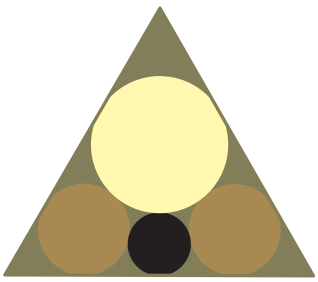
Sangakus. Propostes de treball i referències

Ramon Nolla
INS Pons d'Icart. Tarragona

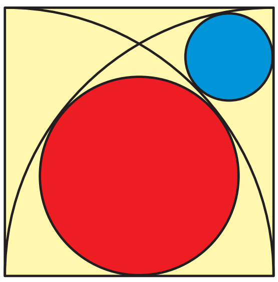
Aquests són problemes d'estudi dels quals també es persegueix elaborar alguna presentació, tractament dinàmic o recurs d'aula amb GEOGEBRA.



TF1. Tenim quatre cercles inscrits en una triangle equilàter de costat a, amb les tangències que es mostren a la figura. Els dos cercles mitjans tenen el mateix radi x. Trobeu la relació entre x i a.

Solució. $x = \frac{1}{11}\left(\frac{8}{\sqrt{3}}+6\right) - \sqrt{\frac{52\sqrt{3}+73}{3}}$ (amb DERIVE) $\approx 0.2951073349\, a$.

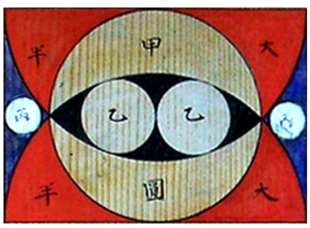
Referència. http://isaniwa.ddo.jp/homotsu/city/sangaku/ /html/sangaku07.htm



TF2. Els arcs de les figures són quarts de cercle amb el centre sobre els dos vèrtexs de la base del quadrat de costat a. Trobeu la relació entre el radi R del cercle gran i a, i la del radi r del cercle petit i a.

Solució. $R = \dfrac{3}{8}\,a,\; r = \dfrac{1}{6}\,a.$

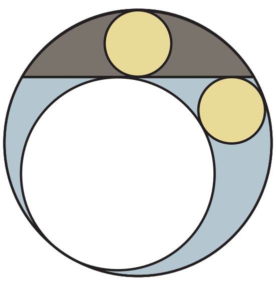
Referència. Fukagawa–Pedoe [1989], 41 i Huvent [2008], 77-80.



TF3. Tenim dos semicercles de diàmetre igual al costat llarg del rectangle i els cercles complets que tenen els seus centres alineats. Tots els contactes dels quatre cercles petits entre si i amb els altres cercles són tangencials. Anomenem a la longitud del costat petit del rectangle. Calculeu la longitud del costat gran, l'àrea de cada lluna i els radis dels dos tipus de cercle més petits.

Solució. $a\sqrt{2},\; \dfrac{a^2}{4},\; \dfrac{a\sqrt{2}}{8},\; \dfrac{a\sqrt{2}}{16}\,.$

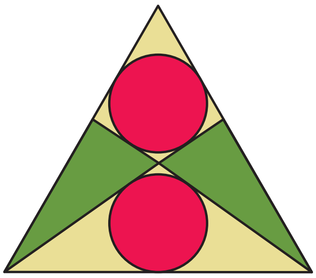
Referència. Santuari Istukushima, (Fukushima). 1885. http://www.wasan.earth.linkclub.com/fukusima/miharuitukusima3.html



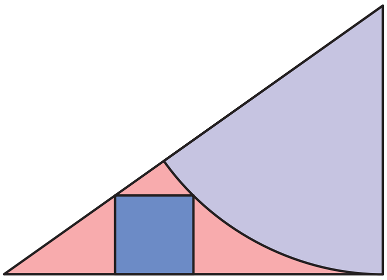
TF4. Els dos cercles petits tenen el mateix radi r. Si anomenem a el radi del cercle circumscrit i R el radi de l'altre cercle inscrit, trobeu r en funció de R i de a.

Solució. $r = 2\sqrt{R}\left(\sqrt{a}-\sqrt{R}\right)\,.$

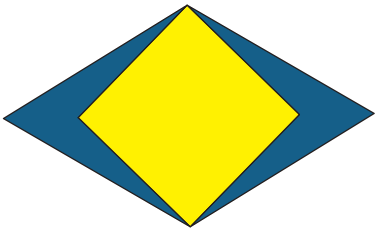
Referència. http://www.sangaku.info/images/ /Sangaku_Nagasaki .



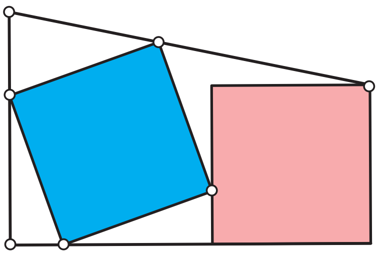
Enunciat TF5. Els cercles inscrits entre el triangle equilàter de costat a i els dos segments tenen el mateix radi r. Trobeu la relació entre r i a.
Solució. $r = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})a}{2}$.
Referència. FUKAGAWA–ROTHMAN [2008], 152.



TF6. En un triangle rectangle de catet horitzontal a fix i catet vertical x variable tracem un sector amb centre el vèrtex superior i radi x, tal com indica la figura. Si inscrivim un quadrat de costat y, —que depèn de x—, entre el sector i el triangle, trobeu el màxim valor de y.
Solució. $y = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\,a$.
Referència. FUKAGAWA–ROTHMAN [2008], 120.

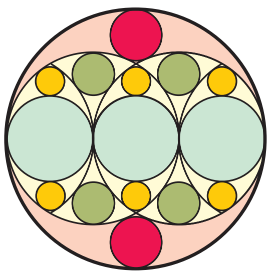


TF7. Considereu el rombe de costat a fixat i diagonal $2t$ variable. Trobeu el valor del costat x del quadrat de diagonal $2t$ que fa màxima la regió fosca.
Solució. $t = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \cdot a, \quad x = \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot a.$
Referència. FUKAGAWA–ROTHMAN [2008], 118.



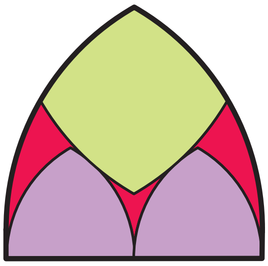
TF8. Els dos quadrats són iguals amb costat de longitud a. El de la dreta està fix i el de l'esquerra es mou amb un vèrtex que llisca sobre un costat de l'altre i l'altre vèrtex sobre la prolongació del costat horitzontal. Construïm el trapezi rectangle de la figura. Trobeu la relació entre el costat del quadrat i el segment inferior x determinat sobre el costat del quadrat, pel punt que llisca verticalment, quan el costat vertical esquerre del trapezi té longitud màxima.
Solució. $a = \Phi \cdot x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,x.$
Referència. FUKAGAWA–ROTHMAN [2008], 119.

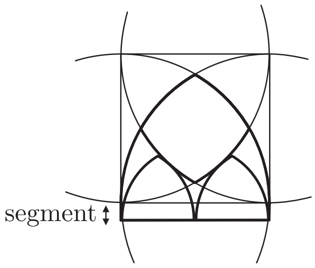
TF9. Problema inspirat en un dels arcs de la façana de l'església d'Orsanmichelle a Florència. Cerqueu els radis de totes les circumferències del disseny en funció del radi a de la més gran.
Solució. $a,\ \dfrac{2a}{3},\ \dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{5},\ \dfrac{a}{6},\ \dfrac{a}{9}.$

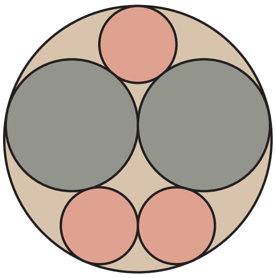


TF10. Problema inspirat en un dels dissenys decoratius - de la façana de la catedral de Santa Maria de Tarragona. Es tracta de cercar la relació entre la seva altura h i la seva amplada a en la base si tots els arcs són ogivals equilàters.

Solució. $h = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.







TF11. Tenim cinc cercles inscrits en una circumferència de radi a, amb les tangències que es mostren a la figura. Els tres més petits tenen el mateix radi r, els dos més grans el mateix radi R. Trobeu la relació entre a i r.

Solució. $a = \left(1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{4\sqrt{2}+5}{7}}\right) \cdot r$.

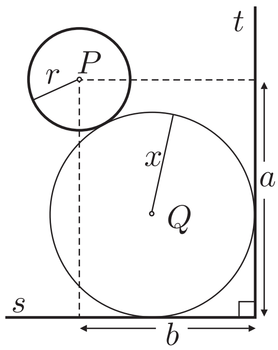
Referència. http://isaniwa.ddo.jp/homotsu/city/sangaku/ /html/sangaku07.htm

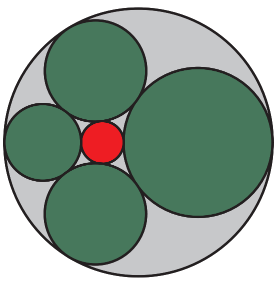
TF12. Adaptació de l'última imatge visible per la dreta. Considereu el cercle (P, r) i les dues rectes perpendiculars de posició fixada i el cercle (Q, x) tangent als tres. Trobeu x en funció de r, a i b.

Solució. $x = a + r + b \pm \sqrt{(a + r + b)^2 - (a^2 + b^2 - r^2)}$.

Referència. http://www.wasan.jp/index.html.

Santuari Izushi, (Hyogo). 1879. 187×60 cm.





TF13. Aquest és un problema inspirat en l'observació d'alguns *sangakus* amb configuracions de cercles tangents. Tenim la configuració de la imatge adjunta en què tres cercles inscrits tenen els centres sobre un diàmetre del cercle circumscrit. Construïu la figura fixant el més gran dels tres cercles citats.

Bibliografia i referències

BOURSIN, Didier et al. [2005]. «Spécial Japon». *Tangente*, núm 107.

FUKAGAWA, H. i PEDOE, D. [1989]. *Japanese Temple Geometry. Problems.* The Charles Babage Research Centre, Winnipeg, Canada.

FUKAGAWA, H. i ROTHMAN, T. [1998]. «Japanese Temple Geometry». *Scientific American*, may 1998. [Traducció francesa: «Géométrie et religion au Japon». *Pour la Science*, núm 249.]

– [2008]. *Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

HORIUCHI, Annick [1989]. «Sur un point de rupture entre les traditions chinoise et japonaise des mathématiques». *Revue d'histoire des sciences*, vol 42, núm 4, 375–390.

– [1994]. *Les mathématiques japonaises a l'époque d'Edo.* Librairie philosophique J. Vrin, Paris.

– [1998]. «Les mathématiques peuvent-elles n'être que pur divertissement ? Une analyse des tablettes votives de mathématiques à l'époque d'Edo». *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, núm 20, 135–156.

– [2005]. «La géométrie à l'usage des Dieux au Japon ?». Dossier: Mathématiques exotiques. *Pour la science. Édition française de Scientific American*, avril/juin 2005, 32–37.

HUVENT, Géry [2008]. *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises.* Dunod, Paris.

ITO, E. et al. [2003]. *Japanese temple mathematical problems in Nagano Pref. Japan.* Kyoikushokan, Nagano.

MARTZLOFF, Jean-Claude [1987]. *Histoire des mathématiques chinoises.* Masson, Paris. [Traducció anglesa a càrrec de Stephen S. Wilson, *A History of Chinese Mathematics.* Springer, Berlin, 1997].

MURATA, Tamotsu [2001]. «Indigenous Japanese Mathematics Wasan». *Journal of Japanese Trade and Industry*, vol. 20, num 2, 50-55.

NOLLA, Ramon [2009]. «Sangakus. Contemplació i raó». [En premsa]

NOLLA, R. i MASIP, R. [2009]. *Sangakus. Recursos de geometria.*
http://www.xtec.cat/∼rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/Sangak_4.pdf

OGAWA, Tsukane [2001]. «A Review of the History of Japanese Mathematics». *Revue d'histoire des mathématiques*, núm 7, 137–155.

PLA, Josep [2009]. *Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china.* NIVOLA libros y ediciones, Madrid.

SMITH, D.E. i MIKAMI, Y. [1914]. *A History of Japanese Mathematics.* Open Court Pub. Co., Chicago. [Reeditat per Dover, New York, 2004]

Presentació de diapositives associada a l'article NOLLA [2009].

– http://www.xtec.net/∼rnolla/Sangaku/Sangakus3b.pdf

Algunes pàgines web d'interès pels seus registres, fotografies, estudis i visualitzacions.

– http://pagesperso-orange.fr/gery.huvent/html/sangaku.htm
– http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml
– http://isaniwa.ddo.jp/homotsu/city/sangaku/sangaku_e.html
– http://www.sangaku.info/
– http://www.wasan.jp/index.html