Polinomis. Càlcul, resolució d'equacions algèbriques i optimització

Ramon Nolla
Institut Pons d'Icart de Tarragona.

Des de l'estudi del mètode *tianyuan* de la matemàtica xinesa (s. XII), de la matemàtica japonesa, *wasan*, (s. XVII-XIX) i de la regla de Ruffini (s. XIX) trobem la inspiració per generar una didàctica que ens permet introduir dues qüestions:

– **La regla de Ruffini** per al càlcul de valors de polinomis i de solucions d'una equació. L'interès d'aquesta proposta rau en què defuig recórrer a la presentació abstracta de l'àlgebra de polinomis, —i més concretament, la divisió de polinomis—, per introduir-la. També veuem que en el càlcul de successives arrels d'un polinomi es pot aplicar sobre els coeficients resultants de la seva aplicació. Al mateix temps, en el curs de la cerca d'arrels, apareixerà com un subproducte la descomposició factorial del polinomi implicat.[1]

– **El polinomi derivat d'una expressió polinòmica** per a la resolució de problemes d'optimització.
En aquest cas es farà sense recórrer al concepte basat en un procés de pas al límit, sinó des de l'observació sobre els coeficients obtinguts de la regla de Ruffini, de les condicions necessàries per a l'existència d'extrems locals del polinomi. Això permetrà establir un procediment per cercar els extrems locals de funcions polinòmiques, racionals i irracionals.

Actuarem sobre exemples concrets, en el benentès que aquests es presentarien a l'aula sota una marxa dialèctica que portés l'alumnat a descobrir allò que perseguim, sense tancar la porta a les aportacions que s'apartin del guió que presentem.

1 Introducció de la regla de Ruffini

1.1 Càlcul dels valors d'un polinomi

Proposem de treballar en un cas concret, el del polinomi $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.
Cercarem el valor d'aquest polinomi per al valor concret $x = 4$. Si tenim en compte que el polinomi $p(x)$ es pot presentar com

$$p(x) = \big((2x+3)x - 11)x - 6\big), \tag{1}$$

podem considerar dues maneres d'actuar:

1) Càlcul directe sobre l'expressió inicial:

$$p(4) = 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 - 11 \cdot 4 - 6 = 128 + 48 - 44 - 6 = 123, \text{ (9 operacions).}$$

2) Càlcul sobre l'expressió (1):

$$p(4) = \Big(\Big(\boxed{2} \cdot 4 + 3\Big) \cdot 4 - 11\Big) \cdot 4 - 6 = \Big(\boxed{11} \cdot 4 - 11\Big) \cdot 4 - 6 = \boxed{33} \cdot 4 - 6 = \boxed{126}, \text{ (6 operacions).}$$

[1] De les intuïcions adquirides durant tot el procés, es podria introduir el concepte de divisió de polinomis, al mateix temps que un algoritme per a la seva execució i els resultats teòrics que se'n desprenen.

En la segona opció els càlculs es disposen de la manera següent i en resulta l'algoritme conegut amb el nom de **regla de Ruffini**:[2]

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 3 & -11 & -6 \\
 & \downarrow & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + \\
4 & & 8 & 44 & 132 \\
\hline
 & \boxed{2} & \boxed{11} & \boxed{33} & \boxed{126} = p(4)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|rrrr}
 & 2 & 3 & -115 & -6 \\
4 & & 8 & 44 & 132 \\
\hline
 & 2 & 11 & 33 & 126
\end{array}
$$

1.2 Regla de Ruffini aplicada al càlcul d'arrels d'un polinomi i a la seva descomposició factorial

Cercarem les arrels del polinomi anterior $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$, és a dir les solucions de l'equació $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0$.

– Es tracta de trobar un nombre $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que l'últim coeficient que s'obté de l'aplicació de la regla sigui igual a 0. Primerament buscarem entre els nombres enters, els quals forçosament hauran de ser divisors del coeficient de grau 0 del polinomi. En el nostre cas, els candidats són els divisors enters de -6. Provem $x_0 = -2$:

$$
\begin{array}{c|rrrr}
 & 2 & 3 & -11 & -6 \\
2 & & 4 & 14 & 6 \\
\hline
 & 2 & 7 & 3 & 0 \; = p(2)
\end{array}
\tag{2}
$$

Hem trobat l'arrel $x = 2$. Si volem trobar una altra arrel, tindríem que provar amb altres divisors de -6 sobre els coeficients del polinomi inicial. Però tenim un alternativa si observem que $x - 2$, (x menys l'arrel trobada), és un factor del polinomi inicial $p(x)$. Ho comprovem: [3]

$$
\begin{aligned}
p(2) = 0 \implies \boxed{p(x)} &= p(x) - p(2) = 2(x^3 - 2^3) + 3(x^2 - 2^2) - 11(x - 2) \\
&= 2(x-2)(x^2 + 2 \cdot x + 2^2) + 3(x-2)(x+2) - 11(x-2) \\
&= (x-2)\big(2(x^2 + 2x + 4) + 3(x+2) - 11\big) = \boxed{(x-2)(2x^2 + 7x + 3)}\,.
\end{aligned}
$$

S'observa que per trobar ua altra arrel només cal resoldre $(x - 2)(2x^2 + 7x + 3) = 0$, és a dir $2x^2 + 7x + 3 = 0$. Els coeficients de'aquesta equació coincideixen amb els coeficients resultants de la primera aplicació de la regla i això passa, no ho demostrem, per a qualsevol polinomi inicial.

[2] Es pot trobar en diversos escrits de l'italià Paolo Ruffini (1765-1822), tot i que la trobem inicialment en la matemàtica xinesa (s. XII).

Vegeu `http://rnollas.wordpress.com/2012/02/04/la-regla-de-ruffini-i-el-metode-tianyuan/`.

Recompte d'operacions per al grau n en què s'observa l'economia d'operacions de l'opció de Ruffini:

1) En el càlcul sobre l'expressió inicial de $p(x)$, el nombre màxim d'operacions és
$$n + n + \big(1 + 2 + \cdots (n-1)\big) = 2n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}\,.$$

2) Quan apliquem la regla de Ruffini el nombre màxim d'operacions és $n + n = 2n$.

[3] Ho farem, amb l'ajut del fet que $x - 2$ és factor de $x^n - 2^n$. Aquí es pot conduir de manera gradual la presentació, mitjançant una recerca des de casos concrets al cas general que estableixi que,

$$x^n - a^n = (x - a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^k x^{n-k-1} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}\right).$$

Llavors, podem seguir amb l'aplicació de la regla sobre els coeficients resultants fins arribar a un polinomi de grau 0. D'aquesta manera el procés complet seria

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & -11 & -6 \\
2 & & 4 & 14 & 6 \\
\hline
 & 2 & 7 & 3 & 0 \\
-3 & & -6 & -3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & 0 & \\
-\frac{1}{2} & & -1 & & \\
\hline
 & 2 & 0 & &
\end{array}
\qquad \Longrightarrow \text{Arrels: } x = 2,\ x = -3,\ x = -\frac{1}{2}
$$

D'altra banda, si atenem al procés de descomposició factorial estudiat més amunt, obtenim:

$$p(x) = (x-2)(2x^2+7x+3) = (x-2)(x+3)(2x+1) \quad \text{o també,} \quad p(x) = 2(x-2)(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

2 El polinomi derivat. Optimització

Quan cerquem arrels observem que en l'entorn d'algunes d'elles el valor del polinomi no canvia de signe. Per exemple, l'equació $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ té una arrel en $x = 2$ i en el seu entorn observem que no canvia el signe. Efectivament,

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
2 & & 2 & -2 & -4 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
1.9 & & 1.9 & -2.09 & -3.971 \\
\hline
 & 1 & -1.1 & -2.09 & 0.029
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
2.1 & & 2.1 & -1.89 & -3.969 \\
\hline
 & 1 & -0.9 & -1.89 & 0.031
\end{array}
$$

La interpretació és que ens trobem davant d'un valor màxim o mínim local del polinomi. En aquests casos si cerquem més arrels del polinomi veurem que el seu nombre ha disminuït. Comprovem-ho en el nostre exemple, en què les solucions que queden sortiran de l'equació que resulta de l'última fila de la configuració de Ruffini. Observem que en lloc de trobar tres arrels només n'hi ha dues i l'arrel $x = 2$, on tenim un mínim local, ha sortit dues vegades.[4]

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
2 & & 2 & -2 & -4 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & 0 \\
2 & & 2 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

És el que anomenem una *solució* o *arrel doble*. Aquesta situació es dóna sempre que hi ha un extrem local en una arrel d'un polinomi de qualsevol grau. Ara analitzarem més a fons els càlculs que ens han portat a trobar per segona vegada l'arrel $x = 2$, a partir dels coeficients inicials $1,\ -3,\ 0,\ 4$. És a dir, com s'ha generat el 0 emmarcat, a partir d'aquests coeficients. Ho farem en general, per a un polinomi qualsevol de grau 3 i obtindrem una condició necessària d'arrel doble:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\
x_0 & & ax_0 & (ax_0+b)x_0 & \big((ax_0+b)x_0+c\big)x_0 \\
\hline
 & a & ax_0+b & (ax_0+b)x_0+c & \big((ax_0+b)x_0+c\big)x_0+d=0 \\
x_0 & & ax_0 & (2ax_0+b)x_0 & \\
\hline
 & a & 2ax_0+b & \boxed{\begin{array}{l}(3ax_0+b)x_0+c \\ \quad = 3ax_0^2+bx_0+c=0\end{array}} &
\end{array}
\tag{3}
$$

[4]A part del tempteig numèric que hem fet a la pàgina anterior amb l'ajut de la regla de Ruffini, és de fàcil comprovació establir l'existència de mínim local a partir de la descomposició factorial que resulta dels càlculs adjunts. Efectivament, per a punts pròxims a $x = 2$ tenim,

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 2 \Longrightarrow (x-2)^2(x+1) > 0 \\ x > 2 \Longrightarrow (x-2)^2(x+1) > 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{trobem un mínim local en } x = 2.$$

Si observem l'expressió emmarcada trobem que, si hi ha solució doble, llavors necessàriament s'anul·la el polinomi $3ax^2 + bx + c$ en x_0. A la matemàtica *wasan* es diu que s'anul·la el *rang quadrat*, nosaltres diem que s'anul·la el *polinomi derivat* $3ax^2 + 2bx + c$, de $ax^3 + bx^2 + cx + d$, en x_0.

El mateix es podria comprovar per a polinomis de grau 2 i de grau superior al 3. Per exemple, per al polinomi $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ obtindríem l'anul·lació del polinomi derivat $4ax^3+3bx^2+2cx+d$ en x_0.

Exemples de polinomis derivats

Polinomi	Polinomi derivat
$3x^2 - 8$	$6x$
$2x^3 - 4x^2 + 3x - 10$	$6x^2 - 8x + 3$
$x^4 - 6x^2 + 9$	$4x^3 - 12x$
$x^7 - 2x^4 + 5x - 8$	$7x^6 - 8x^3 + 5$

Primera conclusió

- Condició necessària per a l'existència d'extrem local d'un polinomi en una arrel x_0 és que aquesta sigui doble i, per tant, que s'anul·li el seu polinomi derivat.
- Per obtenir el polinomi derivat de $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ només cal transformar cada monomi $a_k x^k$ en $k a_k x^{k-1}$ i prescindir de a_0.

Recerca general d'extrems locals

Pretenem trobar tots els extrems locals d'un polinomi, tant si es troben en una arrel com si no s'hi troben. Seguim treballant amb polinomis $p(x)$ de grau 3.

Suposem que $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ presenta un extrem local en x_0 i el seu valor és $p(x_0) = k \in \mathbb{R}$. Llavors el polinomi $q(x) = p(x) - k$ mantindrà un extrem local en x_0 i tindrà una arrel doble en x_0. Per tant, tindrem la situació següent, similar a la de (3),

$$\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d-k \\
x_0 & & ax_0 & (ax_0+b)x_0 & \big((ax_0+b)x_0+c\big)x_0 \\ \hline
 & a & ax_0+b & (ax_0+b)x_0+c & \big((ax_0+b)x_0+c\big)x_0+d-k=0 \\
x_0 & & ax_0 & (2ax_0+b)x_0 & \\ \cline{1-4}
 & a & 2ax_0+b & \boxed{\begin{array}{l}(3ax_0+2b)x_0+c \\ \quad = 3ax_0^2+2bx_0+c=0\end{array}} &
\end{array} \tag{4}$$

Segona conclusió

- Condició necessària per a l'existència d'extrem local d'un polinomi en una punt x_0, és que el seu polinomi derivat s'anul·li en x_0.

En el cas d'un polinomi de grau 3, els extrems estaran entre les solucions de $3ax^2 + 2bx + c = 0$. Llavors el valor extrem (màxim o mínim) del polinomi serà $k = p(x_0)$. Donarem una demostració d'aquesta condició en l'annex final.[5]

[5] Cal remarcar que en cap moment hem afirmat que la condició sigui suficient.

3 Dos problemes d'optimització

Finalment, es presenten dos problemes d'optimització, el primer per a alumnes de 4t d'ESO i el segon per a alumnes de Batxillerat.

Problema 1

Takebe Katahiro en el *Tetsujutsu sankei* (1722) planteja el problema següent:

> Sigui un paral·lelepípede en què la diferència entre la llargada i l'amplada és de 7 *shaku* i la suma de l'amplada i l'alçada és de 8 *shaku*.[6] Es vol que el volum sigui el més gran possible. Es demana la llargada, l'amplada, l'altura i el volum màxim.

Es tracta de calcular el valor k màxim del polinomi

$$V(x) = x(x+7)(8-x) = -x^3 + x^2 + 56x, \text{ en què } x \text{ és l'amplada.}$$

Els punts candidats sortiran del càlcul de l'arrel doble del polinomi $V(x)-k$, és a dir de l'equació,

$$-x^3 + x^2 + 56x = k, \text{ en què } k \text{ serà el volum màxim.}$$

Dit d'una altra manera, els punts candidats sortiran de l'anul·lació del polinomi derivat de $V(x)$. Llavors, la substitució en $V(x)$ del punt adequat, proporcionarà el valor k del volum màxim. Consegüentment, això ens porta a trobar x i k que satisfan les condicions,

$$\begin{cases} -x^3 + x^2 + 56x = k \\ -3x^2 + 2x + 56 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Resolem l'equació de segon grau, i obtenim,

$$-3x^2 + 2x + 56 = 0 \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+168}}{-3} = \frac{-1 \pm 13}{-3} = \begin{cases} \nearrow -4 \\ \searrow \boxed{14/3 \approx 4.67} \end{cases}$$

$$\implies k = \frac{14}{3} \cdot \frac{35}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{4900}{27} \approx 181.48$$

Amb un esquema gràfic del polinomi $V(x)$ es comprova que aquest valor és màxim. Per a una demostració analítica es compararia el valor de $V\left(\frac{35}{3}\right)$ amb el de $V\left(\frac{35}{3} + h\right)$.

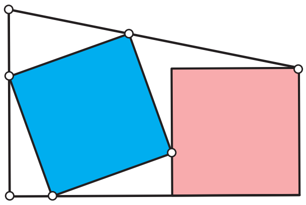
Conclusió.

El volum màxim és de $\frac{4900}{27} \approx 181.48$ unitats cúbiques i s'assoleix amb l'amplada igual a $\frac{14}{3} \approx 4.67$ unitats.

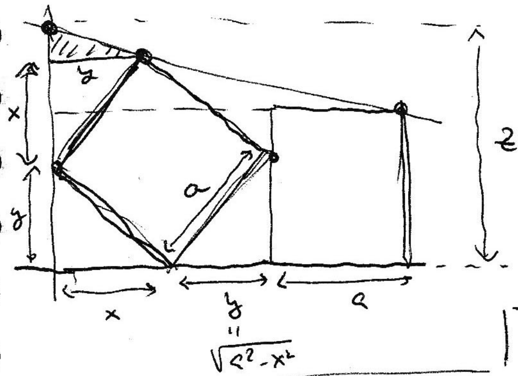
[6]El *shaku* equival a 30.3 cm.

Problema 2. (Esborrany)

Recollit en un llibre de Fukuda Riken el 1873, d'una tauleta del 1846 a Osaka.[7]



Enunciat. Els dos quadrats són iguals amb costat de longitud a. El de la dreta està fix i el de l'esquerra es mou amb un vèrtex que llisca sobre un costat de l'altre i l'altre vèrtex sobre la prolongació del costat horitzontal. Construïm el trapezi rectangle de la figura. Trobeu la relació entre el costat del quadrat i el segment inferior x determinat sobre el costat del quadrat, pel punt que llisca verticalment, quan el costat vertical esquerre del trapezi té longitud màxima.



$\boxed{x \text{ tal que } z(x) \text{ màxim?}}$

Semblança:

$$\frac{z-y-x}{y} = \frac{z-a}{x+y+a}$$

$$\longrightarrow \ldots \quad z = a + \frac{2xy}{a+x}$$

$$\rightarrow \quad z = a + \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a+x} \Rightarrow \left(\frac{z-a}{2}\right)^2 = \frac{(a^2-x^2)x^2}{(a+x)^2} = \frac{(a-x)x^2}{a+x}$$

$$\left[\lambda = \left(\frac{z-a}{2}\right)^2 \text{ màxim} \Rightarrow z \text{ màxim}\right]$$

Estudiem $\lambda = \frac{(a-x)x^2}{a+x} \Longleftrightarrow \lambda a + \lambda x = ax^2 - x^3$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x^3 - ax^2 + \lambda x + \lambda a = 0}$$

Rang quadrat $= 0 \Rightarrow \boxed{3x^2 - 2ax + \lambda = 0}$

Sistema: $\left\{\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + \lambda x + \lambda a = 0 \\ 3x^2 - 2ax + \lambda = 0 \end{array}\right.$

$$x^3 - ax^2 + (2ax - 3x^2)x + (2ax - 3x^2)a = 0$$

$$\cancel{x^3} - \cancel{ax^2} + \cancel{2ax^2} - \cancel{3x^3} + 2a^2x - \cancel{3ax^2} = 0$$

$$-2x^3 - 2ax^2 + 2a^2x = 0$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \longrightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} x}$$

Seria d'interès fer-ho a la manera japonesa

$\left\{\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + \lambda x + a = 0 \\ 3x^2 - 2ax + \lambda = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \Big\}$ Sistema de 3 equacions de 2n grau d'un paràmetre indeterminat

[7] Fukagawa–Rothman [2008], *Sacred Mathematics.* Princeton University Press, New Jersey. 119

Annex. Condició necessària d'extrem local

Es tracta d'establir la condició necessària d'extrem local que hem conjecturat en la segona conclusió, després de l'equació (4) de la pàgina 4. Concretament,

$$\boxed{\text{Un polinomi } p(x) \text{ té un extrem local en } x_0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \text{el polinomi derivat s'anul·la en } x_0.}$$

Ens centrarem en els polinomis $p(x)$ de grau 3. Per als altres graus s'actuaria igual, però es requeriria una mica més de feina. Cal comparar els valors de $p(x_0)$ i $p(x_0+h)$, per a h suficientment petit. Imposarem que tinguin el mateix signe, la qual cosa significa que en x_0, hi ha un extrem local. Veurem que forçosament es compleix la condició anterior i cercarem la condició que podem d'afegir per trobar una condició suficient.

$$\begin{aligned} p(x_0+h) &= a(x_0+h)^3 + b(x_0+h)^2 + c(x_0+h) + d \\ &= ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d + (3ax_0^2 + 2bx_0 + c+)h + (3ax_0+b)h^2 + ah^3 \\ &= p(x_0) + (3ax_0^2 + 2bx_0 + c)h + (3ax_0+b)h^2 + ah^3. \end{aligned}$$

Llavors,

$$p(x_0+h) - p(x_0) = (\underbrace{3ax_0^2 + 2bx_0 + c}_{(1)})h + (\underbrace{3ax_0 + b}_{(2)})h^2 + ah^3.$$

L'existència d'extrem local en x_0 implica necessàriament que $p(x_0+h)-p(x_0)$ no canviï de signe per a valors suficientment petits de h en valor absolut. Això implica que $3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0$, perquè si no fos així el seu producte per h faria canviar el signe de $p(x_0+h) - p(x_0)$.

Ara bé aquesta condició no és suficient per garantir l'existència d'extrem local, perquè si (1) i (2) són iguals a zero llavors el producte ah^3 també faria canviar el signe de $p(x_0+h) - p(x_0)$. La manera de garantir la conservació del signe és que (1) sigui igual a zero i (2) sigui diferent de zero.

Conclusió

- En els polinomis $p(x) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$ de grau 3, és condició suficient d'existència d'extrem local que $3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0$ i $3ax_0 + b \neq 0$.

- En general es pot observar, per a qualsevol grau, que si a partir del polinomi $p(x)$ calculem $p(x_0+h) = q(h)$ se satisfà:

  - El valor del polinomi derivat de $p(x)$ en x_0 és el coeficient de primer grau de $q(h)$ i la seva anul·lació proporciona una condició necessària d'extrem local.
  - El valor del coeficient de grau 2 de $q(h)$ coincideix, (no ho havíem esmentat fins ara), amb la meitat del polinomi derivat del polinomi derivat de $p(x)$. Llavors una condició suficient d'existència d'extrem local en x_0 és que aquest polinomi no s'anul·li i que s'anul·li el polinomi derivat de $p(x)$.

Índex