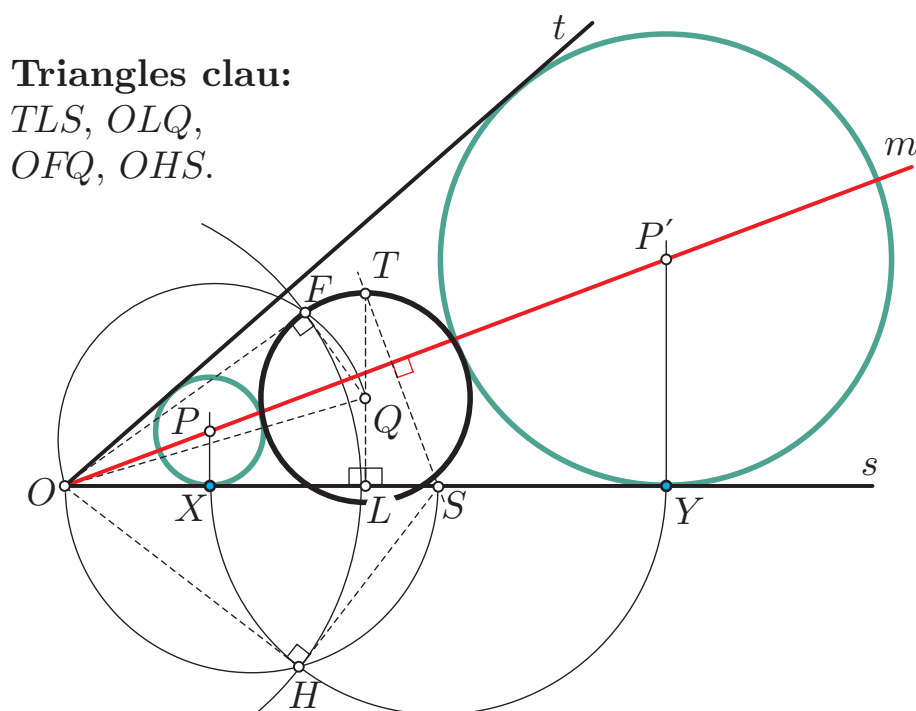
De cara a la construcció amb regla i compàs de la solució, observem les imatges d'aquesta pàgina i la següent i les expressions en el valor algèbric de x . Interpretarem aquestes expressions en geomètricament mitjançant la traducció que proporciona el teorema de Pitàgores i la semblança de triangles.

- $a + (r + b)\lambda$ suggereix que considerem el segment $OL = a$ i el catet $LS = (r + b)\lambda$ del triangle rectangle $\triangle TLS$, semblant al $\triangle OXP$, determinat pel catet $TL = b + r$, la perpendicular TS a la bisectriu m per l'extrem T de TL i la recta s .

- $a^2 + b^2$ suggereix que considerem la hipotenusa OQ del triangle rectangle $\triangle OLQ$ de catets $OL = a$ i $LQ = b$.
- $a^2 + b^2 - r^2$ suggereix que considerem el catet OF del triangle rectangle $\triangle OFQ$ d'hipotenusa OQ i catet r .
- $(a + (r + b)\lambda)^2 - (a^2 + b^2 - r^2)$ suggereix que considerem el catet SH del triangle rectangle $\triangle OHS$ d'hipotenusa $OS = OL + LS = (a + (r + b)\lambda)^2$ i catet $OH = OF = a^2 + b^2 - r^2$.

De totes aquestes observacions podem obtenir les etapes de construcció següent. Tracem,²³

- (1) La bisectriu m de les rectes donades s i t .
- (2) La perpendicular a M per T que talla s en S , tal que $OS = OL + LS = a + (r + b)\lambda$.
- (3) El semicercle de diàmetre $OQ = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- (4) El punt F tal que $OF = \sqrt{a^2 + b^2 - r^2}$, intersecció de (Q, r) i el semicercle de diàmetre OQ .
- (5) El punt H tal que $SH = \sqrt{(a + (r + b)\lambda)^2 - (a^2 + b^2 - r^2)}$, intersecció de (O, OF) amb el semicercle de diàmetre OS .
- (6) El punt X tal que $OX = x$, (per al valor menor de x), intersecció de s i (S, SH) . (Per al valor major de x considerem la segona intersecció Y .)
- (7) El centre P de la circumferència tangent buscada, intersecció de m i la perpendicular a s per X . (D'igual manera, a partir de Y construïm P' .)
- (8) Les circumferències tangents solució, (P, PX) i (P', PY) .



²³ En la imatge s'han indicat en línia discontinuada els triangles clau que han permès fer la lectura geomètrica del resultat algebraic amb l'ajut de la semblança de triangles de cara a construir $LS = (r + b)\lambda$ i del teorema de Pitàgores en $\triangle OLQ$, $\triangle OFQ$ i $\triangle OHS$.

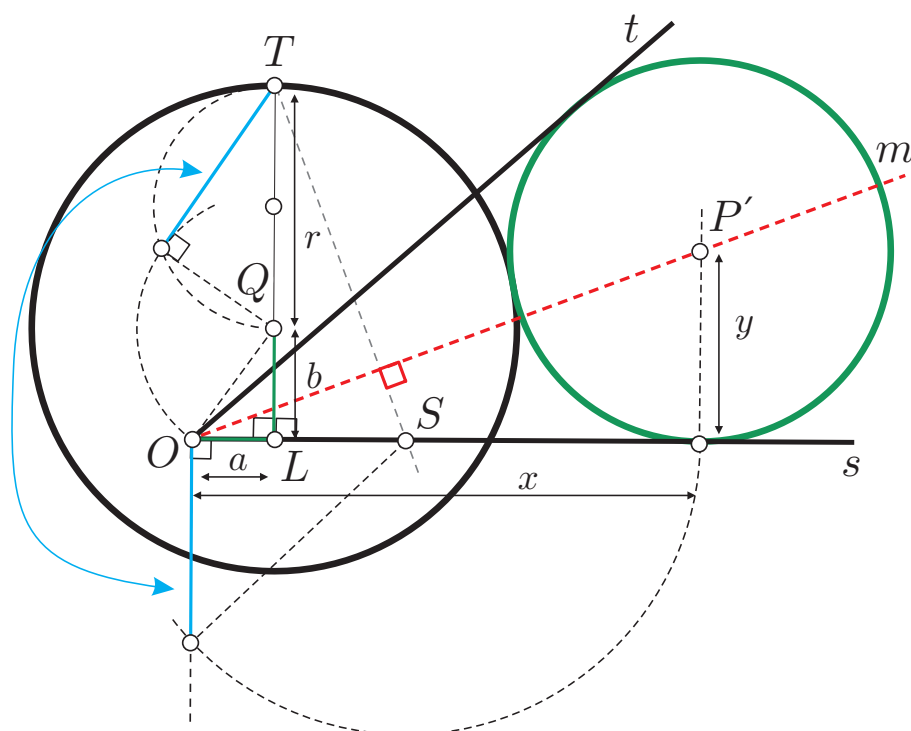
Observacions finals.

- A partir del valor algèbric de x es poden estudiar els “diorismós”, —condicions d’existència o no de solucions—. Es pot comprovar que coincideixen amb les que es poden trobar per observació directa del traçat.²⁴ Per exemple, cal que es compleixi

$$(a + (r + b)\lambda)^2 - (a^2 + b^2 - r^2) \geq 0,$$

la qual cosa equival a
$$\begin{cases} -r \leq b \leq \frac{r + a \sin \alpha}{\cos \alpha}, & \text{si } 0 < \lambda < 1 \\ -r \leq b, & \text{si } 1 \leq \lambda \end{cases}$$

- Una altra condició que cal tenir en compte és el cas $a^2 + b^2 < r^2$. Aquí caldrà escriure el radical contingut en el valor de x com $\sqrt{(a + (r + b)\lambda)^2 + (r^2 - (a^2 + b^2))}$. Llavors s’obté una sola circumferència tangent entre les dues semirectes, la corresponent al radical afectat del signe positiu. En la imatge es pot observar la construcció en què s’han canviat dos dels quatre triangles clau de la construcció del cas anterior.

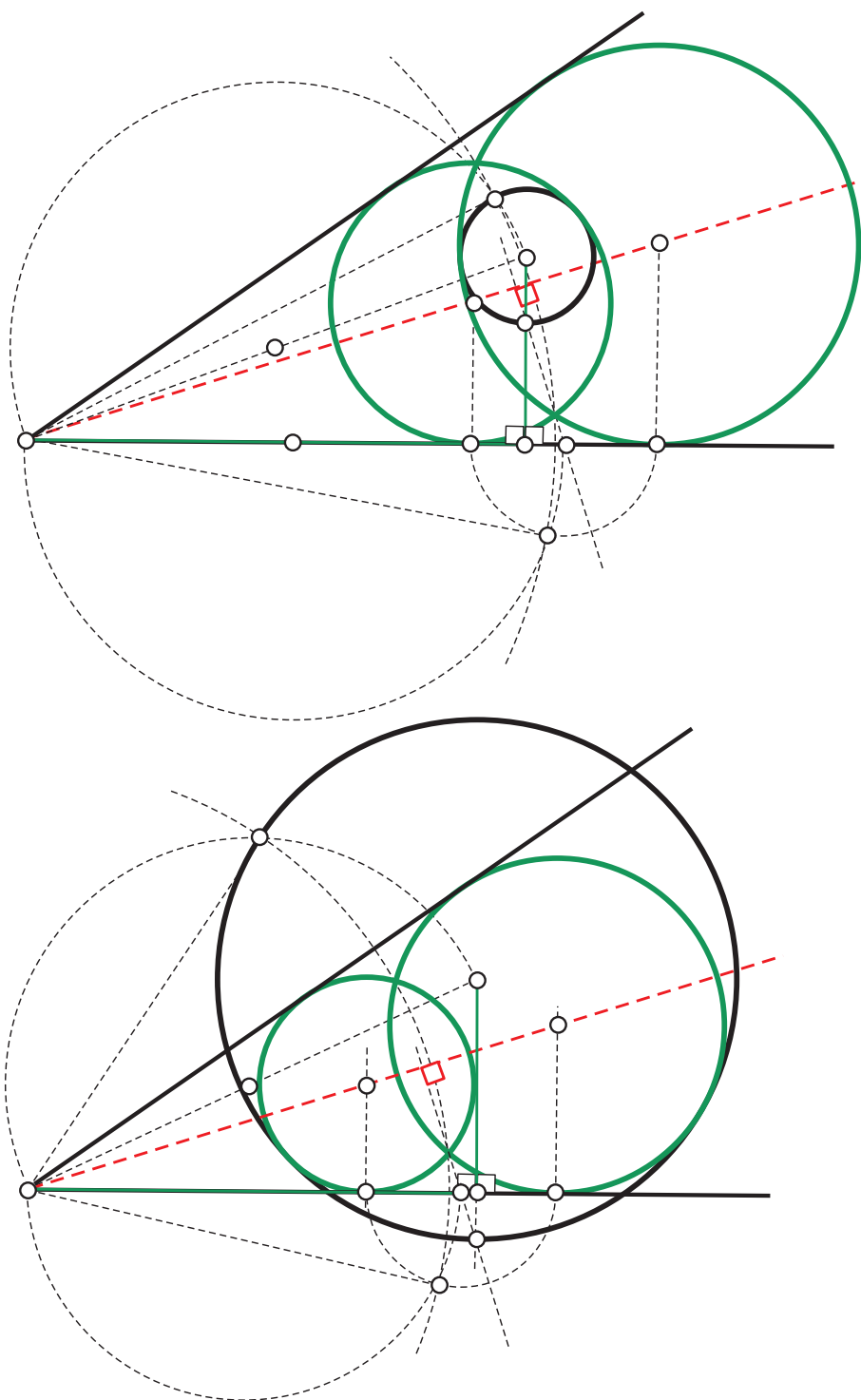


- Per a les construccions vegeu <https://www.geogebra.org/m/hdddcshs>.
- Queda com a proposta l’estudi dels casos de tangència interior en què el valor obtingut per a x , tenint en compte que la distància entre centres és $|r - y|$, és

$$x = a + (b - r)\lambda \pm \sqrt{(a + (b - r)\lambda)^2 - (a^2 + b^2 - r^2)}.$$

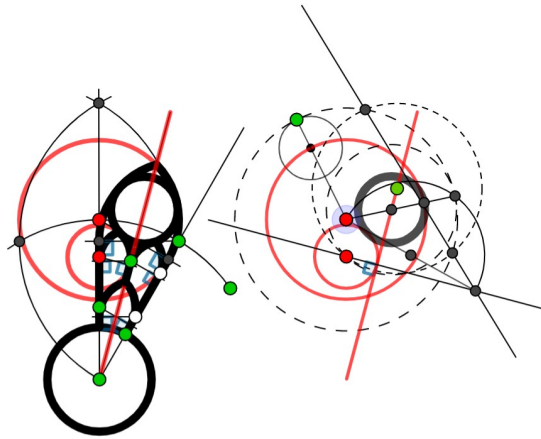
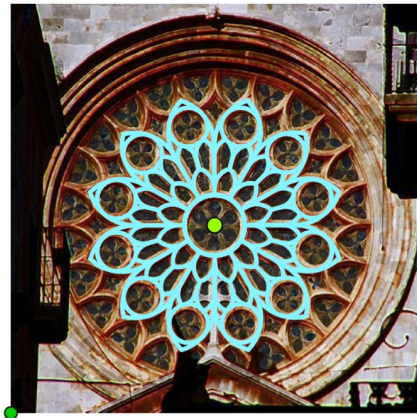
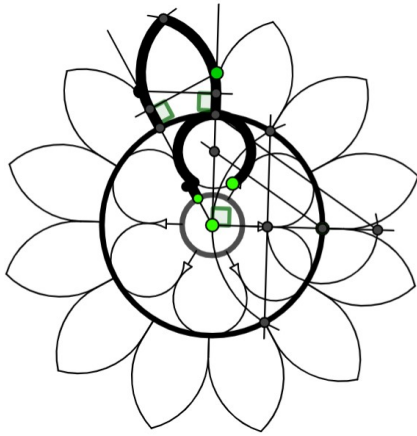
²⁴Sobre el terme *diorismós* podeu consultar NOLLA [2006], pàg. 147-149

A continuació es presenten unes imatges amb les construccions que poden ser útils per acompanyar l'estudi. També les podeu trobar a <https://www.geogebra.org/m/jnrdxjqh>.



- Podeu accedir a una visualització de la implementació algebraica de les tangències tractades, en el document <https://www.geogebra.org/m/jzmxabag>.

3.2.5 (E27) Vegeu els quatre dissenys treballats sobre la part central de la rosassa, els sectors radials i el traçat conjunt en l'apartat 'Rosassa central' del llibre GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/zpu8jr4r#chapter/468129>, dels quals es mostren algunes imatges.



5 Annex

5.1 Sobre el mètode de l'anàlisi

En diferents parts d'aquest text recorrem a fer una *anàlisi* dels problemes de construcció per tal de poder executar-la amb regla i compàs o amb l'ajut del programa GeoGebra. Aquestes anàlisis s'han fet de vegades utilitzant un llenguatge estrictament geomètric i d'altres recorrent al llenguatge algebri. Dedicarem unes línies a la concepció del mètode de l'anàlisi en els autors clàssics, Pappos d'Alexandria [III-IV AD] i Descartes [1596-1650], les quals podreu ampliar amb la consulta dels textos que s'ofereixen en les notes d'aquesta pàgina.

- Pappos en el llibre VII de la *Col·lecció Matemàtica* presenta l'anàlisi com un mètode en què se suposa resolta la demostració o construcció que es vol fer, per treure'n conseqüències fins arribar a una construcció o principi coneguts, o per arribar a una falsedat. En el segon cas el que es vol demostrar seria fals o la construcció impossible. En el primer cas passariem a la síntesi consistent a refer el camí recorregut en ordre invers fins l'establiment de la proposició o construcció demanada. Aquests camins el recorre utilitzant propietats geomètriques conegudes i amb llenguatge estrictament geomètric.²⁵

... l'anàlisi és la via que parteix de la cosa buscada, considerada com a obtinguda, per arribar mitjançant les conseqüències que se'n dedueixen a la síntesi d'allò que s'ha admès ...

- Descartes en el *Discurs del mètode*, considera el tractament de línies com a xifres i, com hem citat al preàmbul, «així recollia el millor de l'anàlisi geomètrica i de l'àlgebra, i corregia tots els defectes de l'una per l'altra».²⁶ En la *Geometria*, Descartes afegeix a la concepció de l'anàlisi de Pappos el fet d'identificar les línies amb xifres conegudes o desconegudes i la manera de dur a terme el seu pla és, un cop suposat el problema resolt i donat nom a les línies, trobar relacions entre les xifres conegudes i desconegudes, a partir de propietats geomètriques conegudes, fins arribar a expressar una mateixa quantitat de dues maneres diferents, (és a dir a una equació). Això fer-ho tantes vegades com línies desconegudes hi hagi. Finalment, caldrà eliminar les línies desconegudes fins que en quedi una de sola del grau que sigui. Interpretem que l'anàlisi s'acaba quan troba les equacions, les quals resulten ser la síntesi de totes les observacions fetes sobre les línies per l'aplicació de propietats geomètriques conegudes. La resolució d'aquestes equacions permetrà construir la solució del problema.²⁷

... si volem resoldre un problema, caldrà en primer lloc suposar-lo ja resolt i donar noms a totes les línies que semblin necessàries per a construir-lo, tant aquelles que són desconegudes com les altres. Després, sense fer cap diferència entre aquestes línies conegudes i desconegudes, cal recórrer la dificultat segons l'ordre que mostra, de la manera més natural entre totes, de quina manera depenen les unes de les altres, fins que s'hagi trobat la forma d'expressar una mateixa quantitat de dues maneres: això és el que s'anomena una equació ...

²⁵Per a un estudi del mètode de l'anàlisi en la Grècia clàssica i el text de Pappos amb la seva concepció d'aquest mètode podeu consultar NOLLA [2006], pàg. 127-152, 394-395 i EECKE [1933].

²⁶Vegeu ADAM-TANNERY [1902], VI, pàg. 20 i QUINTÁS [1981] pàg. 17.

²⁷Vegeu ADAM-TANNERY [1902], VI, pàg. 372 i seg., PLA-VIADER [1999], pàg. 17 i seg. i QUINTÁS [1981], pàg. 282 i seg.

5.2 François Viète i l'*Apollonius Gallus*

En la història de la matemàtica François Viète és entre d'altres coses conegut, per la seva àlgebra o *Ars analytica*, com ell preferia anomenar. Aquesta feu de pont entre l'àlgebra retòrica àrab i l'àlgebra simbòlica moderna. Es diferenciava de la moderna en què era sinco-pada, és a dir mesclava paraules del llenguatge habitual amb algunes abreviatures i lletres per les quantitats. Incorporava la novetat de diferenciar amb diferents tipus de lletres els paràmetres, —quantitats donades o conegudes—, de les incògnites en una equació. Això era molt important de cara a donar solucions generals per diferents tipus d'equacions i problemes.²⁸ Aquest no era l'únic camp en què va treballar, així la geometria també es trobava entre els seus punts d'interès. En la seva obra l'*Apollonius Gallus* resol el problema de la construcció del cercle tangent a tres cercles donats. Allí es pot percebre el coneixement que tenia dels diferents tipus de problemes geomètrics i el seu tractament per part dels autors clàssics. De fet l'obra és un intent de reconstrucció del tractat *Tangències* d'Apolloni del qual no es té cap còpia i només era i és conegut per la notícia que en dona Pappos d'Alexandria. A continuació s'exposa la dedicatòria que fa a Adrien Romain l'any 1957 en carta manuscrita.²⁹

Eminent Adrien, he proposat als amants de les matemàtiques el tractament per un mètode geomètric i no per un mètode mecànic del problema de la construcció d'un cercle al qual toquen tres cercles donats.³⁰ Quan es toca el cercle mitjançant hipèrboles, no es tracta el problema amb habilitat. Efectivament no es pot traçar la hipèrbola per la geometria en el sentit docte del terme. Menecme ha duplicat el cub per la paràbola. Nicomedes per la concoide, significa això que el cub ha estat duplicat geomètricament? Dinostrat ha quadrat el cercle gràcies a la seva espiral irregular i Arquimedes gràcies a la seva espiral regular, significa això que el cercle ha estat quadrat geomètricament? Ningú anomenarà això geometria. Euclides i tota la seva escola protestarien. Així, eminent Adrien, i, si tu m'ho permetes, Apolloni belga, en ser el problema que he proposat pla i ser la teva resolució sòlida,³¹ per aquesta raó, no pots assegurar la intersecció de les hipèrboles de la que has fet hipòtesi per les necessitats de la causa i, fins i tot ara, no pots fer-ho ja que si de fet les asímptotes són paral·leles els teus esforços seran inútils. D'altra part els antics han temut sempre descriure les seccions còniques en el pla. Així que renuncia a les línies mixtes i aprèn ara de bon grat, d'un Apolloni ressuscitat a la vora de l'Oceà aquità, una tècnica enginyosa i docta. Pappos ha reduït els problemes sobre el contactes d'Apolloni de Perge a deu: jo els resoldré un a un segons l'ordre que semblarà més oportú.

Es remarcable la quantitat d'informació que dona en poques línies sobre els problemes de construcció geomètrica. Des d'aquí es podrien propiciar línies de recerca entre l'alumnat que facin referència als problemes clàssics, als problemes de construcció amb regla i compàs, al traçat de corbes i a les relacions amb l'àlgebra.³²

²⁸Vegeu [BOYER](#) [1968], pàg 385-389 de la traducció espanyola.

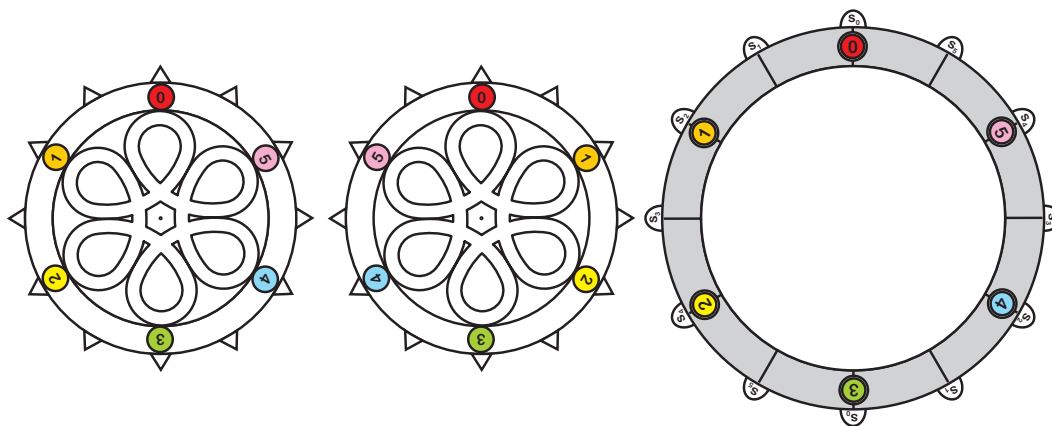
²⁹Sobre aquesta dedicatòria vegeu [BOYÉ](#) [1998], on es poden trobar, a t. 1 pàg. 22-27 les circumstàncies que la motiven, a t.2 pàg. 23-24 la traducció al francès que s'ha utilitzat per la versió d'aquesta pàgina i a t.2 pàg. 8 el text llatí de l'edició de 1646.

³⁰"... al qual són tangents tres cercles donats".

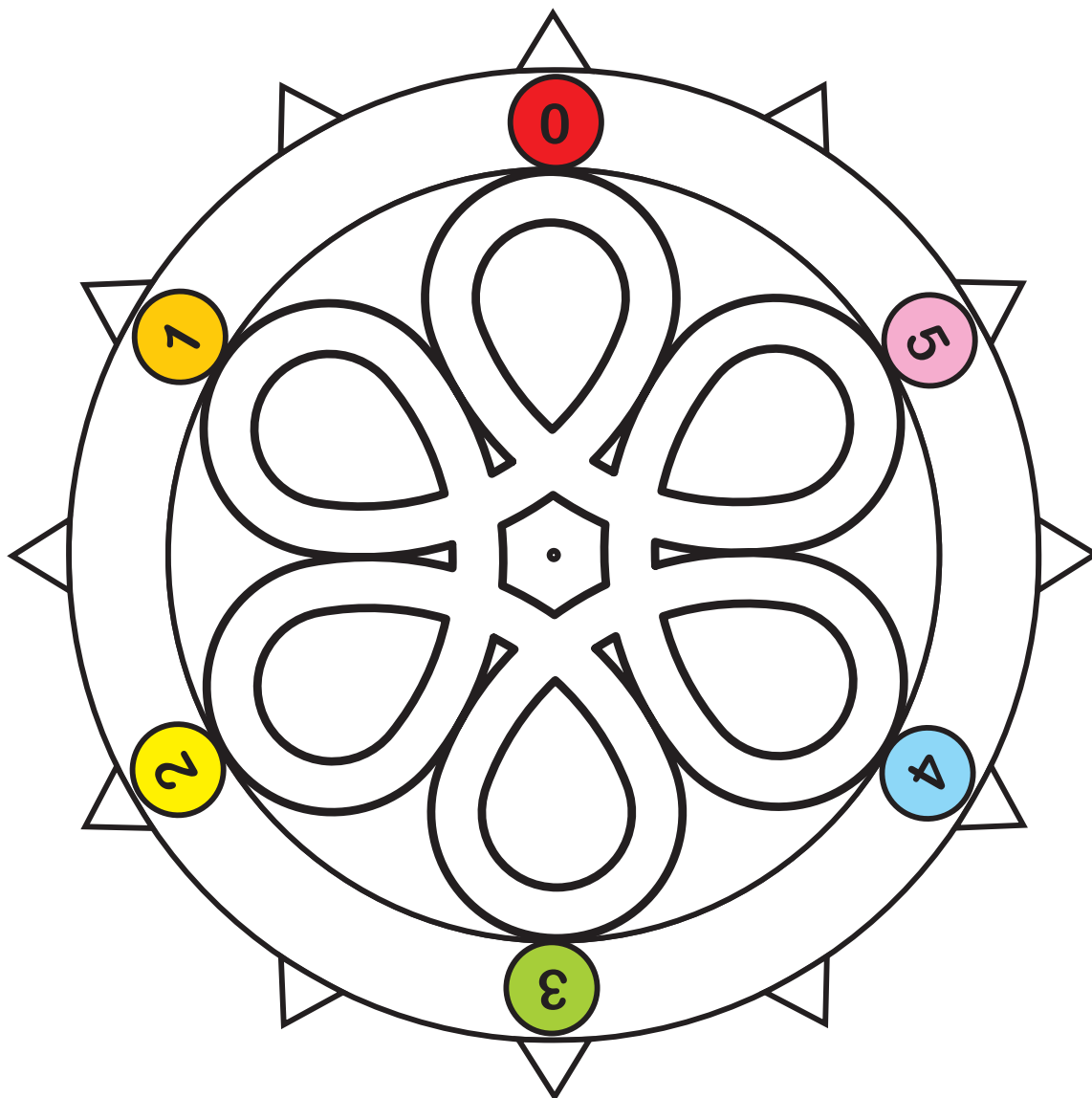
³¹L'afirmació que el problema és pla possiblement fou obtinguda de la seva àlgebra, des de la qual hauria pogut descobrir que el problema era de segon grau i per tant pla, és a dir construïble amb regla i compàs.

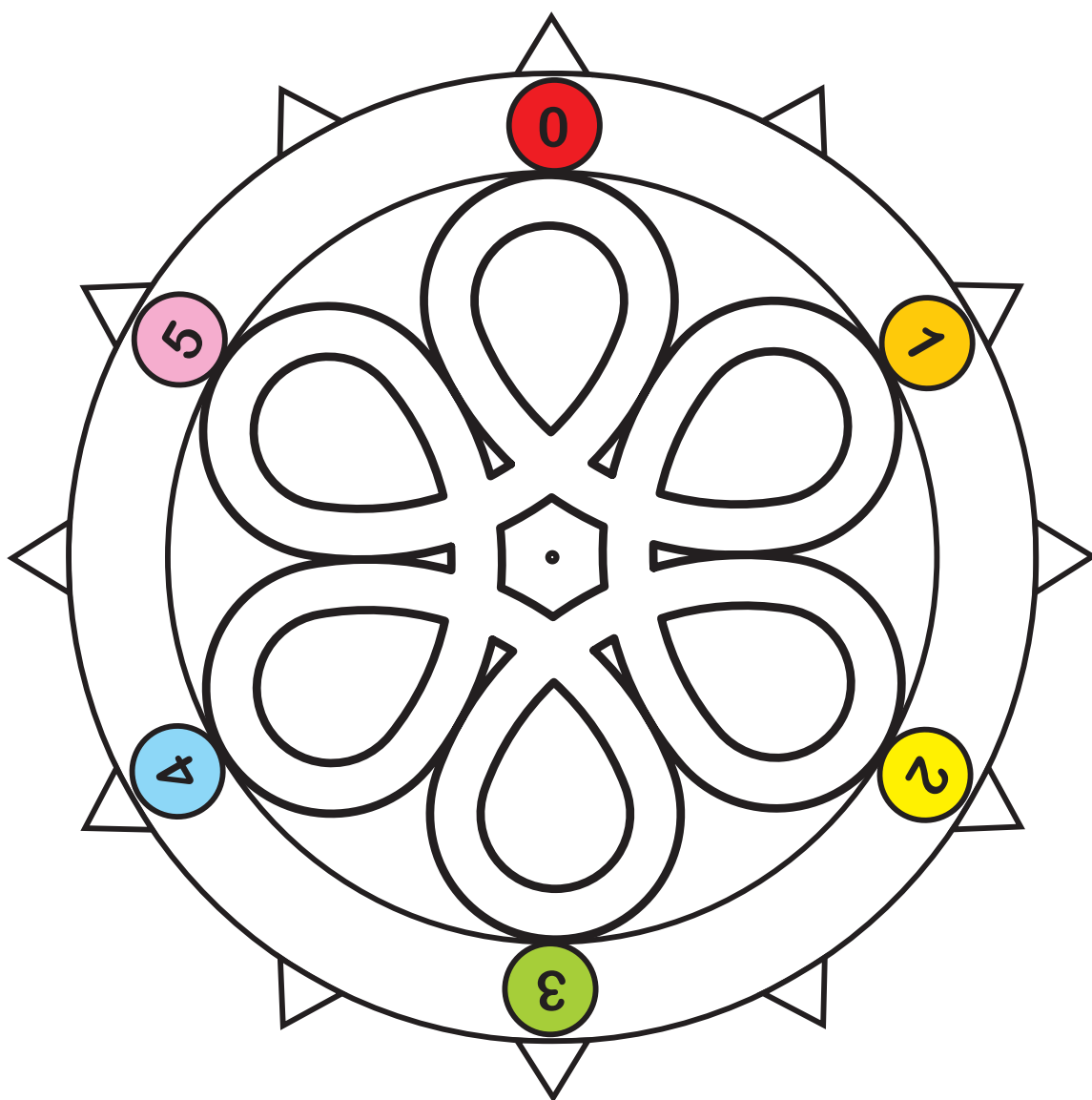
³²Per estudis i activitats sobre els problemes clàssics i les còniques vegeu [NOLLA](#) [2006], pàg. 277-328.

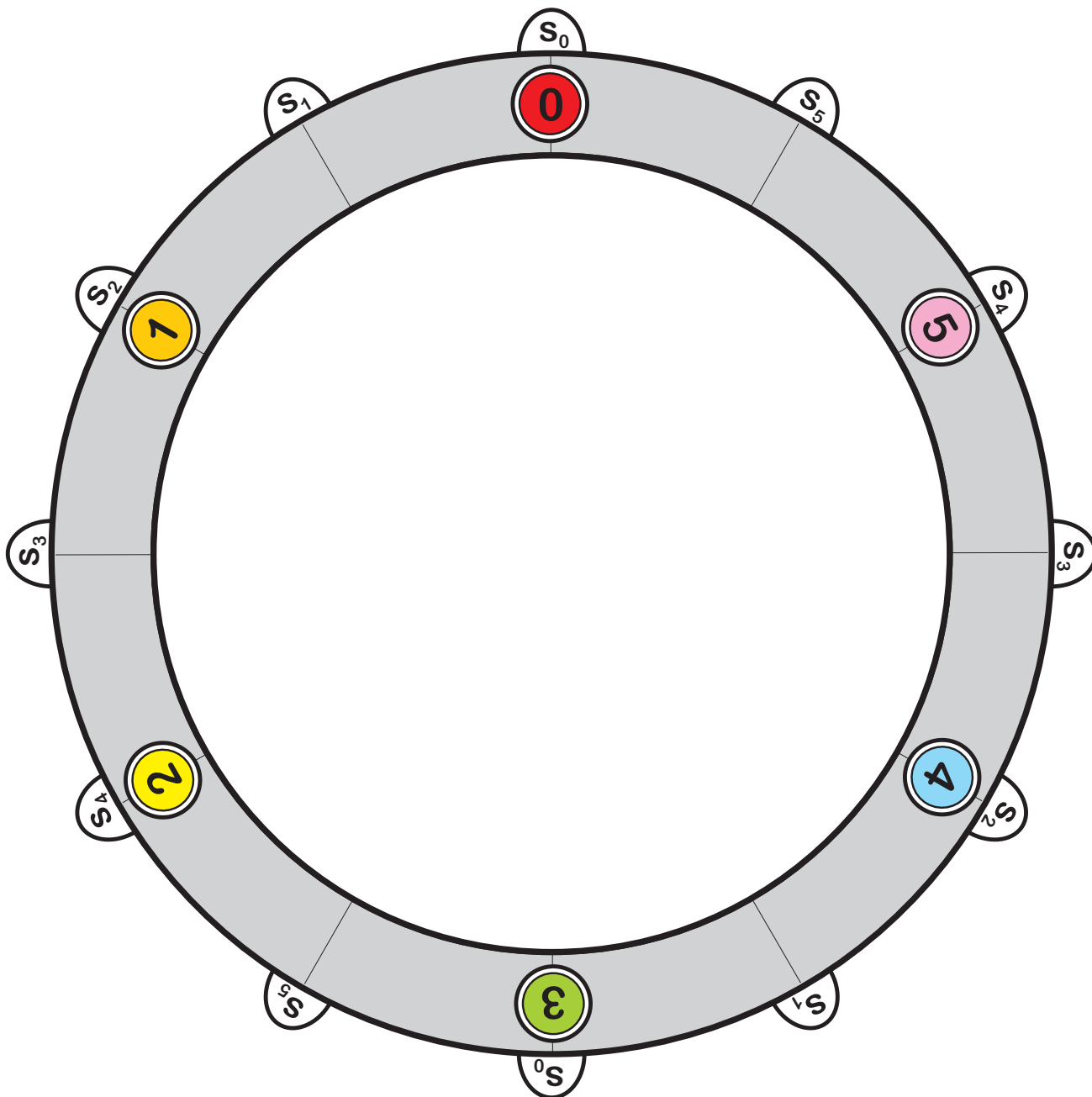
5.3 Model per experimentar les composicions de simetries



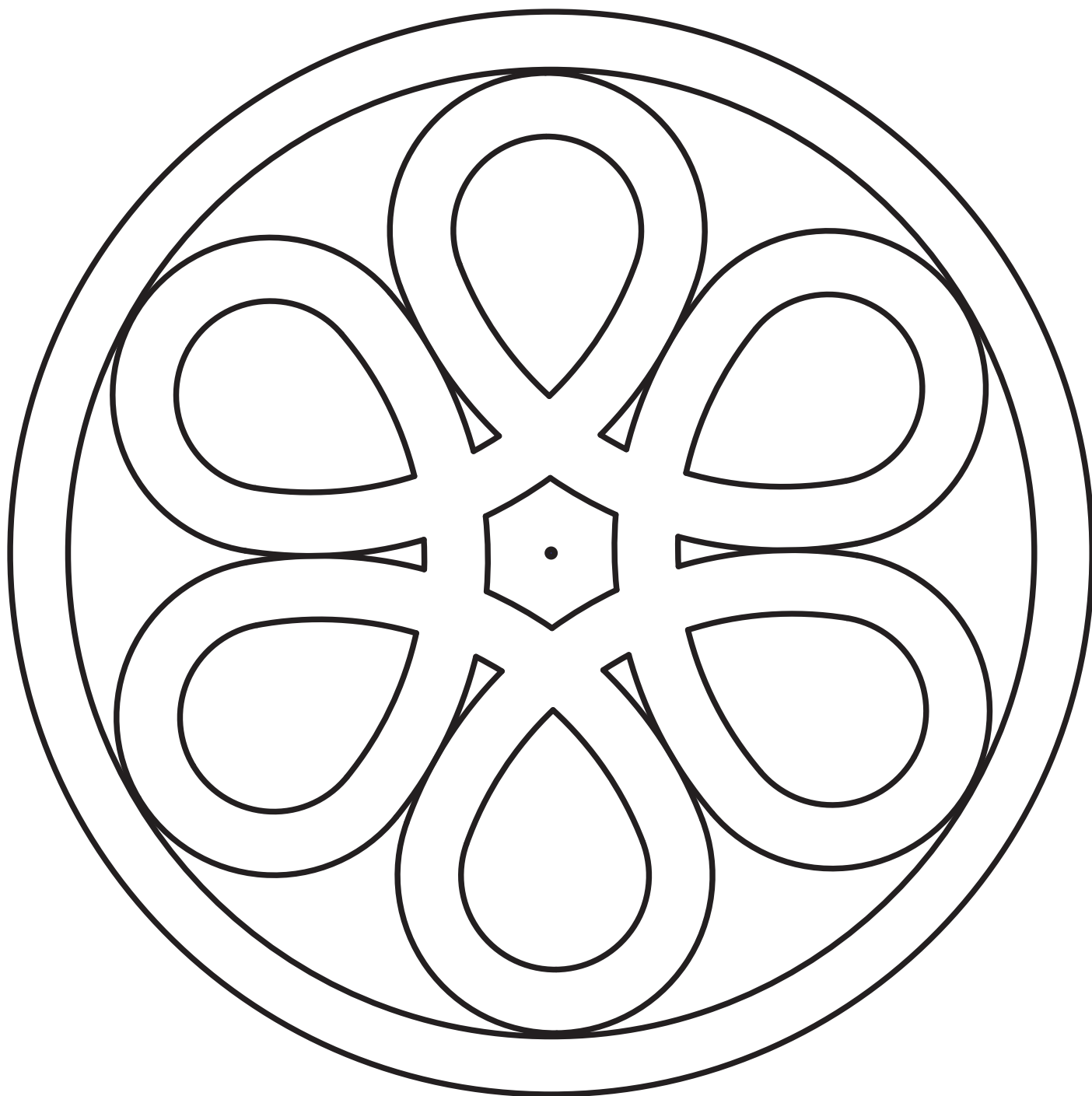
A continuació trobareu tres figures, les quals hem representat damunt en grandària reduïda. Cal retallar les dues primeres pel perímetre exterior i empegar-les pel darrere, de manera que coincideixin els nombres. Amb aquest objecte podrem simular les simetries axials girant 180° al voltant dels eixos que hi ha dibuixats. Per a les rotacions només caldrà fer-lo girar sobre l'interior de la tercera figura, al voltant del seu centre.



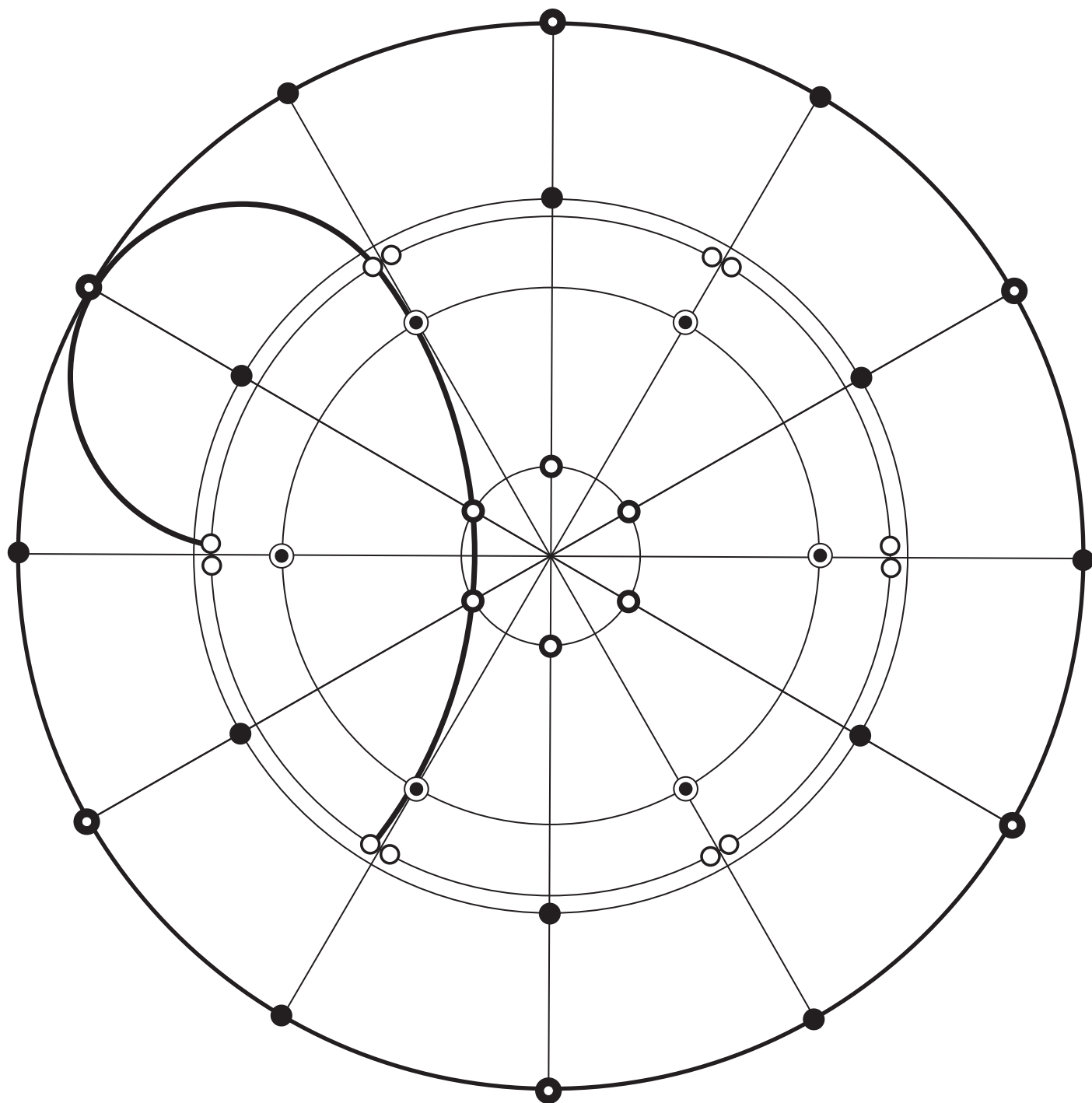




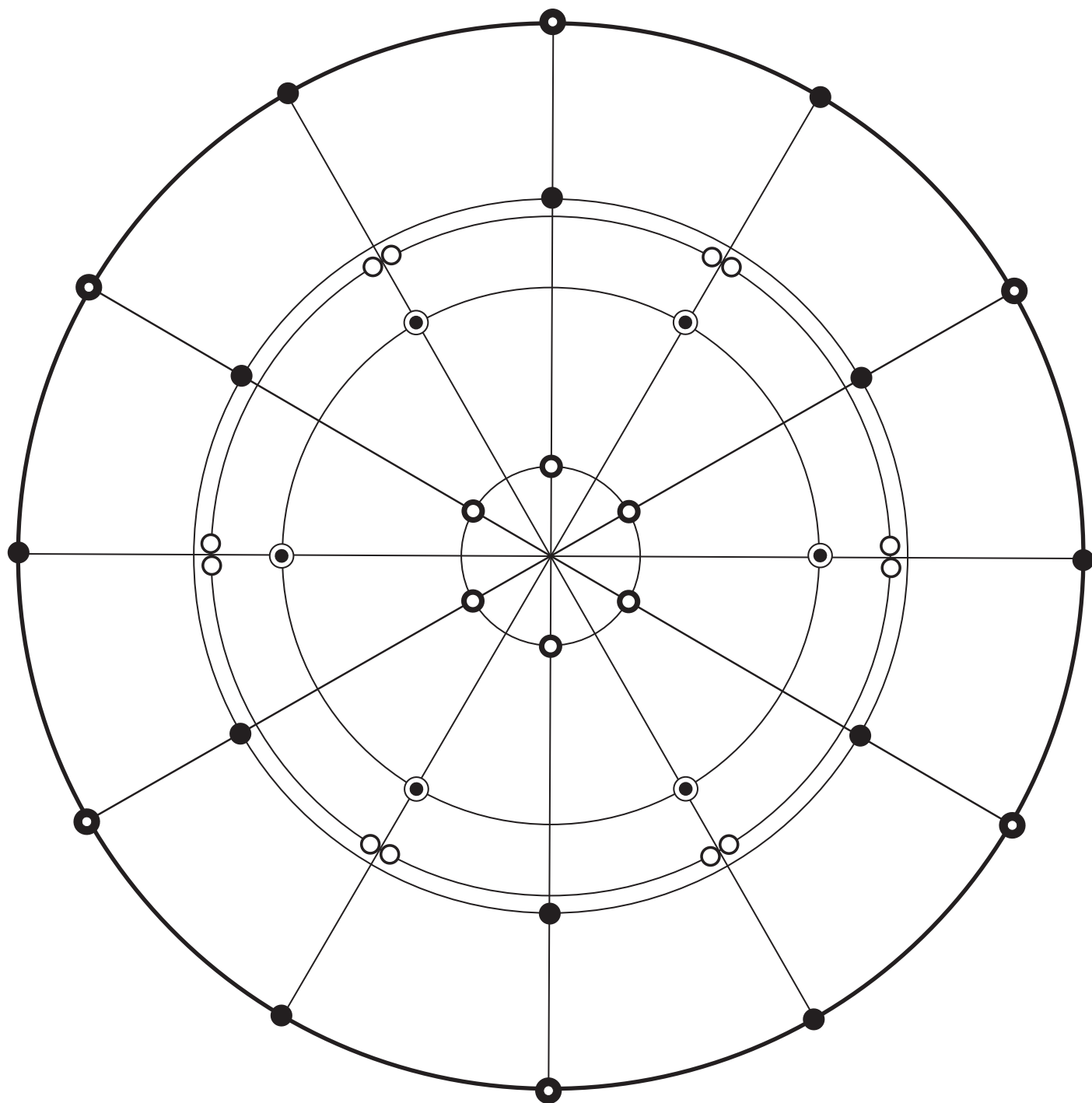
5.4 Model de rosassa per acolorir



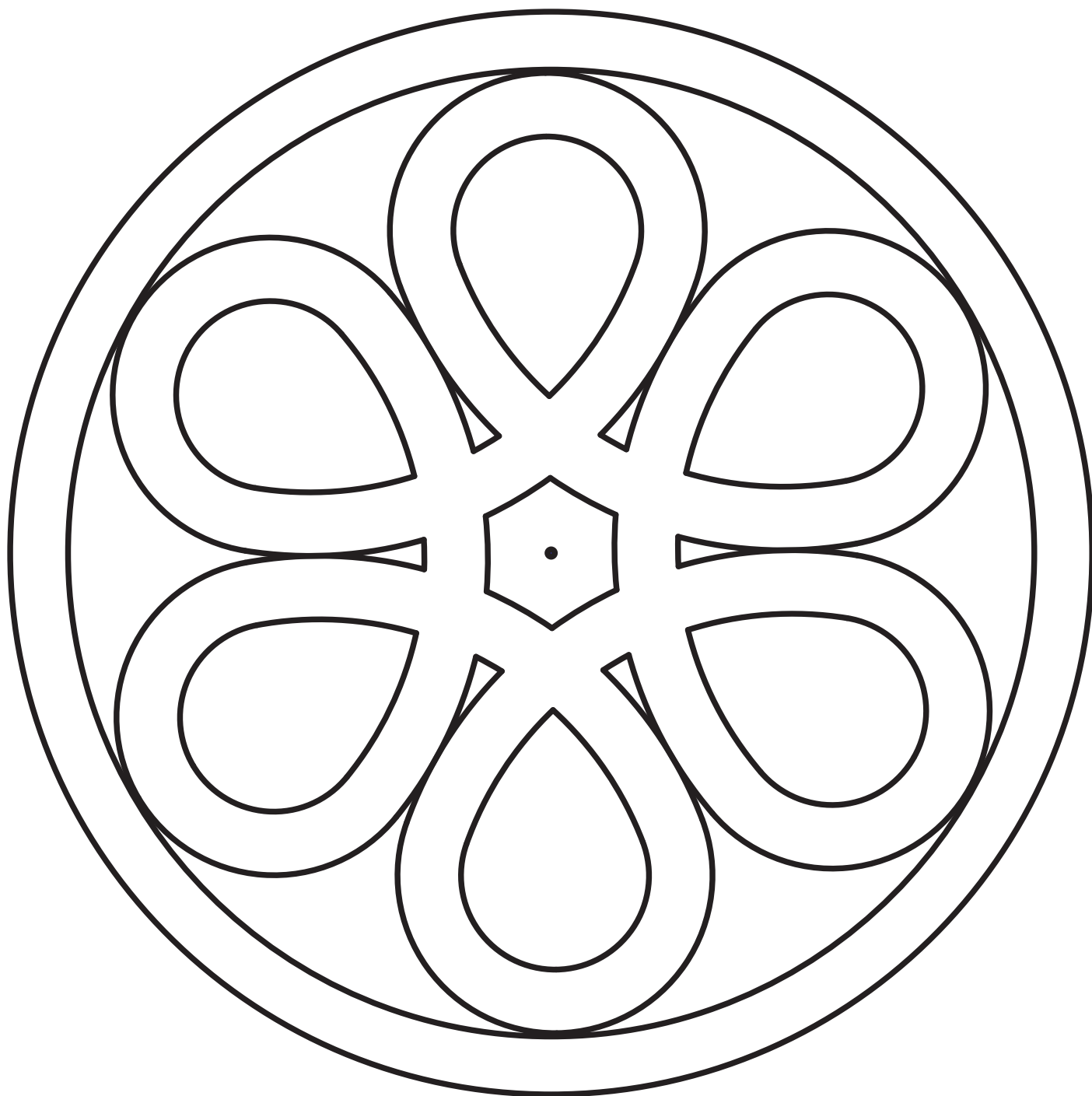
5.5 Model pautat per dibuixar la rosassa a mà alçada



5.6 Model pautat per dibuixar la rosassa amb regla i compàs



5.7 Model de rosassa de la porta de l'Evangelí per plegar i retallar



5.8 Activitat sobre el model epicicle-deferent per a 3r d'ESO

Epicles

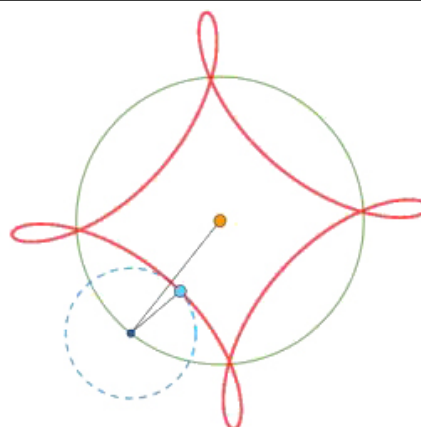
Construcció amb el programa GeoGebra

Ramon Nolla

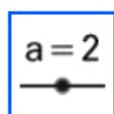
Departament de Matemàtiques

Ins Pons d'Icart

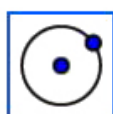
Model geomètric utilitzat a l'antiga Grècia per explicar els moviments aparents dels planetes, el Sol i la Lluna, consistent en que aquests es mouen en un cercle (**epicicle**), el centre del qual es mou en un altre cercle (**deferent**).



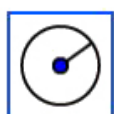
Eines que s'utilitzaran.



Punt
lliscant



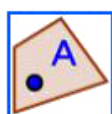
Circumfe
rència
donats el
centre i
un punt



Circumfe
rència
donats el
centre i
el radi



Punt



Punt en
un
objecte



Rotació
al voltant
d'un
punt



Segment



Lloc
geomètric



Casella
de
control
per
mostrar
amagar

Etales de la construcció.

1.		Clickueu sobre la part superior de la finestra de dibuix i en la finestra emergent completeu: ● Nombre/Nom= $\text{rao}/\text{min}=-5/\text{max}=5/\text{Increment}=0.1$
2.		Clickueu sota el punt anterior en la finestra de dibuix i en la finestra emergent completeu: ● Nombre/Nom= $\text{a}/\text{min}=0/\text{max}=5/\text{Increment}=0.1$
3.		Clickueu sota el punt anterior en la finestra de dibuix i en la finestra emergent completeu: ● Angle/Nom= $\alpha/\text{min}=0^\circ/\text{max}=3600^\circ/\text{Increment}=0.2^\circ$
4.		Feu clic sobre la finestra de dibuix (aquest punt serà el centre). Torneu a fer clic sobre la finestra de dibuix (per aquest punt passarà la circumferència)
5.		Clickueu sobre el perímetre de la circumferència (4.) per crear un punt
6.		Clickueu sobre el punt resultant de (5.), després clickueu sobre el centre de la circumferència (4.) i escriviu α en la finestra emergent per a l'angle de gir o rotació
7.		Feu clic sobre el punt resultant de (6.) (aquest serà el centre). Escriviu a en la finestra emergent, per al radi
8.		Clickueu sobre el perímetre de la circumferència (7.) per crear un punt
9.		Clickueu sobre el punt resultant de (8.), després clickueu sobre el centre de la circumferència (7.) i escriviu $\text{rao } \alpha$ (amb un espai entre rao i α) en la finestra emergent per a l'angle de gir o rotació
10.		Construiu dos segments: El primer des del centre de la circumferència (4.) fins el centre de la circumferència (7.) i, el segon, des del centre de (7.) fins el punt resultant de (9.)
11.		Clickueu sobre el punt resultant de (9.) i després sobre el punt lliscant α . (Apareixerà el recorregut o òrbita del punt resultant de (9.))
12.		Clickueu sobre la finestra de dibuix. En la finestra emergent escriviu <i>òrbita</i> a la llegenda i, després clickueu sobre l'òrbita. Finalment clickueu sobre Aplica . (Servirà per mostrar o amagar l'òrbita)
13.		Obriu les propietats del punt lliscant α i actualitzeu les pestanyes de la manera següent – Bàsic: animació activada – Punt lliscant: Velocitat = 0.2 / Repeteix = Creixent

El model epicicle–deferent. Activitat

RAMON NOLLA

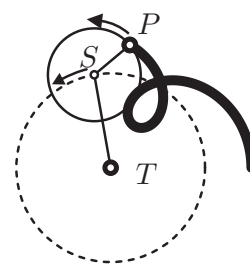
Departament de Matemàtiques

Ins Pons d'Icart

Introducció

El model epicicle–deferent fou creat per explicar el moviment aparent del Sol, la Lluna i els planetes, —observats des de la Terra constituïda en centre de l'Univers—, projectats sobre el fons o esfera dels estels fixos.³³

Aquest model resulta d'una combinació de moviments circulars uniformes. Concretament descriu la trajectòria d'un punt P , —planeta—, que es mou uniformement sobre un cercle, *epicicle*, el centre S del qual es mou uniformement sobre un altre cercle, *deferent*, de centre fix T , —la Terra, centre de l'Univers—.

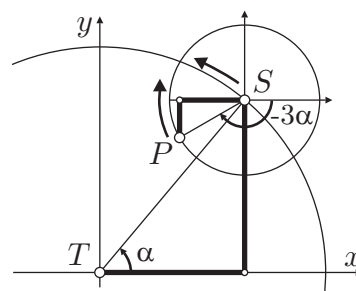


Claudi Ptolemeu (s.II) en la seva obra sobre astronomia *Sintaxi* (o *col·lecció Matemàtica*,³⁴ en fa un ús magistral per explicar la irregularitat del moviment erràtic dels planetes. També hi afegeix diverses correccions per tal d'ajustar el model a les observacions més acurades d'aquests moviments sota la volta de les estrelles fixes.

Activitat

L'activitat es dividirà en dos apartats:

Part I. Estudiareu diferents tipus d'equacions de les trajectòries resultants del model epicicle-deferent en el cas particular de la corba anomenada *astroide*. Ho fareu a partir de les equacions paramètriques dels dos cercles. En aquest cas el radi de l'epicicle és igual a una tercera part del radi del deferent. La relació de velocitats del punt P que es mou sobre l'epicicle i del centre seu centre S és de 3 a 1, en sentits oposats.



Un cop trobades les equacions en fareu una presentació en un document GeoGebra.

Part II. Creareu una visualització dinàmica en un segon document GeoGebra del cas general a partir de les equacions paramètriques de la trajectòria de P . Els radis de l'epicicle i del deferent i les velocitats del centre S de l'epicicle i del punt P que es mou per l'epicicle seran paràmetres que es podran variar per tal de poder visualitzar diferents tipus de trajectòries.

³³Vegeu l'annex.

³⁴Aquest tractat és també conegut pel nom *Almagest*, —hereu de la denominació àrab *al-majistī* derivada del grec antic *megiste*, μέγιστη, “el més gran”—, en comparació a una altra col·lecció de tractats d'autors grecs anteriors, qualificada de menor.

PART I. Considereu una referència ortonormal amb origen el centre del cercle deferent de radi igual a tres unitats. Recordeu la relació entre els radis dels dos cercles i les velocitats dels dos punts, S i P , implicats en la determinació de la trajectòria.

- Trobeu les equacions paramètriques del punt P . (El paràmetre α escollit serà l'angle descrit pel punt S , al girar al voltant del centre T del deferent, a partir de la direcció positiva de l'eix de les abscisses.)
- Simplifiqueu les expressions obtingudes mitjançant l'ús de les identitats trigonomètriques que expressen $\sin(3\alpha)$ i $\cos(3\alpha)$ en funció de $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.
- Elimineu el paràmetre α per tal d'obtenir una equació implícita amb radicals de la trajectòria que relacioni directament les dues coordenades x i y de cada punt P de la trajectòria. (Recordeu que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.)
- A partir del resultat anterior, obteniu una altra equació implícita de la trajectòria en què no apareguin radicals.
- Elaboreu una construcció GeoGebra en què es visualitzi dinàmicament la creació de la trajectòria, a partir de les equacions paramètriques, i en què es comprovi que les dues equacions implícites obtingudes són correctes. Podeu seguir les instruccions següents:

(a) Creació d'un angle variable amb l'eina punt lliscant: Angle = α . min = 0° . max = 360° . Increment = 0.1° . Velocitat = 1. Repeteix = creixent.

(b) A la línia de comandaments escriviu:

- $T = \text{Intersecció}(\text{EixX}, \text{EixY})$.
- Circumferència($T, 3$)
- $S = (3 \cos(\alpha), 3 \sin(\alpha))$.
- Circumferència($S, 1$)
- $P = (4 \cos(\alpha)^3, 4 \sin(\alpha)^3)$.
- Corba($4 \cos(t)^3, 4 \sin(t)^3, t, 0^\circ, \alpha$)
- Corba($4 \cos(t)^3, 4 \sin(t)^3, t, 0^\circ, 360^\circ$)
- $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$
- $432 x^2 y^2 - (16 - x^2 - y^2)^3 = 0$

(c) Creeu tres caselles de control per mostrar/amagar cadascuna de les tres últimes construccions.

PART II. Considereu, igual que abans, una referència ortonormal amb origen el centre T del cercle deferent de radi qualsevol. Anomeneu

- r_1, r_2 els radis del deferent i de l'epicicle de centre S .
- $p \cdot \alpha, q \cdot \alpha$ les velocitats del punt P i S , en què $p, q \in \mathbb{Z}$ i α és un angle variable.

- Trobeu les equacions paramètriques del punt P . (El paràmetre serà α .)
- Elaboreu una construcció GeoGebra en què es visualitzi dinàmicament la creació de la trajectòria. Podeu seguir les instruccions següents:
 - Creació d'un angle variable amb l'eina punt lliscant: Angle = α . min = 0° . max = 360° . Increment = 0.1° . Velocitat = 1. Repeteix = creixent.
 - Creació de dos punts lliscants numèrics r_1 i r_2 per als radis. min = 0. max = 10. Increment = 0.1.

- (c) Creació de dos punts lliscants numèrics p i q per al control de velocitats. $\min = 0$.
 $\max = 100$. Increment = 1.
- (d) A la línia de comandaments escriviu:
- i) $T = \text{Intersecció}(EixX, EixY)$.
 - ii) $\text{Circumferència}(T, r1)$
 - iii) $S = (r1 \cos(q \alpha), r1 \sin(q \alpha))$.
 - iv) $\text{Circumferència}(S, r2)$
 - v) $P = (r1 \cos(q \alpha) + r2 \cos(p \alpha), r1 \sin(q \alpha) + r2 \sin(p \alpha))$.
 - vi) $\text{Corba}(r1 \cos(q t) + r2 \cos(p t), r1 \sin(q t) + r2 \sin(p t), t, 0^\circ, \alpha)$
 - vii) $\text{Corba}(r1 \cos(q t) + r2 \cos(p t), r1 \sin(q t) + r2 \sin(p t), t, 0^\circ, 360^\circ)$
- (e) Creeu una casella de control per mostrar/amagar l'última construcció.

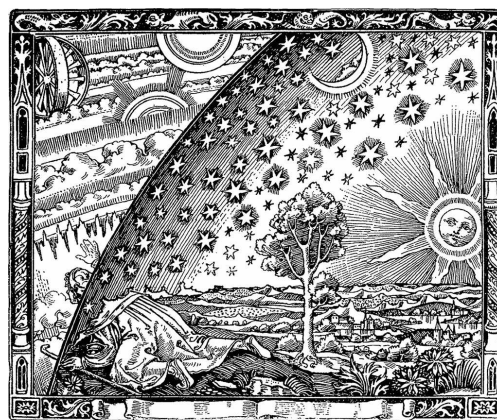
Indicació sobre el treball manuscrit. Els apartats 1 a 4 de la Part I i l'apartat 1 de la Part II, es presentaran per escrit. Es raonaran tots els passos que es fan. També s'inclourà una introducció descriptiva del model epicicle-deferent, situant-lo en context històric i citant les fonts d'informació. Afegireu algunes consideracions que hàgeu tractat a les classes de Filosofia.

Annex

Des de l'Antiguitat fins l'arribada de la teoria heliocèntrica de Copèrnic (s.XVI), es considerava de manera majoritària que aquesta esfera contenia fixats interiorment a la seva superfície totes les estrelles excepte el Sol, de manera que les seves distàncies relatives no variaven i que donava una volta a la Terra en quasi bé un dia de temps solar, (dos passos consecutius del Sol pel meridià de l'observador).^a

El Sol, els planetes i la Lluna es movien a l'interior d'aquesta esfera a diferents velocitats de manera que les estrelles de fons sobre les que es projectaven canviaven dia a dia. A partir d'aquestes projeccions fetes diàriament, es podia traçar la trajectòria que cadascun d'aquests astres seguia al llarg de la volta celeste. Aquesta trajectòria es completava quan l'astre es trobava en la mateixa posició respecte el Sol i es projectava sobre el mateix fons d'estrelles que a l'inici de l'observació. En el cas del Sol en resultava una trajectòria circular de Oest a Est que es completava en aproximadament 365.256 dies solars.

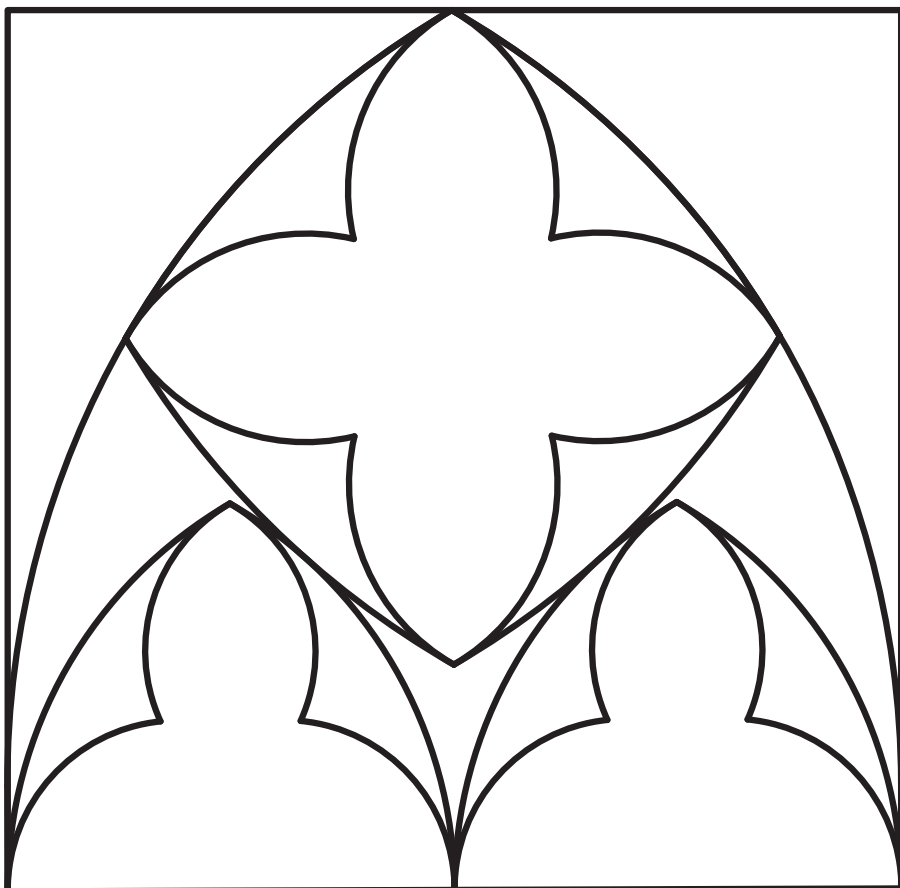
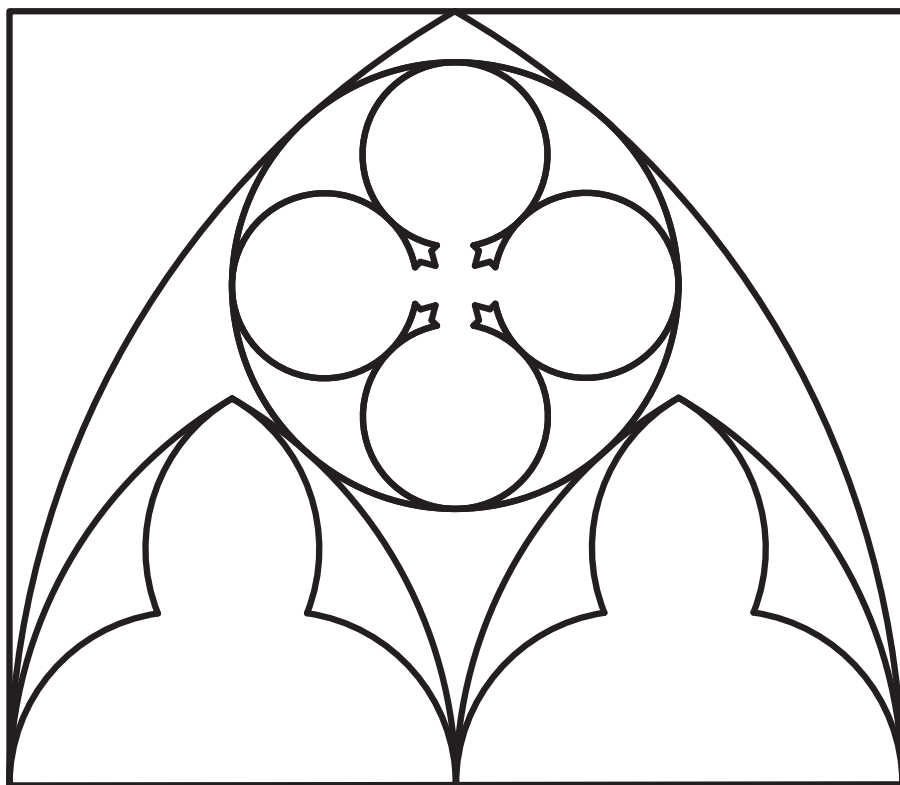
Per als planetes, aquesta trajectòria variava en cada cas i no sempre en la mateixa direcció. Per exemple, Mercuri tardava set anys en completar-la i també es movia d'Oest a Est però amb 22 intervals de canvi de direcció, Est-Oest, fase del moviment que rep el nom de *retrogradació*. Aquest comportament erràtic fou el que originà la recerca de models per explicar-lo i la creació del model que ens ocupa.



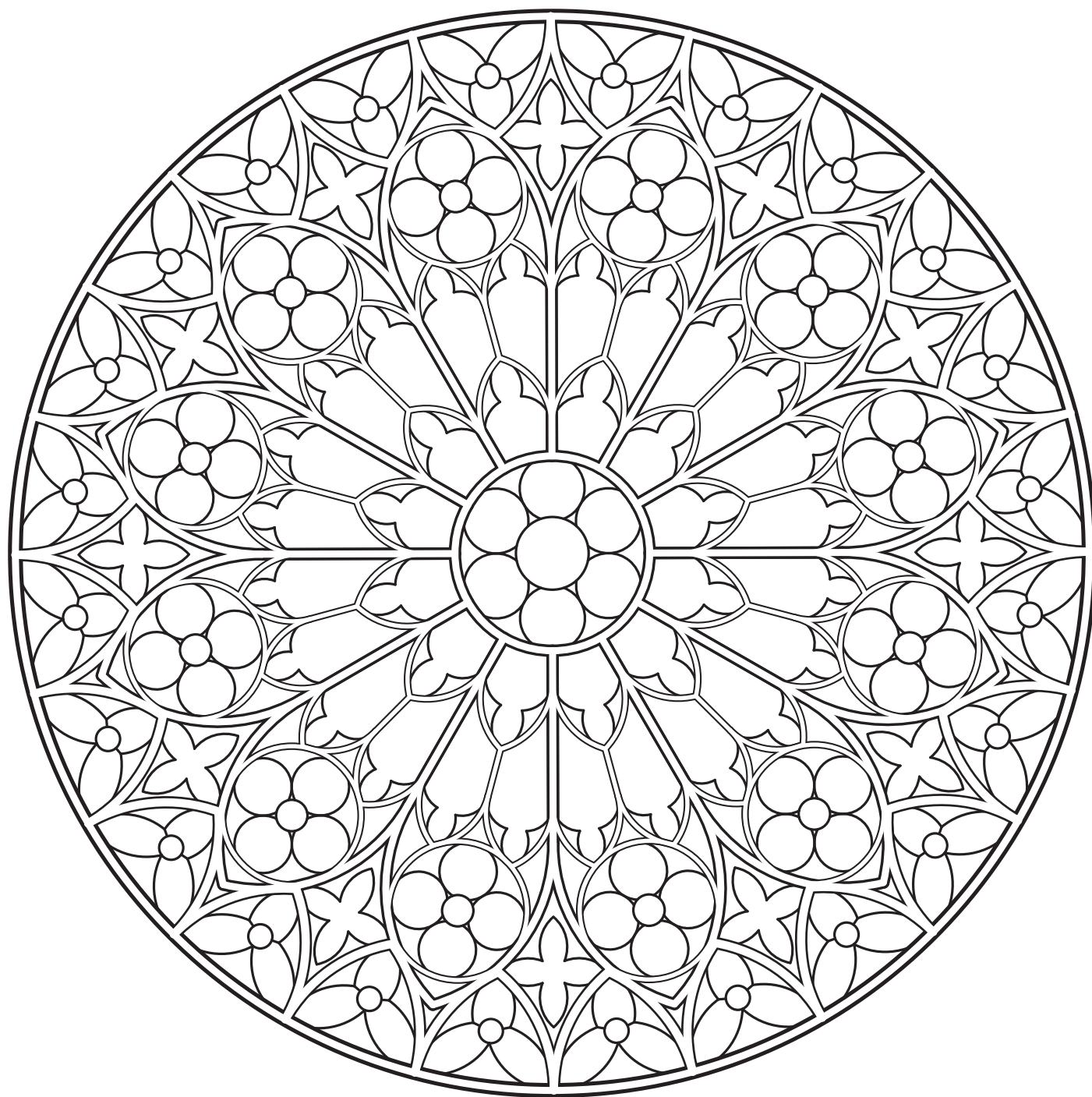
Un missionnaire du moyen âge raconte qu'il avait trouvé le point où le ciel et la Terre se touchent...

^aLa imatge és d'un gravat que apareix en l'obra de Camille Flammarion, *L'atmosphère: météorologie populaire*, [1888]. Extreta de <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k408619m/f168.image.texteImage>
 Per a un estudi del tema vegeu Norwood Russell HANSON [1973], *Constellations and Conjectures*, traduïda a Alianza Editorial com *Constelaciones y conjeturas*, 1978. Ofereix, —com diu a la contraportada d'aquesta última—, una història de l'astronomia fins a Kepler i una filosofia de la ciència astronòmica al fil de la seva evolució, presentada com una interacció de prediccions sense explicacions i d'explicacions sense prediccions.

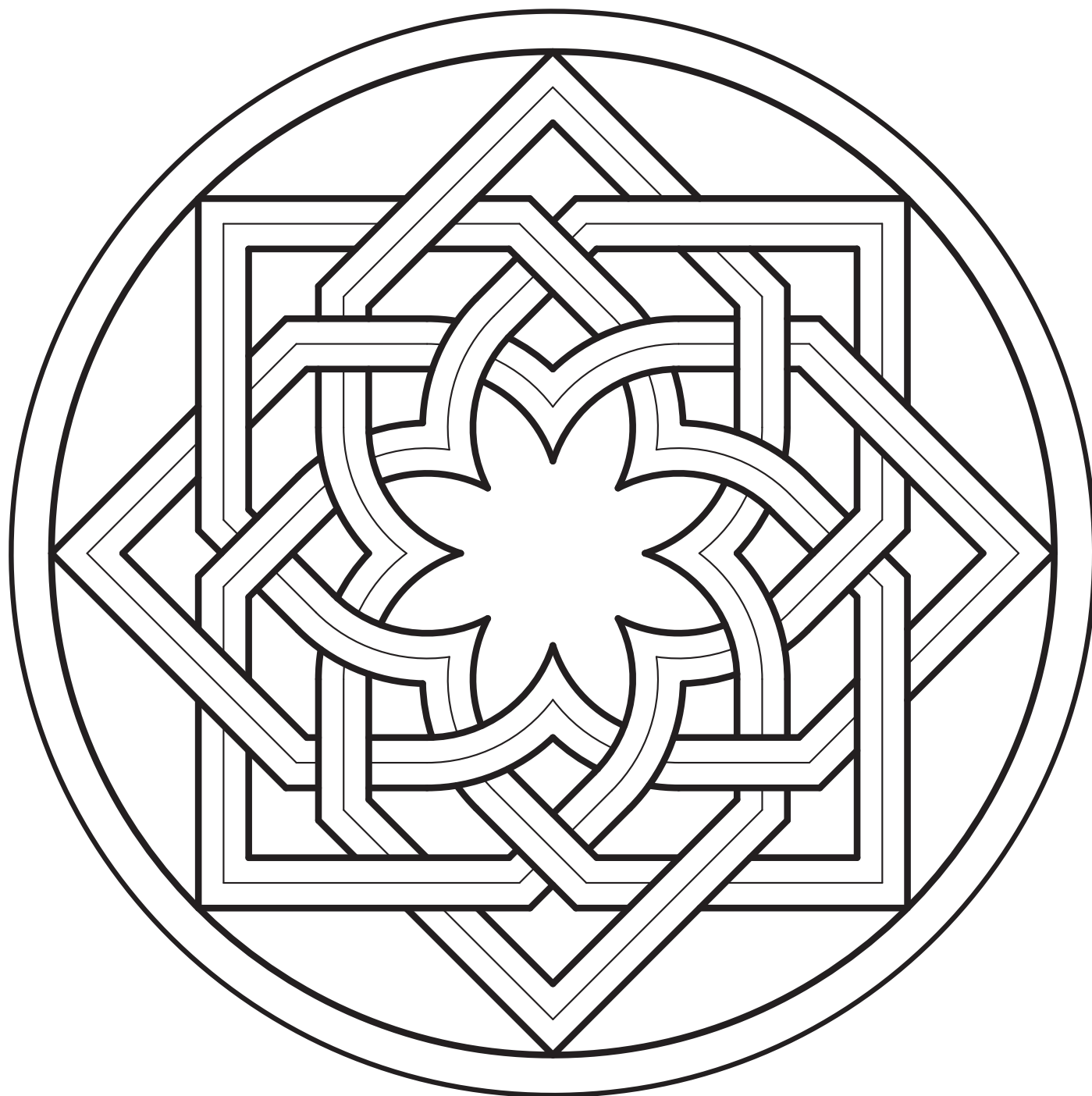
5.10 Models d'arcs decoratius per acolorir



5.11 Model de la rosassa central



5.12 Model de la rosassa del Claustre basada en una estrella tartèssica



Referències

- ADAM, Charles-TANNERY, Paul [1897-1913]. *Oeuvres de Descartes*. 12 volums i un suplement. Lèopold Cerf, Paris. 5, 18, 49, 49
- AUTORS DIVERSOS [1984-1998]. *Catalunya Romànica*. 27 volums. Enciclopèdia Catalana, Barcelona. 8
- AUTORS DIVERSOS [2011]. *Descartes*, Colección grandes pensadores. Gredos, Madrid. 18
- BATLLE, Pedro [1979]. *La Catedral de Tarragona*. Everest, León. 8
- BLAY, Bàrbara [2007]. *Les rosasses del claustre de la Catedral de Tarragona*. <http://www.xtec.cat/~rnolla/TR/BB07/TRBB07.pdf>. 19
- BOYÉ, Anne [1998]. *Apollonius Gallus et le problème des trois cercles comme défense et illustration de la géométrie synthétique*. Tesi sota la direcció de Jean D'hombres. Université de Nantes. t. 1, t. 2. 24, 50
- BOYER., Carl B. [1968]. *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, New York. Traducció espanyola a càrrec de Mariano Martínez, *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, Madrid, 1986. 50
- DESCARTES, René [1637]. *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette méthode*. Leiden. Vegeu ADAM-TANNERY VI i QUINTÁS [1981].
- DESCARTES, René [1643]. *Correspondance. Descartes a Elisabeth*. Vegeu AUTORS DIVERSOS [2011] i ADAM-TANNERY IV.
- EECKE, Paul ver [1933] *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathématique*. Traducció francesa amb introducció i notes. Bruges. [Reedició a Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1982]. 18, 24, 49
- FITZPATRICK, Richard [2010]. *EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY. The Greek text of J.L. Heiberg (1883-1885) from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883-1885 edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick*. University of Texas at Austin, Austin. 25
- FRIED, Michael N. [2010]. *Mathematics as the Science of Patterns - Jacob Steiner and the Power of a Point*. Convergence, MAA. 25
- FUKAGAWA, Hidetoshi i ROTHMAN, Tony [2008]. *Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 18
- GADEA, Syra. [2018]. *La fachada occidental de la Catedral de Tarragona*. <https://viajarconelarte.blogspot.com/2018/12/la-fachada-occidental-de-la-catedral-de.html> Consultada el gener de 2020. 8

- GAULTIER, Louis [1813]. *Memoire sur les Moyens generaux de construire graphiquement un Cercle determine par trois conditions, et une Sphere determine par quatre conditions*. Journal de l'École Polytechnique, seizième cahier, tome IX, pàg. 124-214. 25
- GONZÁLEZ-CAMPOS, Yolanda [2017]. *El objeto en la sociedad: visiones heterodoxas del patrimonio arqueológico y sus posibilidades de musealización*. Universidad de Sevilla. 20, 20
- GONZÁLEZ, Carlos [2014]. *Tartessos. Mito e historia*. CEFYP-UCM, Madrid. 20
- HANSON, Norwood Russell [1973]. *Constellations and Conjectures*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht. Traducció espanyola a càrrec de Carlos Solís, *Constelaciones y conjeturas*. Alianza Editorial, Madrid, 1978. 61
- HARPUR, Patrick [2002]. *The Philosophers' Secret Fire. A History of the Imagination*. Penguin Books, London. Traducció espanyola a càrrec de Fernando Almansa, *El fuego secreto de los filósofos*. Ediciones Atalanta, Girona, 2010. 1
- HEATH, Sir Thomas [1908] *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge. [Reeditat per Dover, New York, 1956]. 25
- IBÀÑEZ, Raúl. [2020]. *Las curvas del espirografo*.
<https://culturacientifica.com/2020/01/29/las-curvas-del-espirografo/>
Consultada el setembre de 2020. 13
- JONES, Alexander [1986]. *Pappus of Alexandria. Book 7 of the Collection*. Springer-Verlag, New York. [Introducció, traducció del llibre 7, comentaris i assaigs sobre treballs grecs perduts de l'autor.] 24
- LIAÑO, Emma [1989]. *La portada principal de la Catedral de tarragona y su programa iconográfico*. Col·legi d'Arquitectes tècnic de Tarragona, Tarragona. 8
- LIAÑO, Emma [2019]. *Tarragona. Catedral de Santa Tecla (arquitectura). El románico*. Enciclopedia online, pàg. 454–489. Fundación Santa María la Real, Aguilar de Campoo.
<http://www.romanicodigital.com/el-romanico/enciclopedia-online>. 8
- MASIP, Ramon S. [2000]. *La Geometria a l'educació secundària. Anàlisi i elaboració de recursos pedagògics*. Llicència d'Estudis concedida pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. 8
- NOLLA, Ramon [2006]. *Estudis i activitats sobre problemes clau de la història de la matemàtica*. SCM-IEC, Barcelona. 25, 46, 49, 50
- PAPPUS D'ALEXANDRIA [III-IV AD], *La Collection Mathématique*. Vegeu ECKE.
- PLA, Josep [2018]. *Història de la matemàtica: Grècia IIa. Els Elements d'Euclides: llibres I, II, III, IV, V i VI*. IEC, Barcelona. 25
- PLA, Josep i VIADER, Pelegrí [1999]. *René Descartes. La Geometria*. IEC-Pòrtic-Eumo, Barcelona. 49

- POLYA, George [1945]. *How solve it*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. (Traducció castellana de l'edició de 1957 a càrrec de Julián Zagazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas*. Trilla, México D.F., 1965, reimpressió 1994). 23
- PUIG ADAM, Pedro [1960]. *La matemática y su enseñanza actual*. Publicaciones de la Revista "Enseñanza Media", Madrid. (Publicat inicialment a la revista *Gaceta Matemática*, 1ª Serie, Tomo VII, núm 5-6, pàg 130-135, 1955). 5
- QUINTÁS, Guillermo [1981]. *René Descartes. Discurso del método, dióptrica, meteoros y geometría*. Ediciones Alfaguara, Madrid. 5, 49, 49
- SIMSON, Otto G. von [1962]. *The Gothic Cathedral*. Bollingen Foundation, New York. (Traducció castellana a càrrec de Fernando Villaverde, *La catedral gótica*. Alianza Editorial, Madrid, 1980). 7
- STEINER, Jacob [1826]. *Einige geometrische Betrachtungen*, (Algunes observacions geomètriques), a *Gesammelte Werke* [1881], pàg. 17-76, Berlin. 25
- SYKES, Mabel [1912]. *A source Book of Problems for Geometry, based upon industrial design and architectural ornament*. Norwood Press, Norwood, Massachusetts. Reeditat per Dayle Seymour Publications, Palo Alto, California, 1994. 7
- TICÓ, Teresa[2004]. *Passeig matemàtic per Catalunya*. Pagès editors, Lleida. 7
- VIÈTE, François [1600]. *Apollonius Gallus*. Paris 1600. [Es pot trobar a l'edició en llatí de Von Schooten [1646], *Francisci Vietae. Opera mathematica*, pàg. 325-346, Leiden. Hi ha reimpressió a Georg Olms Verlag [2013]. Una traducció al francès es pot trobar a BOYÉ [1998], t. 2 pàg 23-65, i un estudi previ de la mateixa autora a t. 1 pàg 22-51. 24