Sangakus. Recursos de geometria

Ramon Nolla
Ramon Masip

NOLLA MASIP
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart – 2009
Seminari de Coordinació de l'Àrea de Matemàtiques

Introducció

Presentem en aquestes pàgines el desenvolupament de part d'un dels projectes elaborats en el Seminari de Coordinació a l'àrea de Matemàtiques entre centres d'Eduació Primària i Secundària a la ciutat de Tarragona. En aquest Seminari es pretén proporcionar elements de coordinació a partir de la forma de treballar dels diferents grups de professors amb els respectius alumnes. Això, l'any 2009, s'ha concretat en la creació i presentació de recursos de geometria per a l'ensenyament primari i secundari. En el nostre projecte la llavor generadora ha sigut la matemàtica tradicional japonesa, —*wasan*—, que es desenvolupa entre els segles XVII i XIX. Concretament, l'estudi d'alguns problemes presentats en les tauletes de fusta matemàtiques, —*sangakus*—, que es penjaven als temples japonesos, amb les eines de la geometria euclidiana i l'àlgebra. Una de les parts del projecte inicial, que no s'ha pogut dur a terme, contemplava fer l'estudi del marc històric per al qual ens limitem a deixar la bibliografia que hem utilitzat i començat a estudiar.[1]

Els recursos que s'han creat per als alumnes consisteixen en tres activitats amb diferents apartats. Tenen com a punt de partida el plantejament de problemes extrets entre els *sangakus* consultats.[2]. La primera d'aquestes activitats ha sigut experimentada a l'aula amb alumnes de 3r d'ESO, la qual cosa ha permès la modificació de la seva estructura de cara a treure'n més rendiment. També, una part de l'última activitat està sent experimentada aquest dies amb alumnes de 1r d'ESO amb variacions respecte la proposta que es fa aquí.

La tria final ha sigut de dos problemes d'entre els més senzills dels sangakus que hem consultat en el capítol 4 de Fukagawa–Rothman [2008],[3] els quals són susceptibles de diversitat de tractaments en el seu estudi. Aquesta diversitat propicia que puguin utilitzar-se en les activitats amb alumnes en diferents etapes de desenvolupament de pensament i coneixement. Si agafem com referència el model de Van Hiele,[4] amb els problemes dels *sangakus* es poden crear recursos i presentacions per a l'alumnat que es trobi majoritàriament implicat en els tres primers nivells d'aquest model:

– Visualització o reconeixement (nivell 0).
– Anàlisi (nivell 1).
– Ordenació o classificació (nivell 2).[5]

Per a cada activitat s'ha inclòs una proposta de resolució que implica majoritàriament els nivells 0 i 1. En alguns casos, pocs, es poden trobar aspectes relacionats amb els nivells 2 i 3, els quals s'haurien de treballar amb alumnes experimentats sota la guia del professor.

[1] Vegeu Fukagawa–Rothman [1998] i [2008], Horiuchi [1994] i Smith–Mikami [1914].

[2] La cerca de *sangakus* l'hem fet a Fouz [2007], Fukagawa–Pedoe [1989], Fukagawa–Rothman [2008], Huvent [2008] i Ito [2003].

[3] Agafem els enunciats tal com allí es presenten. Aquests no recullen tota la informació de les figures implicades sinó que fan referència a la imatge que presenten.

[4] Vegeu Fouz–Donosti [2005].

[5] Amb alumnes molt experimentats ens podríem implicar en la introducció en el nivell 3 de deducció formal.

A l'última part del treball, es presenten algunes eines complementàries, —inspirades en fonts històriques, en pràctiques d'aula o en idees discutides amb altres companys—, per al professorat interessat en alguns dels conceptes o idees tractats en les activitats per als alumnes i que poden servir per contextualitzar, ordenar o ampliar algunes de les qüestions tractades a les activitats.

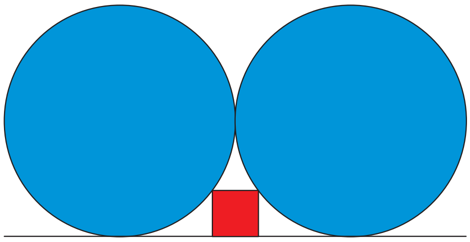
Finalment, volem agrair a tots els companys i companyes dels grups que integren el Seminari les idees exposades, les aportacions fetes i els treballs que han desenvolupat durant aquest curs, els quals han inspirat algunes de les qüestions que presentem.

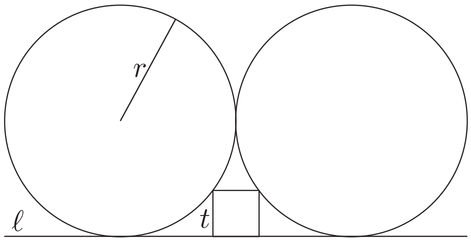
RAMON NOLLA i RAMON MASIP
Tarragona, maig de 2009.

Activitats

Activitat 1

Dos cercles de radi r són tangents a la línia ℓ. Tal com es mostra a la figura, un quadrat de costat t toca ambdós cercles. Es planteja de trobar t en funció de r i de fer una construcció de les figures.





Descripció: Sangaku localitzat en el Santuari Katayamahiko de Murahisagun Okayama city, 1873.

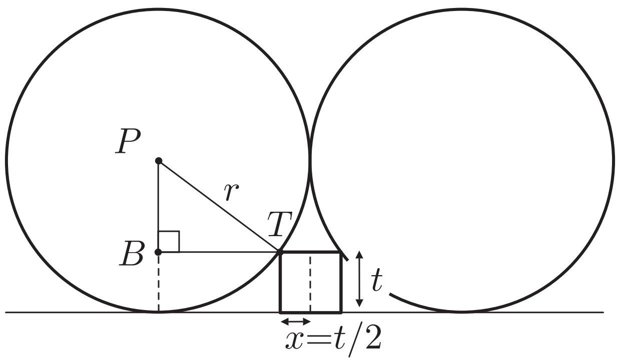
1. Anàlisi algèbrica. Recerca d'una equació que relacioni r i $x = t/2$, a partir de l'observació de les línies auxiliars traçades en la figura adjunta.

a) Expresseu en funció de r i d'x els segments següents:

$PT =$

$PB =$

$BT =$



b) Presenteu l'equació que resulta de l'aplicació del teorema de Pitàgores sobre el triangle $\triangle PBT$ i lliga x amb r.

- Equació:

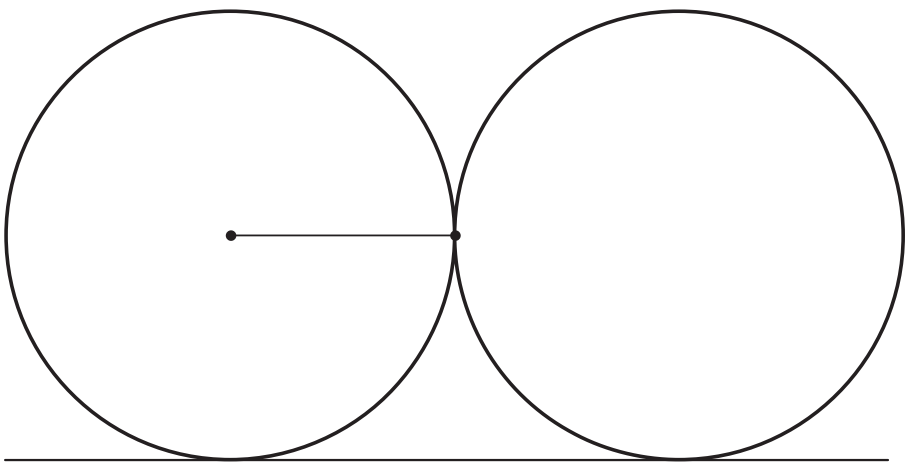
2. Simplificació i resolució de l'equació.

a) Simplifiqueu l'equació amb l'ajut de la identitat que presenta el desenvolupament del quadrat d'un binomi.

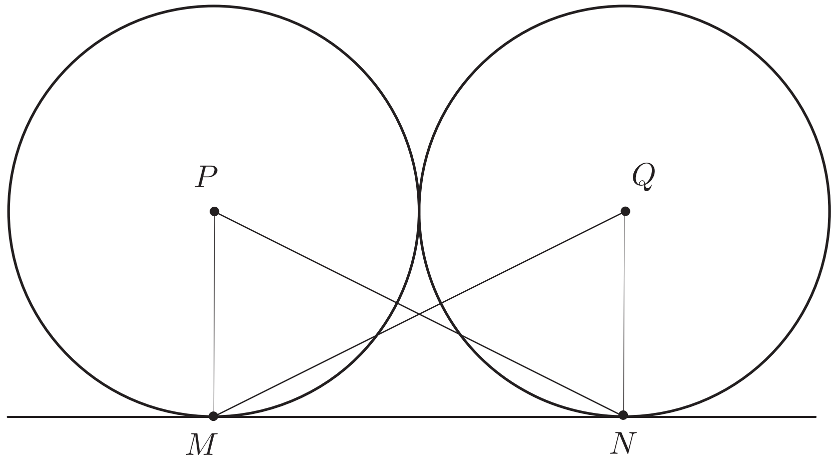
b) Trobeu x i t en funció de r.

3. Construcció de la figura amb regle i compàs

a) **Construcció 1:** Amb l'ajut del teorema de Tales, el qual proporciona un mètode per a la divisió d'un segment en parts iguals, construïu el quadrat dividint el radi tal com indica la solució algèbrica. (No esborreu les línies auxiliars.)



b) **Construcció 2:** Estudieu i raoneu, amb l'ajut del concepte de semblança de triangles i del resultat de l'apartat **2.**b, si el traçat de les línies NP i MQ, en la figura adjunta, proporciona un mètode alternatiu de la construcció del quadrat. (En cas afirmatiu construïu-lo, no esborreu les línies auxiliars.)



- Presentació de l'estudi i del raonament.

c) Construïu totes les figures del problema en format apaïsat, esborreu les línies auxiliars i acoloriu el resultat al vostre gust.

4. Propietats i conceptes utilitzats. On s'exposaran els elements algèbrics i geomètrics implicats en l'activitat.

a) **Teorema de Pitàgores**

– Enunciat en llenguatge geomètric i amb l'ajut de figures:

– Enunciat en llenguatge algèbric:

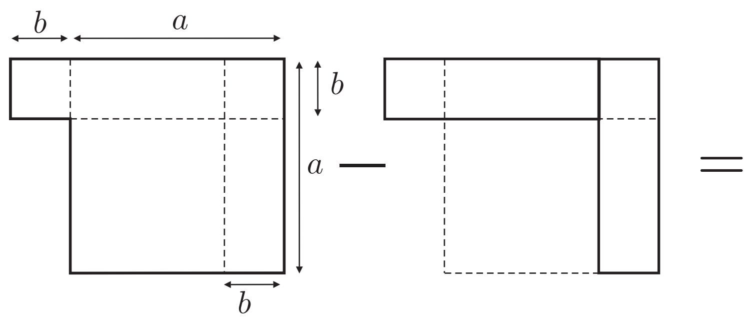
b) **Quadrat d'una diferència**

– Escriviu la identitat que proporciona el desenvolupament del quadrat d'una diferència.

$(a-b)^2 =$

– Justificació geomètrica del desenvolupament del quadrat d'una diferència.

• Dibuixeu el resultat de retallar, en el gràfic de l'esquerra, el gràfic de la dreta.



• Passeu a llenguatge d'àrees de figures, en funció d'a i de b, l'operació de retallar que heu fet. Obtindreu la identitat de l'apartat anterior.

Identitat:

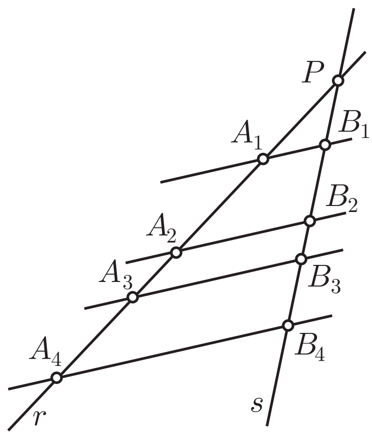
– Justifiqueu la identitat amb l'ús exclusiu del llenguatge algèbric.

c) **Resolució de l'equació de segon grau**

Fórmula amb radicals:

d) **Teorema de Tales**

– Si tallem dues línies r i s per una col·lecció de línies paral·leles, digueu quina és la relació que hi ha entre els segments determinats per aquestes sobre r i s.



– Doneu exemples del significat de la vostra resposta, observant la figura i completant les igualtats.

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \qquad ; \quad \frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \qquad ; \quad \frac{A_1A_3}{A_3A_4} =$$

e) **Semblança de triangles**

– Definició:

– Presenteu dos criteris de semblança de triangles.

Full del professor per a l'activitat 1

1. Alumnes a qui va dirigida l'activitat

Alumnat de 3r i 4t d'ESO, que s'inicia en la resolució de problemes susceptibles de tractament algèbric de segon grau.

2. Qüestions curriculars implicades

a) Teorema de Pitàgores.
b) Quadrat d'una diferència: Identitat que proporciona el seu desenvolupament.
c) Equació de segon grau.
d) Teorema de Tales i semblança de triangles.
e) Traçat d'una recta perpendicular a un segment.
f) Traçat de la mediatriu d'un segment.
g) Traçat d'una recta paral·lela a una recta donada, des d'un punt exterior.
h) Concepte d'anàlisi.

3. Activitats complementàries a plantejar segons el context.

a) Sobre el teorema de Pitàgores.
   - Presentació o proposicions guiades d'algunes demostracions.
   - Recerca de terns pitagòrics.
b) Sobre el quadrat d'una diferència.
   - Revisió de les tres identitats notables.
   - Fer-ne demostracions algèbriques.
   - Presentar els diagrames dels *Elements* II.4 a II.7 i extreure'n les identitats.
c) Sobre l'equació de segon grau.
   - Resolució, mitjançant la compleció de quadrats, d'equacions de segon grau.
   - Obtenció, via el mètode anterior, de la fórmula de resolució amb radicals i aplicació.
d) Sobre el teorema de Tales i al semblança de triangles i polígons
   - Presentació o proposició guiada d'una adaptació de la demostració dels *Elements* VI.2, en què suposem coneguda la fórmula de l'àrea d'un triangle.
   - Estudi de criteris equivalents que caracteritzin triangles semblants.
   - Plantejament d'algun exercici o problema d'aplicació.
e) Sobre el traçat d'una recta perpendicular a un segment.
   - Construcció des d'un punt exterior.
   - Construcció des de l'interior o des de l'extrem del segment.
f) Sobre el traçat de la mediatriu d'un segment.
   - Establir dues definicions equivalents.
g) Sobre el traçat d'una recta paral·lela a una recta donada, des d'un punt exterior.
   - Algunes construccions.
h) Sobre el concepte d'anàlisi.
   - Presentació o recerca guiada sobre el significat de:
     i) Anàlisi.
     ii) Anàlisi geomètrica.
     iii) Anàlisi algèbrica d'un problema geomètric.

Activitat 1 *Proposta de resolució*

Dos cercles de radi r són tangents a la línia ℓ. Tal com es mostra a la figura, un quadrat de costat t toca ambdós cercles. Es planteja de trobar t en funció de r i de fer una construcció de les figures.

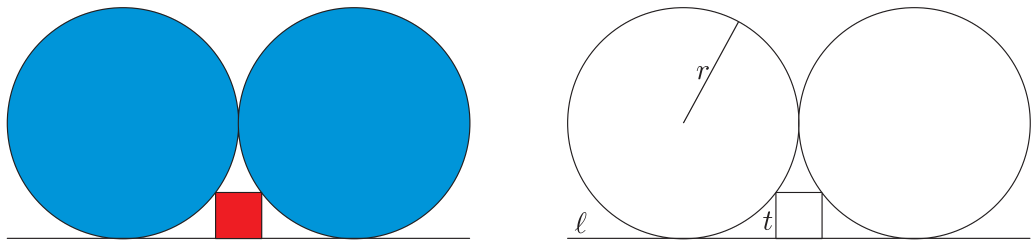


Figura 1

Descripció: Sangaku localitzat en el Santuari Katayamahiko de Murahisagun Okayama city, 1873.

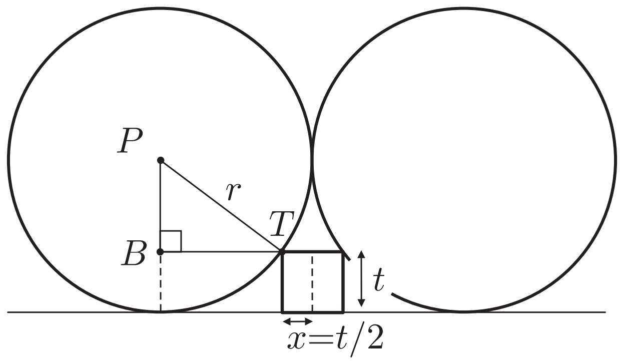
1. Anàlisi algèbrica. Recerca d'una equació que relacioni r i $x = t/2$, a partir de l'observació de les línies auxiliars traçades en la figura adjunta.

a) Expresseu en funció de r i d'x els segments següents:

$PT = r$

$PB = r - 2x$

$BT = r - x$



b) Presenteu l'equació que resulta de l'aplicació del teorema de Pitàgores sobre el triangle $\triangle PBT$ i lliga x amb r.

- Equació: $(r - 2x)^2 + (r - x)^2 = r^2$.

2. Simplificació i resolució de l'equació.

a) Simplifiqueu l'equació amb l'ajut de la identitat que presenta el desenvolupament del quadrat d'un binomi.

$$(r-2x)^2+(r-x)^2=r^2 \iff r^2-4rx+4x^2+r^2-2rx+x^2=r^2$$
$$\iff 2r^2-6rx+5x^2=r^2 \iff \boxed{5x^2-6r\,x+r^2=0}.$$

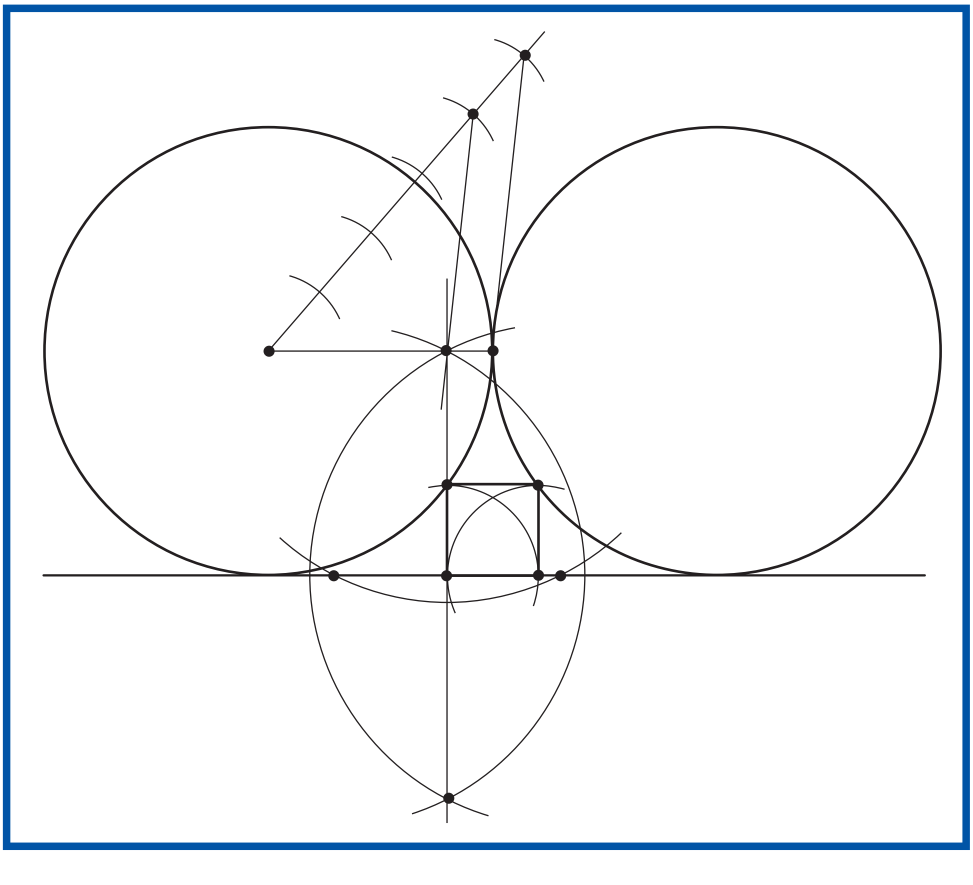
b) Trobeu x i t en funció de r.

$$x=\frac{6r\pm\sqrt{36r^2-20r^2}}{10}=\frac{6r\pm\sqrt{16r^2}}{10}=\frac{6r\pm 4r}{10}= \begin{cases}\dfrac{10r}{10}=r\\[2mm] \dfrac{2r}{10}=\dfrac{r}{5}\end{cases}$$

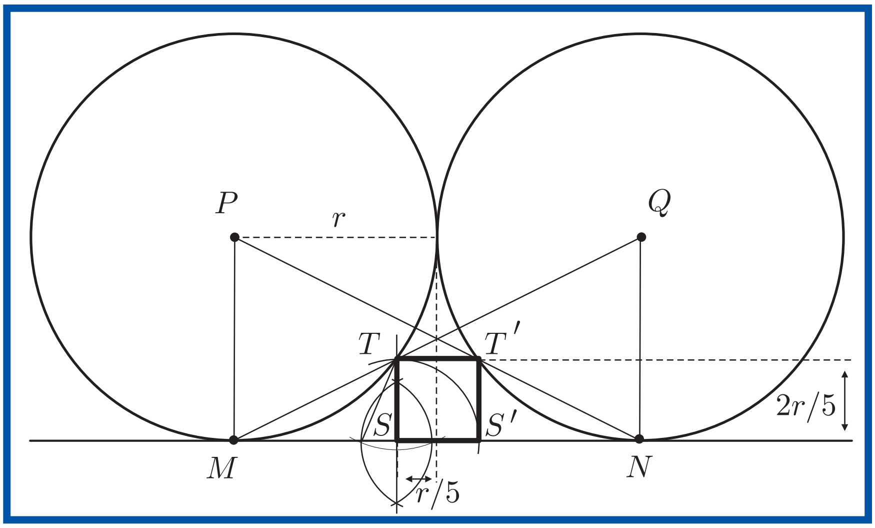
$$\boxed{x=\frac{r}{5}\Longrightarrow t=2x=\frac{2r}{5}}.\ \text{(Observeu que } x=r \text{ no funciona)}$$

3. Construcció de la figura amb regle i compàs

a) **Construcció 1:** Amb l'ajut del teorema de Tales, el qual proporciona un mètode per a la divisió d'un segment en parts iguals, construïu el quadrat dividint el radi tal com indica la solució algèbrica. (No esborreu les línies auxiliars.)



b) **Construcció 2:** Estudieu i raoneu, amb l'ajut del concepte de semblança de triangles i del resultat de l'apartat **2.**b, si el traçat de les línies NP i MQ, en la figura adjunta, proporciona un mètode alternatiu de la construcció del quadrat. (En cas afirmatiu construïu-lo i no esborreu les línies auxiliars.)



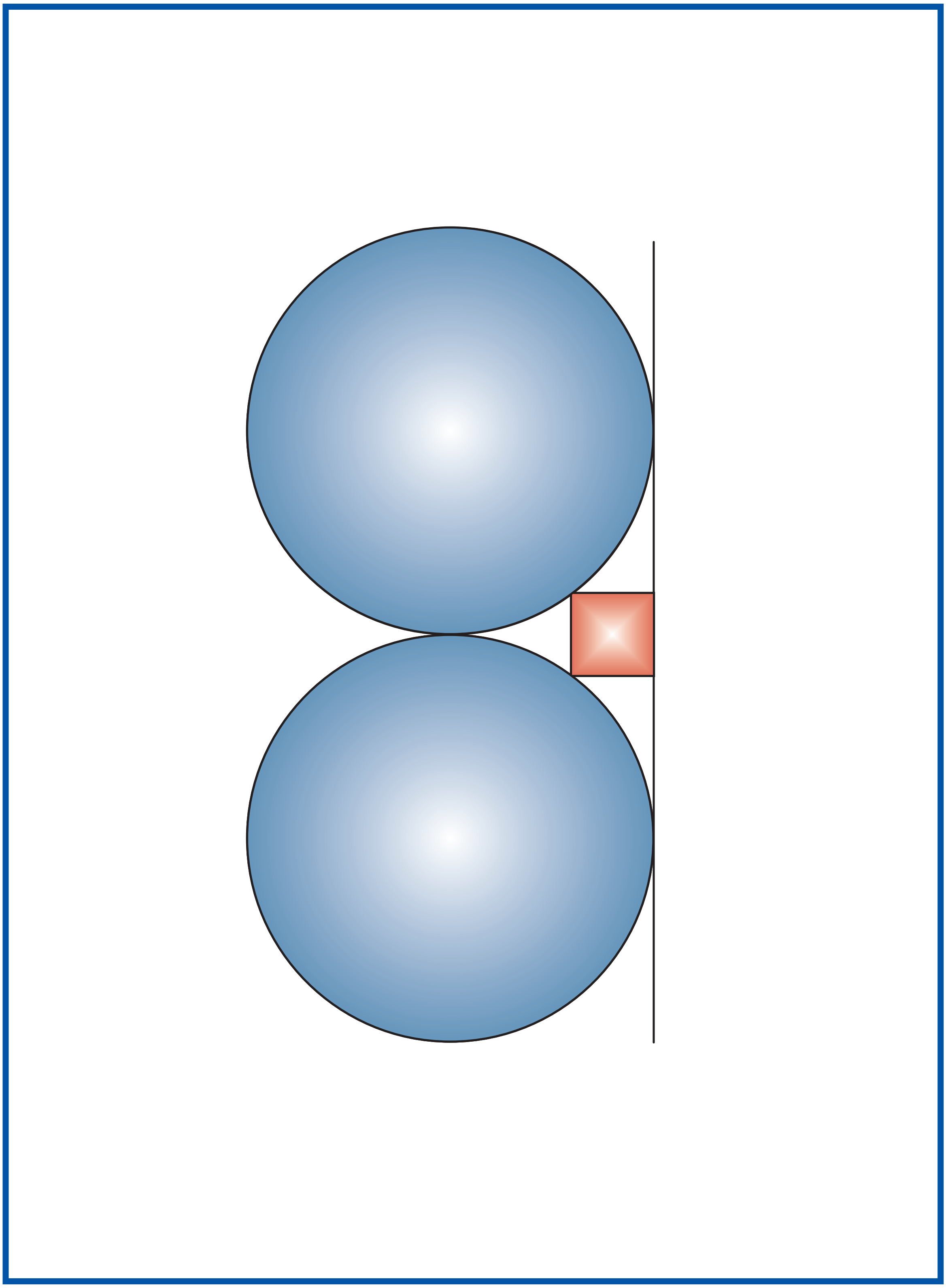
- Presentació de l'estudi i del raonament.

A partir de la solució del problema $TS = \dfrac{2r}{5}$ tenim,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{QN}{MN} = \dfrac{r}{2r} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{TS}{MS} = \dfrac{\dfrac{2r}{5}}{r - \dfrac{r}{5}} = \dfrac{\dfrac{2r}{5}}{\dfrac{4r}{5}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{QN}{MN} = \dfrac{TS}{MS}.$$

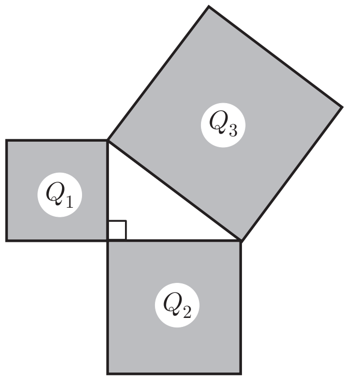
Per tant, els triangles $\triangle MST$ i $\triangle MNQ$ són semblants i, conseqüentment, els punts Q, T, M estan alineats. De la mateixa manera el vèrtex T' es troba sobre la línia NP.

c) Construïu totes les figures del problema en format apaïsat, esborreu les línies auxiliars i acoloriu el resultat al vostre gust.



4. Resum de propietats i conceptes utilitzats. On exposareu els elements algèbrics i geomètrics implicats en l'activitat.

a) **Teorema de Pitàgores.**



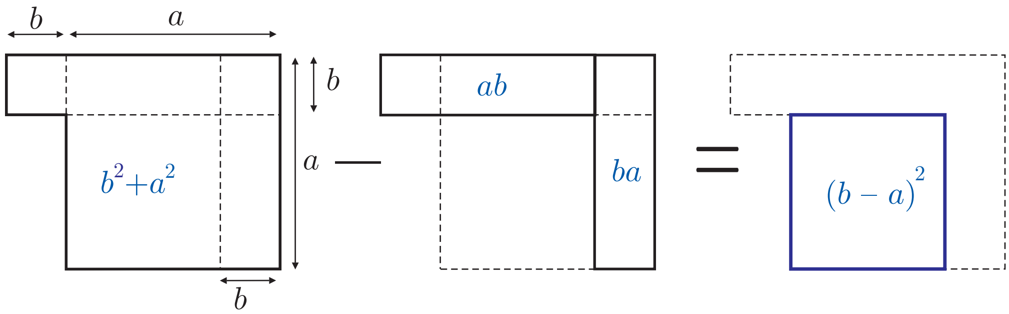
- Enunciat en llenguatge geomètric i amb l'ajut de figures:
  En un triangle rectangle, les sumes de les àrees dels quadrats construïts sobre els catets és igual a l'àrea del quadrat construït sobre la hipotenusa.
- Enunciat en llenguatge algèbric:
  En un triangle rectangle en què els catets mesuren a i b i la hipotenusa mesura c, es compleix $a^2 + b^2 = c^2$.

b) **Quadrat d'una diferència**

- Escriviu la identitat que proporciona el desenvolupament del quadrat d'una diferència.

  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- Justificació geomètrica del desenvolupament del quadrat d'una diferència.
  - Dibuixeu el resultat de retallar, en el gràfic de l'esquerra, el gràfic de la dreta.



  - Passeu a llenguatge d'àrees de figures, en funció d'a i de b, l'operació de retallar que heu fet. Obtindreu la identitat de l'apartat anterior.

  Identitat: $b^2 + a^2 - 2\,ab = (a-b)^2$.

- Justifiqueu la identitat amb l'ús exclusiu del llenguatge algèbric.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = (a-b)\,a - (a-b)\,b \\ &= a^2 - ba - ab - b^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

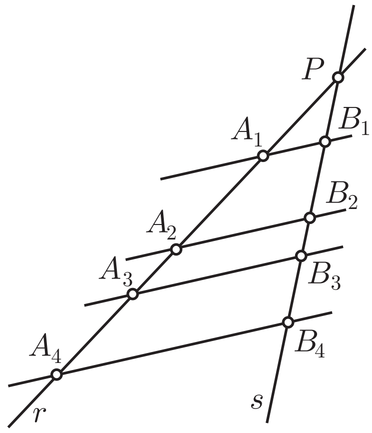
c) **Resolució de l'equació de segon grau**

Fórmula amb radicals: $ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

d) **Teorema de Tales.**

– Si tallem dues línies r i s per una col·lecció de línies paral·leles, digueu quina és la relació que hi ha entre els segments determinats per aquestes sobre r i s.

Els segments determinats per les parelles de paral·leles són directament proporcionals.

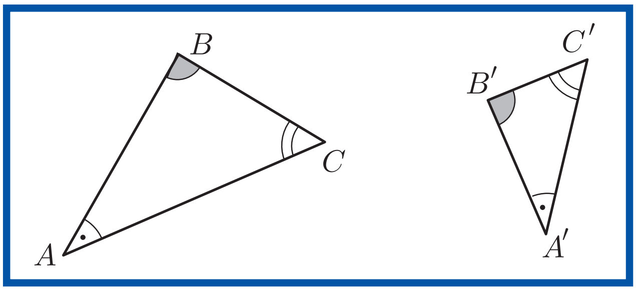


– Doneu exemples del significat de la vostra resposta, observant la figura i completant les igualtats.

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{PB_1}{PB_2} \quad ; \frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3} \quad ; \frac{A_1A_3}{A_3A_4} = \frac{B_1B_3}{B_3B_4}$$

e) **Semblança de triangles**

– Definició: Dos triangles són semblants si els angles d'un són iguals als angles de l'altre.
En la figura adjunta seria $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ i $\widehat{C} = \widehat{C'}$.



– Presenteu dos criteris de semblança de triangles.

- Dos triangles són semblants si tenen els tres costats proporcionals.

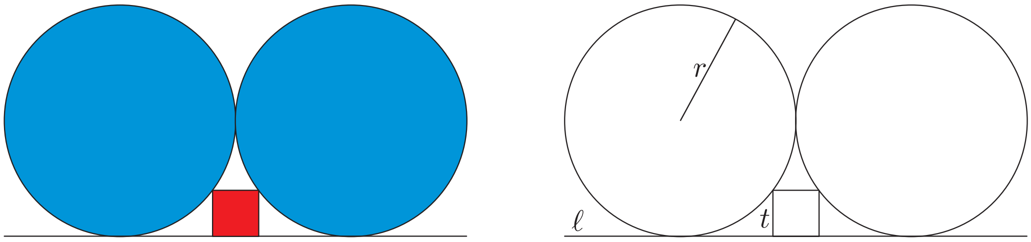
En la figura seria, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

- Dos triangles són semblants si tenen dos costats proporcionals i igual l'angle que determinen aquests costats.

En la figura seria, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ i $\widehat{A} = \widehat{A'}$.

Activitat 2

Dos cercles de radi r són tangents a la línia ℓ. Tal com es mostra a la figura, un quadrat de costat t toca ambdós cercles. Es planteja de fer una anàlisi geomètrica, sense intervenció del teorema de Pitàgores, que proporcioni una construcció de la figura.



Descripció: Sangaku localitzat en el Santuari Katayamahiko de Murahisagun Okayama city, 1873.

1. Anàlisi geomètrica. Recerca d'una propietat del vèrtex T del quadrat en contacte amb la circumferència.

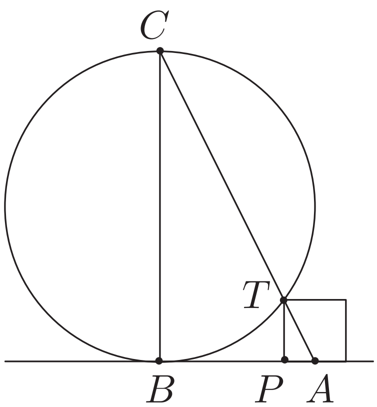
a) Suposem el problema resolt i observeu els segments AT i TC traçades sobre la solució representada en la figura adjunta. Esbrinarem si pertanyen a una mateixa recta. Escriviu els valors de:

$\angle APT =$

$\angle ABC =$

$\dfrac{PT}{PA} =$

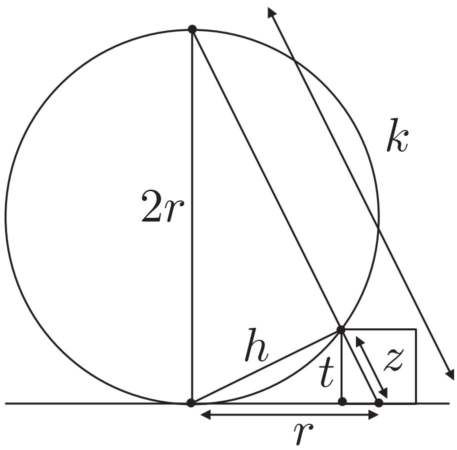
$\dfrac{BC}{BA} =$



b) A partir dels resultats anteriors raoneu l'existència de triangles semblants i deduïu-ne que els punts A, T i C estan alineats.

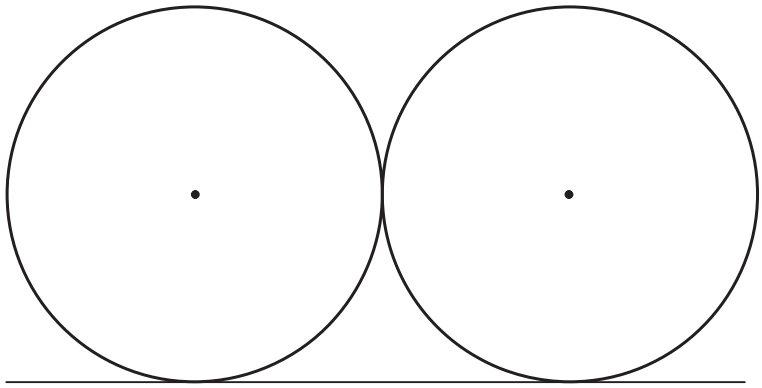
2. Obtenció de la relació entre el costat t del quadrat i el radi r

Observeu les relacions de semblança dels triangles de la figura i establiu la igualtat $t = \frac{2r}{5}$.



3. Construcció amb regle i compàs.

a) Construïu el quadrat utilitzant el resultat de l'apartat (1 b). (No esborreu les línies auxiliars.)



- Descripció de les etapes de la construcció.

b) Construïu totes les figures del problema en format apaïsat, esborreu les línies auxiliars i acoloriu el resultat al vostre gust.

Full del professor per a l'activitat 2

1. Alumnes a qui va dirigida l'activitat

Alumnat de 3r i 4t d'ESO que revisen el concepte de semblança de cara a una posterior introducció a la trigonometria plana. Per a una activitat d'aula amb alumnes de 2n d'ESO que s'introdueixen a l'estudi de la semblança.

2. Qüestions curriculars implicades

a) Criteris de semblança de triangles.

b) Angles determinats per dues paral·leles i una secant.

c) Traçat d'una recta perpendicular a un segment.

d) Traçat de la mediatriu d'un segment.

e) Concepte d'anàlisi.

3. Activitats complementàries a plantejar segons el context.

a) Sobre els criteris de semblança de triangles.
   - Demostració de l'equivalència dels criteris.
   - Plantejament d'algun exercici o problema d'aplicació.

b) Sobre els angles determinats per dues paral·leles i una secant.
   - Aplicació a l'estudi de propietats de les figures geomètriques com, per exemple, que la suma d'angles d'un triangle val 180°, o que en un paral·lelogram els angles oposats són iguals.

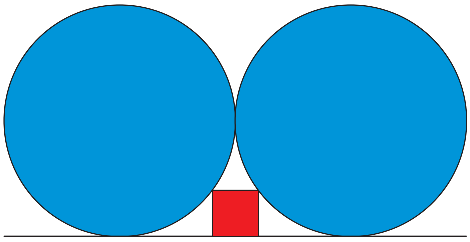
c) Sobre el traçat d'una recta perpendicular a un segment.
   - Construcció des d'un punt exterior.
   - Construcció des de l'interior o des de l'extrem del segment.

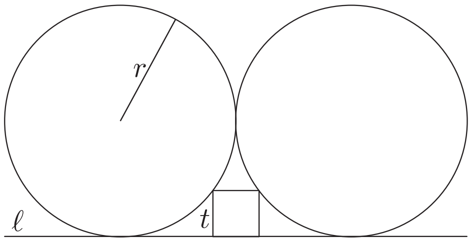
d) Sobre el traçat de la mediatriu d'un segment.
   - Establir dues definicions equivalents.

e) Sobre el concepte d'anàlisi.
   - Presentació o recerca guiada sobre el significat de:
     i) Anàlisi.
     ii) Anàlisi geomètrica.
     iii) Anàlisi algèbrica d'un problema geomètric.

Activitat 2 *Proposta de resolució*

Dos cercles de radi r són tangents a la línia ℓ. Tal com es mostra a la figura, un quadrat de costat t toca ambdós cercles. Es planteja de fer una anàlisi geomètrica, sense intervenció del teorema de Pitàgores, que proporcioni una construcció de la figura i la relació $t = \frac{2r}{5}$.





Descripció: Sangaku localitzat en el Santuari Katayamahiko de Murahisagun Okayama city, 1873.

1. Anàlisi geomètrica. Recerca d'una propietat del vèrtex T del quadrat en contacte amb la circumferència.

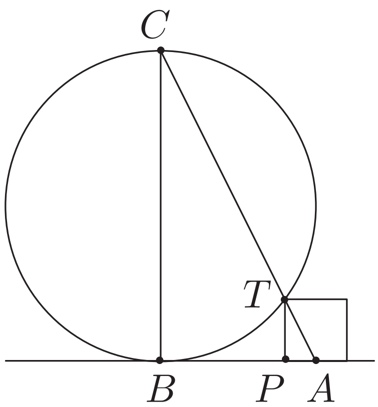
a) Suposem el problema resolt i observeu els segments AT i TC traçades sobre la solució representada en la figura adjunta. Esbrinarem si pertanyen a una mateixa recta. Escriviu els valors de:

$\angle APT = 90°$

$\angle ABC = 90°$

$$\frac{PT}{PA} = \frac{2 \cdot t}{t} = 2$$

$$\frac{BC}{BA} = \frac{2 \cdot r}{r} = 2$$



b) A partir dels resultats anteriors raoneu l'existència de triangles semblants i deduïu-ne que els punts A, T i C estan alineats.

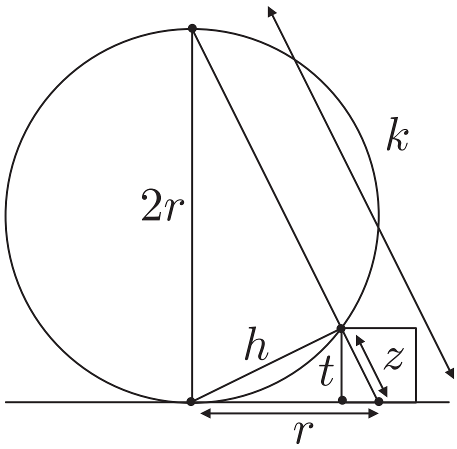
Els triangles $\triangle APT$ i $\triangle ABC$ són semblants perquè tenen un angle igual i els dos costats que els determinen proporcionals.

$$\hat{P} = 90^\circ = \hat{B}$$
$$\frac{PT}{PA} = 2 = \frac{BC}{BA}$$

Llavors en ser BC i PT paral·lels i, per la semblança anterior, $\angle ATP = \angle ACB$, s'obté que A, T i C estan alineats.

2. Obtenció de la relació entre el costat t del quadrat i el radi r

Observeu les relacions de semblança dels triangles de la figura i establiu la igualtat $t = \frac{2r}{5}$.

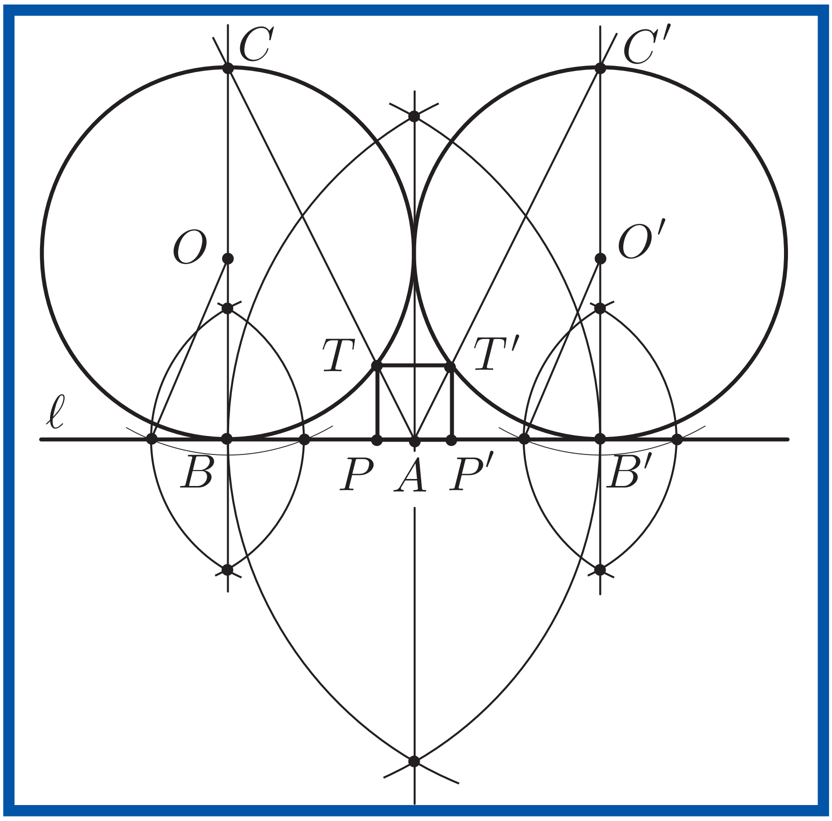


A partir de la semblança de tots els triangles implicats en la figura adjunta obtenim

$$\frac{r}{t} = \frac{k}{h} = \frac{k-z+z}{h} = \frac{k-z}{h} + \frac{z}{h} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Longrightarrow t = \frac{2r}{5}\,.$$

3. Construcció amb regle i compàs.

a) Construïu el quadrat utilitzant el resultat de l'apartat (1 b). (No esborreu les línies auxiliars.)

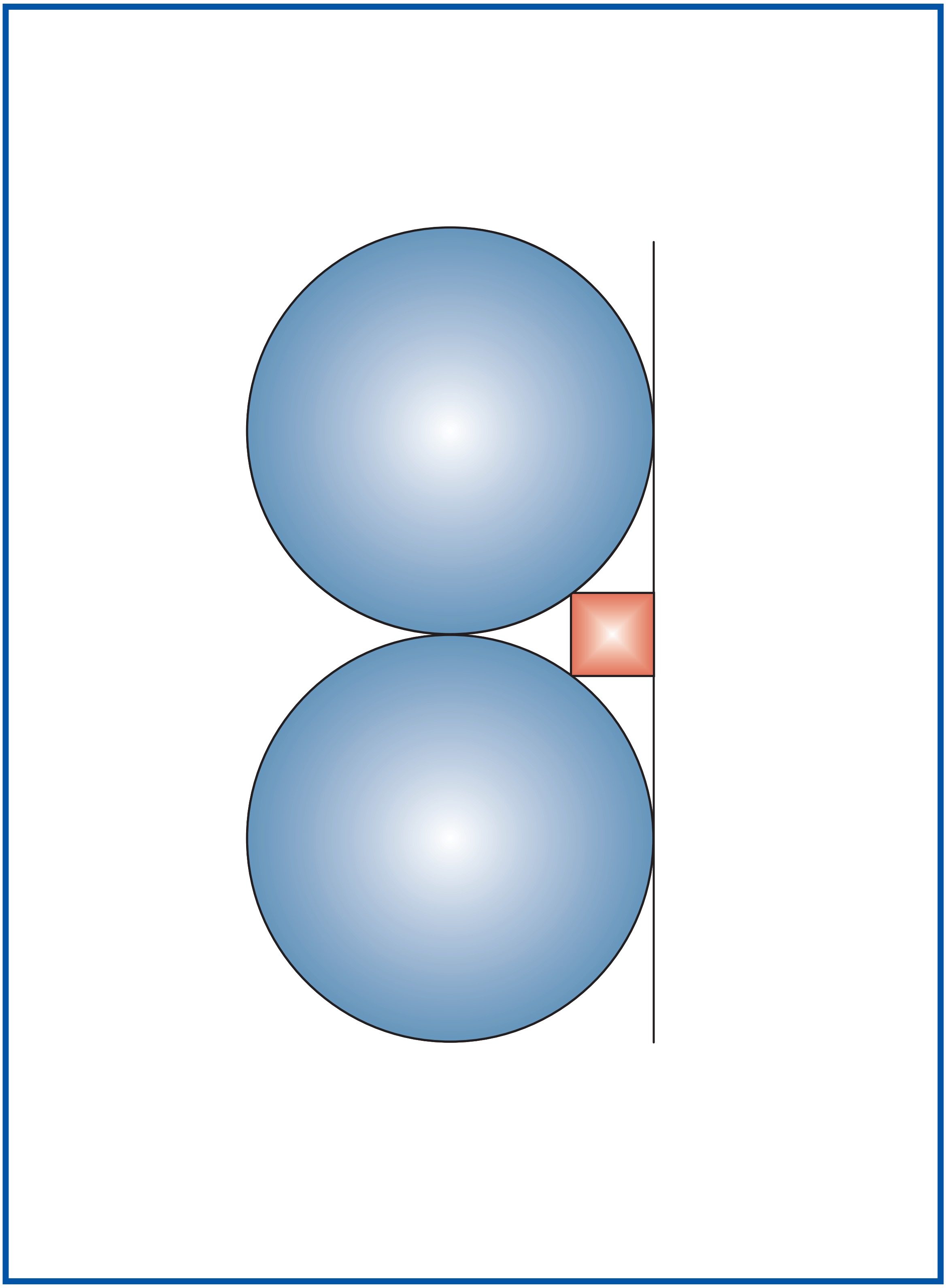


- Descripció de les etapes de la construcció.

  – Construcció dels punts de tangència B i B' mitjançant el traçat de les perpendiculars a ℓ des dels punts O i O'.
  – Traçat del punt mitjà A de BB'.
  – Obtenció de T i T' mitjançant el traçat d'AC i AC'.
  – Construcció del quadrat $\square TT'PP'$.

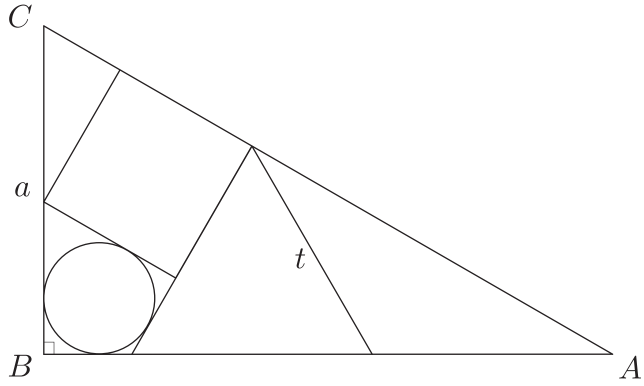
NOLLA MASIP
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart – 2009

b) Construïu totes les figures del problema en format apaïsat, esborreu les línies auxiliars i acoloriu el resultat al vostre gust.



Activitat 3

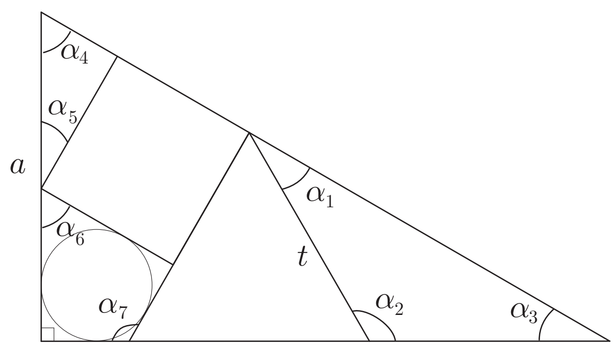
Com es mostra en la figura, un triangle equilàter de costat t, un quadrat de costat s i un cercle es toquen entre si en un triangle rectangle ABC amb costat vertical a. Calculeu t en funció de a.



Descripció: Problema número 12 de la dreta del sangaku del temple Abe no Monjuin a la prefectura Fukushima.

1. Sobre els angles de les figures implicades i una relació mètrica.

a) Calculeu els angles dibuixats a la figura:



$\alpha_1 =$

$\alpha_2 =$

$\alpha_3 =$

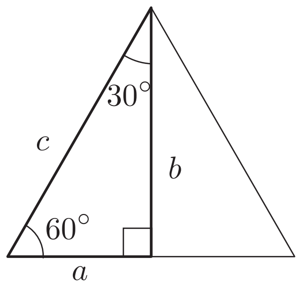
$\alpha_4 =$

$\alpha_5 =$

$\alpha_6 =$

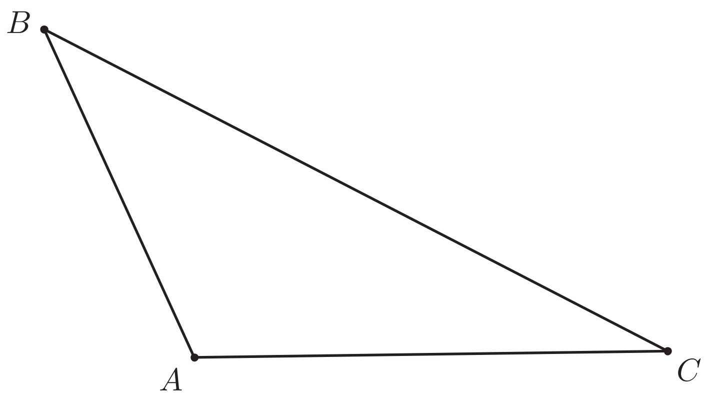
$\alpha_7 =$

b) Trobeu les relacions que hi ha entre els costats a b i c d'un triangle rectangle amb angles aguts de 30° i 60°. Apliqueu el teorema de Pitàgores i la relació entre el triangle inicial i el triangle equilàter construït a partir de l'inicial.

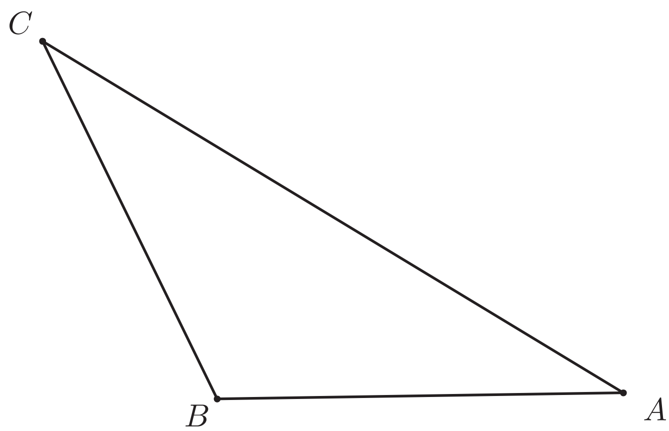


2. Sobre quadrilàters amb circumferències inscrites.

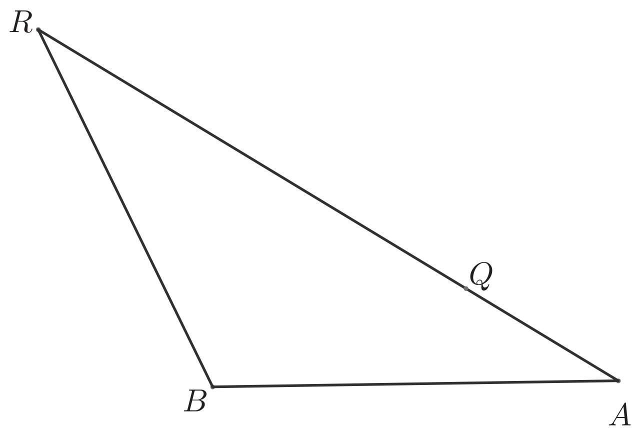
a) **Circumferència inscrita a un triangle.** Recordeu que la bisectriu d'un angle és el lloc geomètric dels punts que equidisten dels costats. A partir d'aquest fet, justifiqueu que les tres bisectrius d'un triangle són concurrents i construïu raonadament la circumferència inscrita al següent triangle.



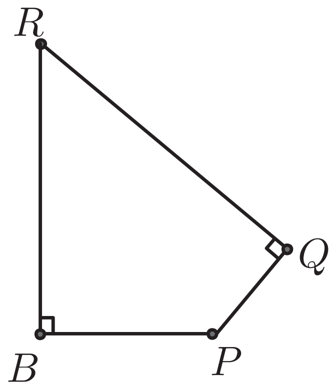
b) **Construcció d'un quadrilàter amb una circumferència inscrita – I.** Sigui $\triangle ABC$ un triangle, construïu dos punts P i Q en els costats AC i AB de forma que el quadrilàter $\square BCQP$ tingui una circumferència inscrita.



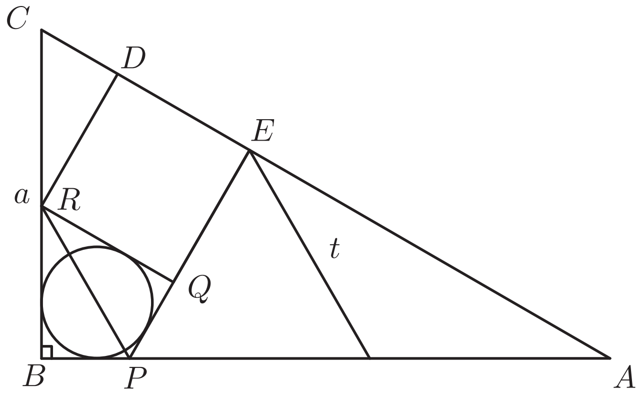
c) **Construcció d'un quadrilàter amb una circumferència inscrita – II.** Sigui $\triangle ABR$ un triangle i Q un punt en el costat a, construïu un punt P en el costat b de forma que el quadrilàter $\square ABPQ$ tingui una circumferència inscrita.



d) **Quadrilàter del sangaku.** En l'enunciat del *sangaku*, els angles $\widehat{B}$ i $\widehat{Q}$ del quadrilàter circumscrit a la circumferència són rectes. Esbrineu una condició per tal que el quadrilàter $\square RBPQ$, tingui una circumferència inscrita.
Indicació: Es poden considerar les bisectrius dels angles $\widehat{R}$ i $\widehat{P}$ i justificar que són paral·leles.



3. Resolució del Sangaku i construcció.



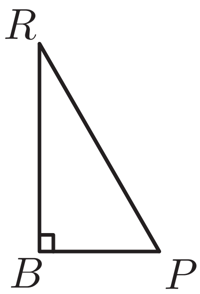
a) Càlcul de t en funció d'a

- Justifiqueu que els triangles $\triangle PBR$, $\triangle PQR$ i $\triangle CDR$ són congruents.

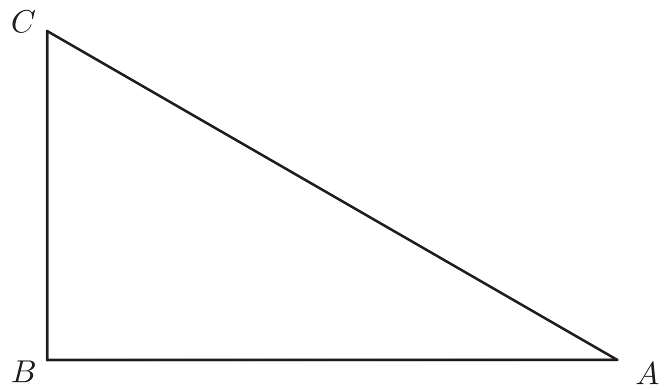
- Anomeneu x la longitud del segment BP i calculeu els segments a i t en funció de x.

- Elimineu finalment el valor de x per tal d'expressar t en funció d'a.

b) Construcció de la figura a partir del triangle $\triangle BPR$.

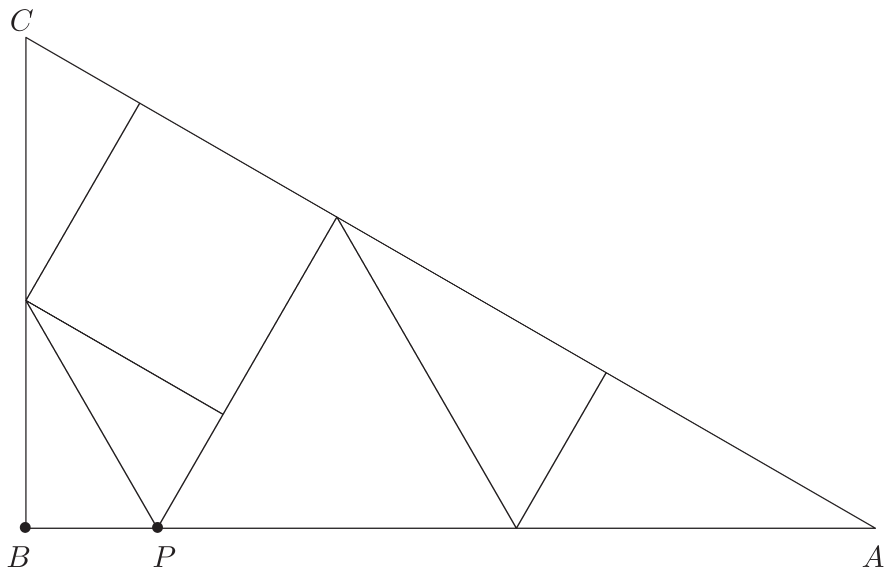


c) **Construcció** de la figura del *sangaku* a partir del triangle $\triangle ABC$.
Indicació: Observeu que els segments RB i RD, de la figura de la pàgina 34, tenen la mateixa longitud.

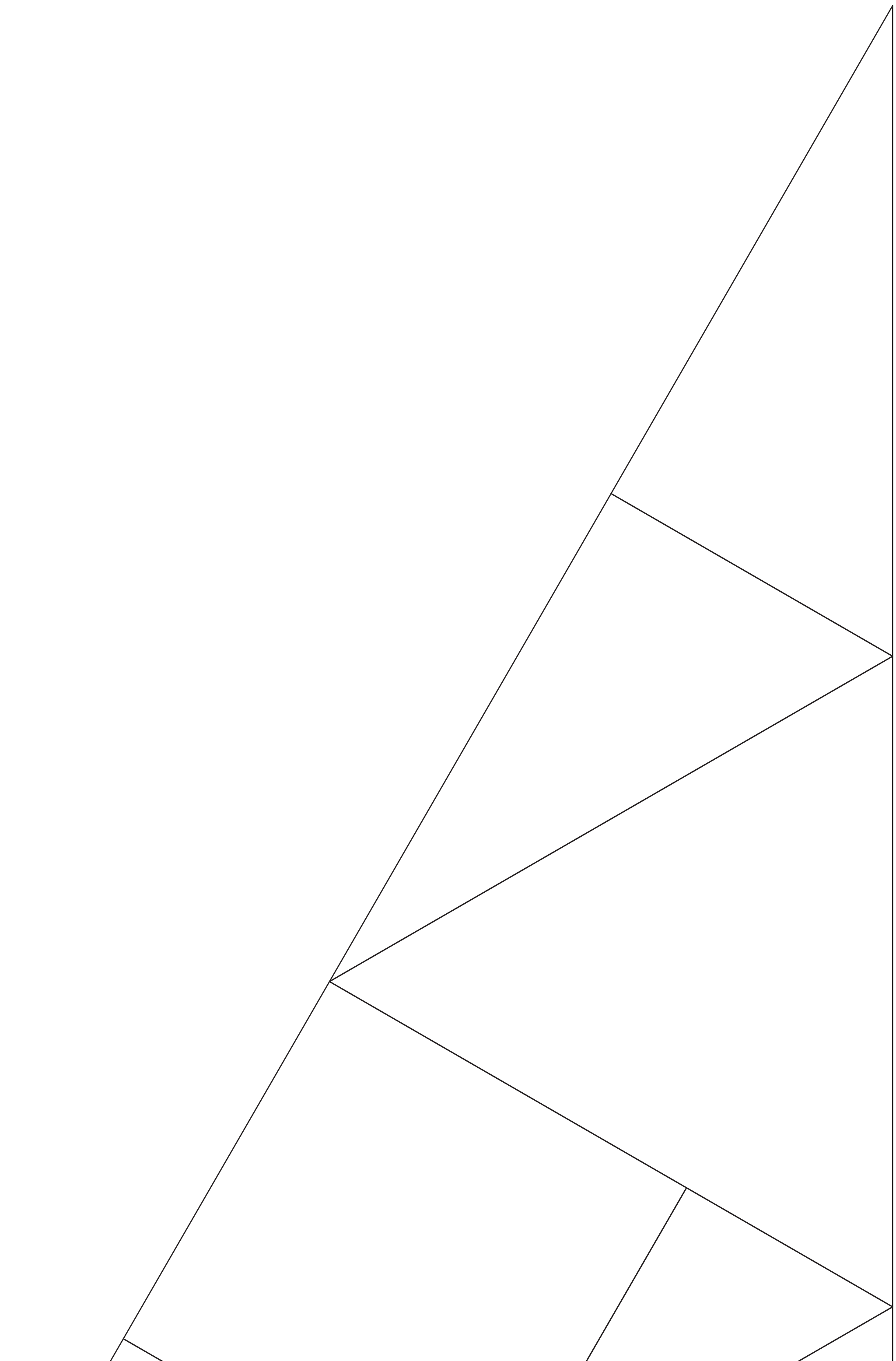


4. Elaboració del Tangram 30-60-90.

a) Retalleu una ampliació de la figura adjunta o la de la plana 39 seguint les línies marcades i construïu les figures que es mostren a la pàgina 41.



b) Si el segment BP és la unitat de mesura calculeu les àrees de totes les peces retallades.



Full del professor per a l'activitat 3

1. Alumnes a qui va dirigida l'activitat

La resolució de tota l'activitat implica el tractament amb radicals per tant seria per alumnes a partir de 4t d'ESO, de tota manera hi ha qüestions parcials com les del càlcul dels angles i les del tàngram que es poden treballar a partir de 6è de primària.

2. Qüestions curriculars implicades

a) Suma dels angles d'un triangle.
b) Teorema de Pitàgores.
c) Congruència de triangles.
d) Traçat i concepte de la bisectriu d'un angle i dels seus punts de contacte amb els costats del triangle.
e) Traçat de perpendicular a una recta per un punt.
f) Superfície d'un triangle i d'una figura qualsevol per descomposició en altres figures.
g) Concepte d'anàlisi.

3. Activitats complementàries a plantejar segons el context.

a) Sobre la suma d'angles d'un triangle
   - Justificació basada en l'axioma de les paral·leles, estudi dels angles determinats per dues paral·leles i una secant i plantejament de qüestions sobre paral·lelisme.
   - Aplicació a l'estudi de la suma d'angles interiors d'un polígon convex.

b) Sobre el teorema de Pitàgores.
   - Presentació o proposicions guiades d'algunes demostracions.
   - Recerca de terns pitagòrics.

c) Sobre els criteris de congruència de triangles.
   - Visualització dels criteris i tractament de la falsedat del criteri C–C–A.
   - Plantejament d'algun exercici o problema d'aplicació com, per exemple, que en un paral·lelogram els angles oposats són iguals.

d) Sobre el traçat d'una recta perpendicular a un segment.
   - Construcció des d'un punt exterior.
   - Construcció des de l'interior o des de l'extrem del segment.

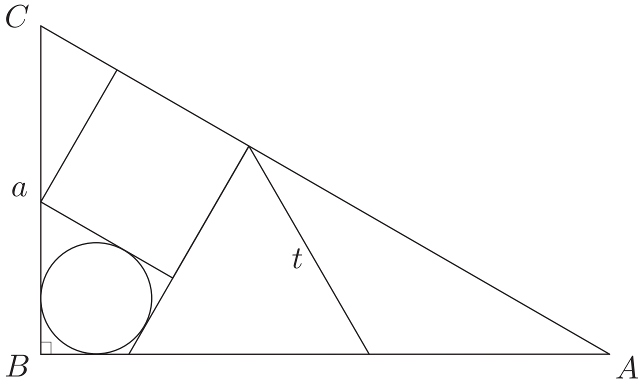
e) Sobre el traçat i concepte de la bisectriu d'un angle.
   - Estudi de la circumferència inscrita en un triangle.
   - Teorema de la bisectriu i aplicacions.

f) Sobre superfícies de figures.
   - Càlcul pràctic de superfícies per dissecció, com ara el pati de l'Institut o l'escola.
   - Comparació de superfícies de triangles i polígons a partir de la lectura dels teoremes I.33 a I.41 dels *Elements* d'Euclides.

g) Sobre el concepte d'anàlisi.
   - Presentació o recerca guiada sobre el significat de:
     i) Anàlisi.
     ii) Anàlisi geomètrica.
     iii) Anàlisi algèbrica d'un problema geomètric.

Activitat 3 *Proposta de resolució*

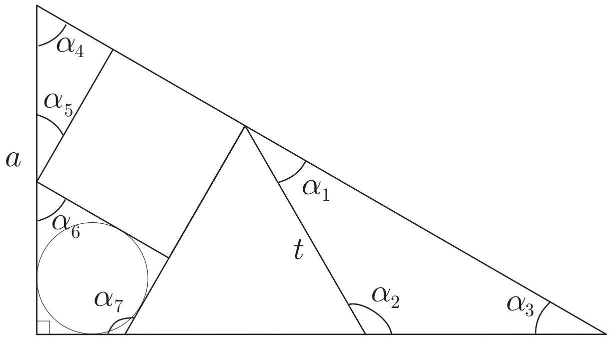
Com es mostra en la figura, un triangle equilàter de costat t, un quadrat de costat s i un cercle es toquen entre si en un triangle rectangle ABC amb costat vertical a. Calculeu t en funció de a.



Descripció: Problema número 12 de la dreta del sangaku del temple Abe no Monjuin a la prefectura Fukushima.

1. Sobre els angles i les relacions que impliquen.

a) Calculeu els angles dibuixats a la figura:



Atès que els angles d'un quadrat són de 90°, els d'un triangle equilàter de 60° i que la suma dels angles d'un triangle és 180° es pot deduir:

$\alpha_1 = 180° - (90° + 60°) = 30°$

$\alpha_2 = 180° - 60° = 120°$

$\alpha_3 = 180° - (\alpha_1 + \alpha_2) = 30°$

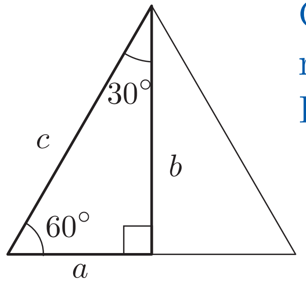
$\alpha_4 = 90° - \alpha_3 = 60°$

$\alpha_5 = 90° - \alpha_4 = 30°$

$\alpha_6 = 180° - (90° + \alpha_5) = 60°$

$\alpha_7 = 180° - 60° = 120°$

b) Trobeu les relacions que hi ha entre els costats a b i c d'un triangle rectangle amb angles aguts de 30° i 60°. Apliqueu el teorema de Pitàgores i la relació entre el triangle inicial i el triangle equilàter construït a partir de l'inicial.



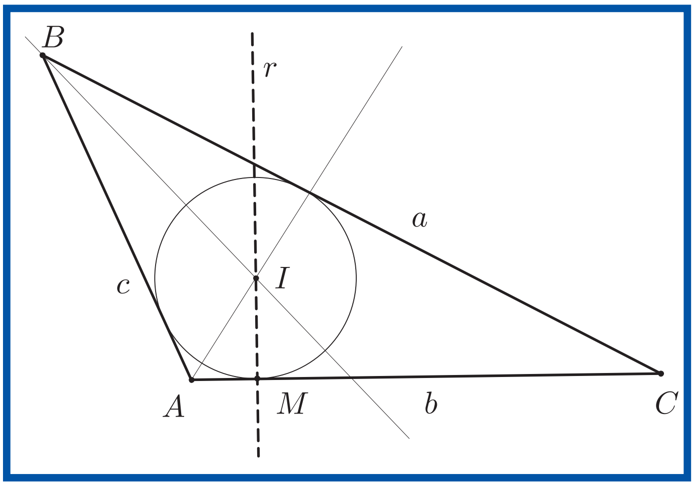
Com que un triangle amb els angles de 60° és equilàter, resulta $a = c/2$. Llavors, aplicant el teorema de Pitàgores,

$$b^2 = c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{3c^2}{4} \Rightarrow b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

2. Sobre quadrilàters amb circumferències inscrites.

a) **Circumferència inscrita a un triangle.** Recordeu que la bisectriu d'un angle és el lloc geomètric dels punts que equidisten dels costats. Justifiqueu que les tres bisectrius d'un triangle són concurrents i construïu raonadament la circumferència inscrita al següent triangle.

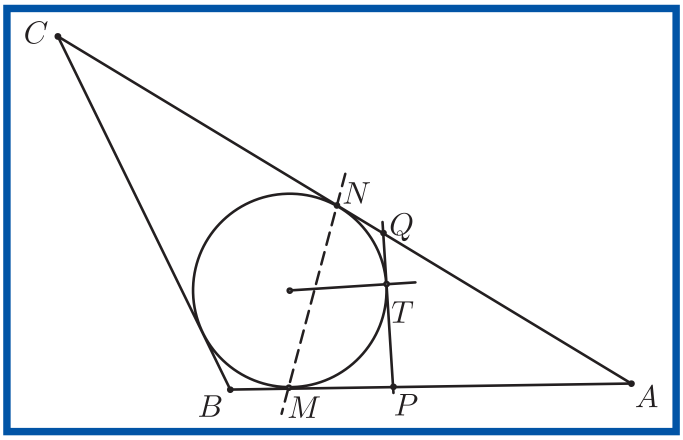
- **Les bisectrius són concurrents.** La bisectriu de l'angle $\widehat{A}$ equidista dels costats b i c i la bisectriu de l'angle $\widehat{B}$ equidista d'a i c. Per tant el punt d'intersecció I de les dues bisectrius equidista dels costats a i b. Conseqüentment, el punt I és de la bisectriu de l'angle $\widehat{C}$.
- **Anàlisi geomètrica per a la construcció de la circumferència.**
  - El centre ha d'equidistar dels tres costats. Per tant, és el punt I.
  - La recta pel centre I i pel punt de contacte M de la circumferència amb el costat AC ha de ser perpendicular a AC.



- **Construcció.** Tracem,
  - Les bisectrius del triangle i en resulta el centre I de la circumferència.
  - La recta perpendicular, pel punt I al costat AC. En resulta el punt M de la circumferència.
  - La circumferència (I, IM).

b) **Construcció d'un quadrilàter amb una circumferència inscrita – I.** Sigui $\triangle ABC$ un triangle, construïu dos punts P i Q en els costats AB i AC de forma que el quadrilàter $\square BCQP$ tingui una circumferència inscrita.

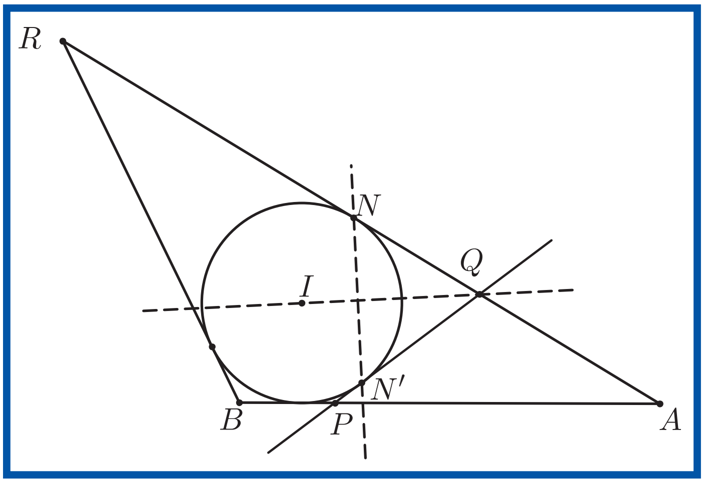
- **Anàlisi geomètrica:**
  - En primer lloc observem que no tots els quadrilàters $\square BCQP$ tenen una circumferència inscrita, o el que és el mateix, les bisectrius dels angles d'un quadrilàter no sempre són concurrents.
  - Que la circumferència sigui inscrita al quadrilàter $\square BCQP$ implica que ho sigui al triangle $\triangle ABC$. En resulten els punts de tangència M i N sobre AB i AC.
  - El costat PQ del quadrilàter és tangent en T a la circumferència, el qual cau en el semiplà determinat per la recta MN i el punt A. Això implica que per qualsevol punt T amb aquestes restriccions es pot traçar el quart costat del quadrilàter i el problema té infinitat de solucions.



- **Construcció:** Tracem,
  - La circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$. En resulten M i N.
  - Una tangent per qualsevol punt T de la circumferència que caigui en el semiplà determinat per la recta MN i el punt A. En resulten els punts P i Q demanats.

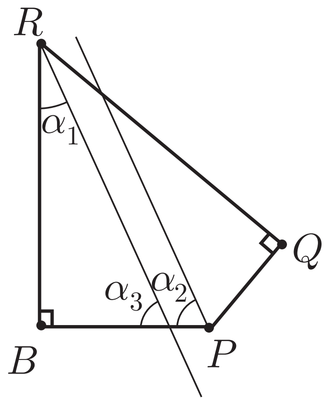
c) **Construcció d'un quadrilàter amb una circumferència inscrita – II.** Sigui $\triangle ABR$ un triangle i Q un punt en el costat AR, construïu un punt P en el costat AB de forma que el quadrilàter $\square RBPQ$ tingui una circumferència inscrita.

- **Anàlisi geomètrica:**
  - Que la circumferència de centre I sigui inscrita al quadrilàter $\square RBPQ$ implica que ho sigui al triangle $\triangle RBA$. En resulta el punt de tangència N sobre AR.
  - El punt de contacte N' del segment QP amb la circumferència inscrita és simètric, respecte la recta IQ, del punt N. Per tant NN' és perpendicular a IQ.



- **Construcció:** Tracem,
  - La circumferència inscrita al triangle $\triangle ABR$. En resulta el punt de tangència N amb AR.
  - La recta IQ, en què I és el centre de la circumferència, i la seva perpendicular per N. La seva intersecció amb la circumferència és N'.
  - La recta QN' que intersecada amb el costat AB proporciona el punt P cercat.

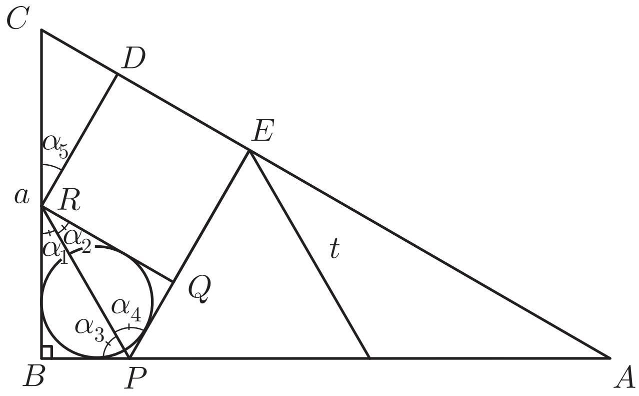
d) **Quadrilàter del sangaku.** En l'enunciat del *sangaku*, els angles $\widehat{B}$ i $\widehat{Q}$ del quadrilàter circumscrit a la circumferència són rectes. Esbrineu una condició necessària per tal que el quadrilàter $\square RBPQ$, tingui una circumferència inscrita.
Indicació: Es poden considerar les bisectrius dels angles $\widehat{R}$ i $\widehat{P}$ i justificar que són paral·leles.



– Construïm les bisectrius dels angles $\widehat{R}$ i $\widehat{P}$.
– Si l'angle $\widehat{R} = 2x$, llavors
  (a) $\alpha_1 = x$.
  (b) $\widehat{P} = 360° - 90° - 90° - 2x$.
  (c) $\alpha_2 = 90 - x$.
  (d) $\alpha_3 = 90° - \alpha_1 = 90° - x$.

Per tant les dues bisectrius són paral·leles i, si el quadrilàter té una circumferència inscrita, aquestes bisectrius han de tenir com a mínim un punt en comú, (el centre d'aquesta circumferència).
Conseqüentment, les bisectrius han de coincidir amb la diagonal RP.
• Alternativa: Es podria enfocar des de la consideració del polígon $\square PORQ$, en què O és el centre de la circumferència inscrita, i demostrar que $\widehat{POR} = 180°$. Llavors, s'arriba a la mateixa condició.

3. Resolució del Sangaku i construcció.



a) Càlcul de t en funció d'a

– Justifiqueu que els triangles $\triangle PBR$, $\triangle PQR$ i $\triangle CDR$ són congruents.

En efecte, en ser la diagonal RP la bisectriu dels angles R i P, resulta que $\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$ i $\alpha_3 = \alpha_4 = 60°$. Aplicant el criteri de congruència A-C-A deduïm que $\triangle BPR$, $\triangle PQR$ són congruents.
D'altra banda $\alpha_5 = 180° - 90° - 60° = 30°$ i $RD = RQ$. Aplicant el criteri A-C-A un altre cop resulta que els triangles $\triangle RQP$ i RDC són també congruents.

– Anomeneu x la longitud del segment BP i calculeu els segments a i t en funció de x.

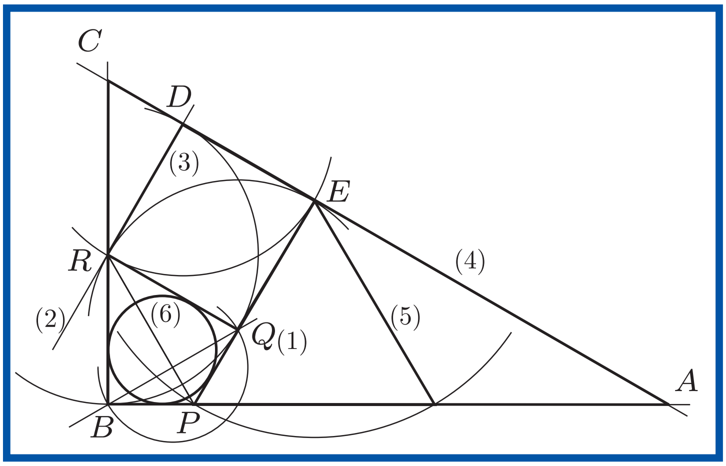
$$\begin{aligned} a &= RB + RC = \sqrt{3}x + 2x = (2+\sqrt{3})x \\ t &= PQ + QE = PQ + RQ = x + \sqrt{3}x = (1+\sqrt{3})x \end{aligned}$$

– Elimineu finalment el valor de x per tal d'expressar t en funció d'a.

$$\begin{aligned} t &= (1+\sqrt{3})x = (\sqrt{3}+1)\cdot\frac{a}{(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\,a = (\sqrt{3}-1)\,a \end{aligned}$$

b) **Construcció** de la figura del *sangaku* a partir del triangle $\triangle BPR$.

La clau de la construcció la té el quadrilàter $\square RBPQ$ estudiat a l'activitat de la pàgina 49. La condició perquè hi puguem inscriure una circumferència és que les bisectrius dels angles no rectes $\widehat{R}$ i $\widehat{P}$ coincideixin amb la diagonal RP. Per tant els vèrtexs B i Q dels angles rectes han de ser simètrics respecte RP.



Etapes de la construcció: Tracem,

(1) El triangle $\triangle PQR$, (Q és el punt simètric del punt B respecte la recta RP).

(2) La recta perpendicular, pel punt R, al segment RQ.

(3) El quadrat $\square RDQE$ a partir del costat RQ.

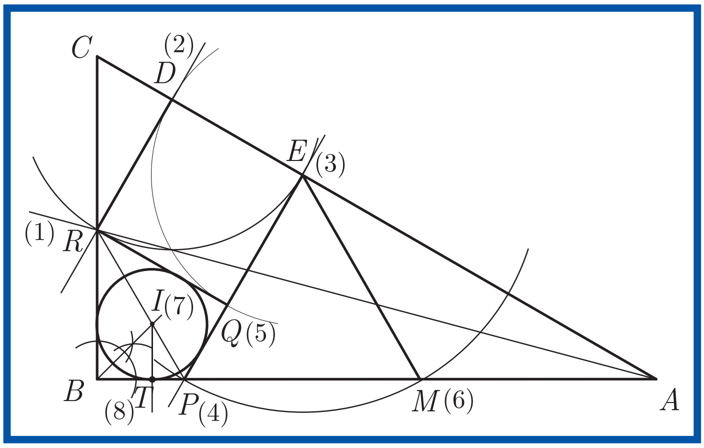
(4) El triangle $\triangle ABC$, mitjançant la prolongació dels segments BP, RB i DE.

(5) El triangle equilàter de costat EP.

(6) La circumferència inscrita al quadrilàter $\square RBPQ$.

c) **Construcció** de la figura del *sangaku* a partir del triangle $\triangle ABC$.
Indicació: Observeu que els segments RB i RD, de la figura de la pàgina 50, tenen la mateixa longitud.

En aquesta construcció el punt clau serà el vèrtex R del quadrat que es troba sobre el costat BC del triangle $\triangle ABC$. En ser els triangles $\triangle RBP$ i $\triangle RDC$ congruents, resulta $RD{=}RB$ i, per tant, el punt R pertany a la bisectriu de l'angle $\widehat{A}$.



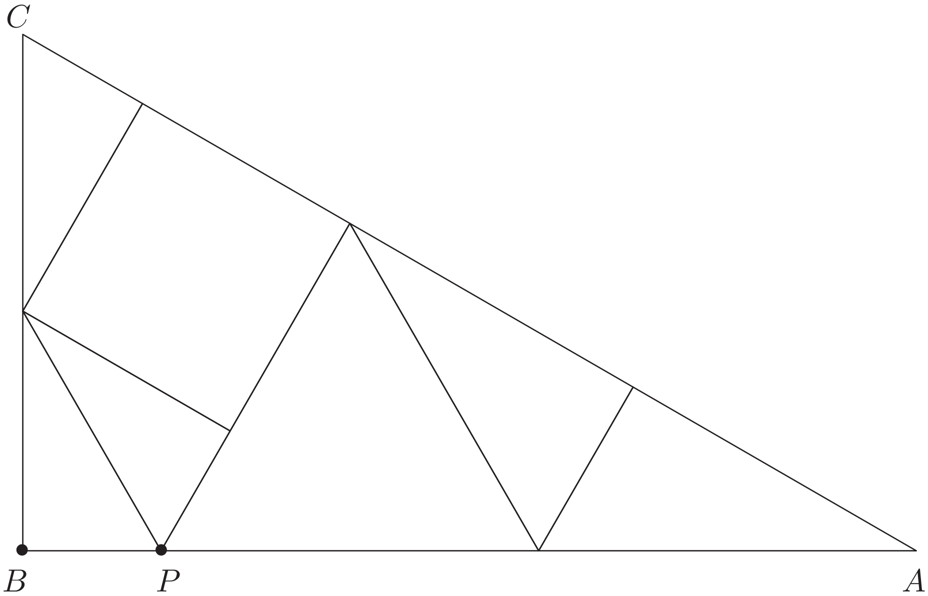
Etapes de la construcció: Tracem,

(1) El punt R com intersecció de la bisectriu de l'angle $\widehat{A}$ amb BC.
(2) El punt D com intersecció d'AC amb la perpendicular, per R, a AC.
(3) El punt E com intersecció de la circumferència (D, DR) amb AC.
(4) El punt P com intersecció de BC amb la perpendicular, per E, a AC.
(5) El punt Q com intersecció de la circumferència (E, ED) amb EP.
(6) El punt M com intersecció de la circumferència (E, EP) amb AC.
(7) El punt I com intersecció de RP amb la bisectriu de l'angle $\widehat{B}$.[6]
(8) El punt T com intersecció d'AB amb la perpendicular, per I, a AB.
(9) Finalment es tracen les tres figures interiors amb els punts trobats.

[6]Es deixa com exercici demostrar que la bisectriu de l'angle $\widehat{B}$ és la recta BE. D'aquesta manera el seu traçat requereix menys etapes que les de la figura.

4. Elaboració del Tangram 30-60-90.

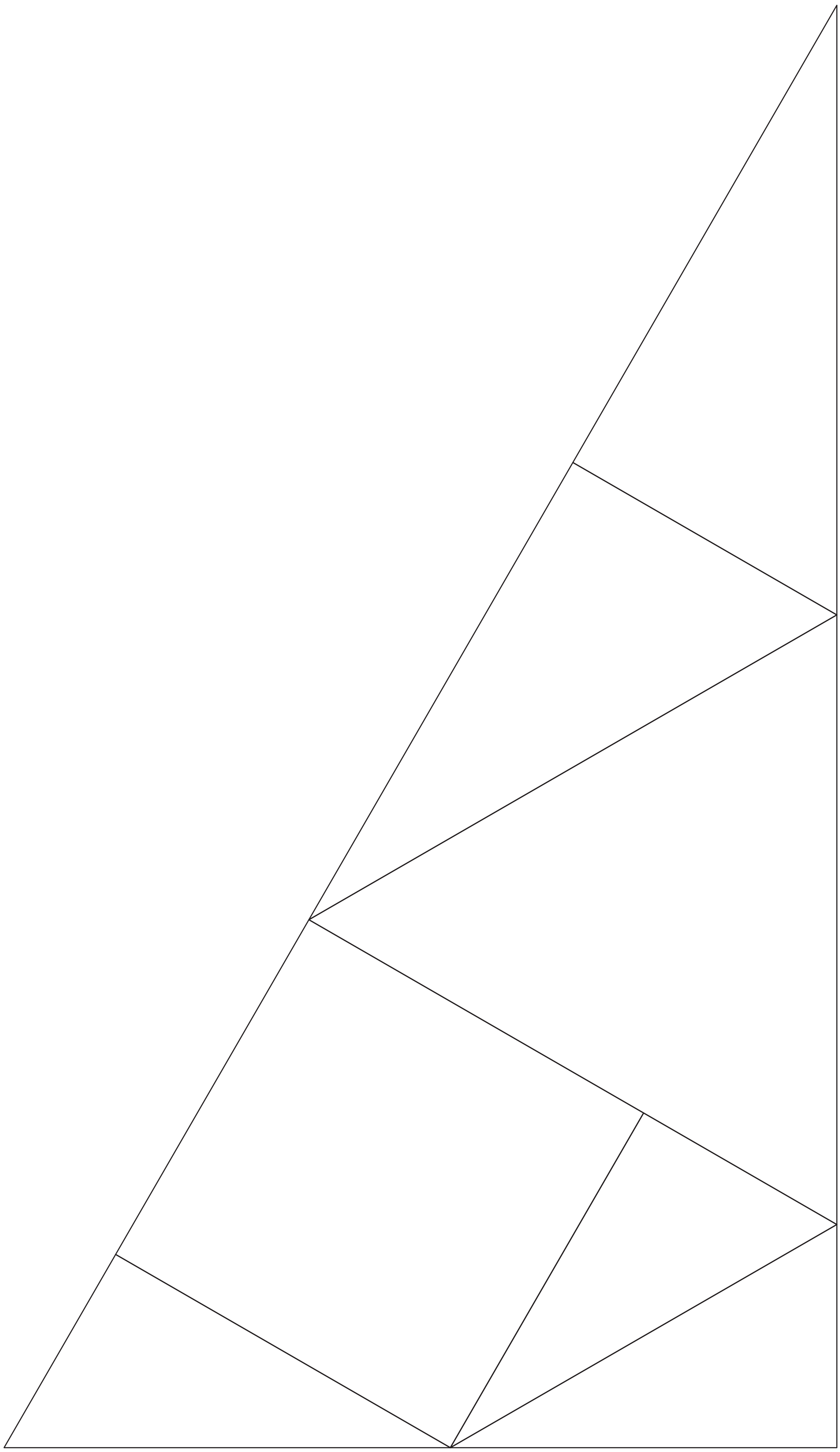
a) Retalleu una ampliació de la figura adjunta o la de la plana 55 seguint les línies marcades i construïu les figures que es mostren a la pàgina 57.

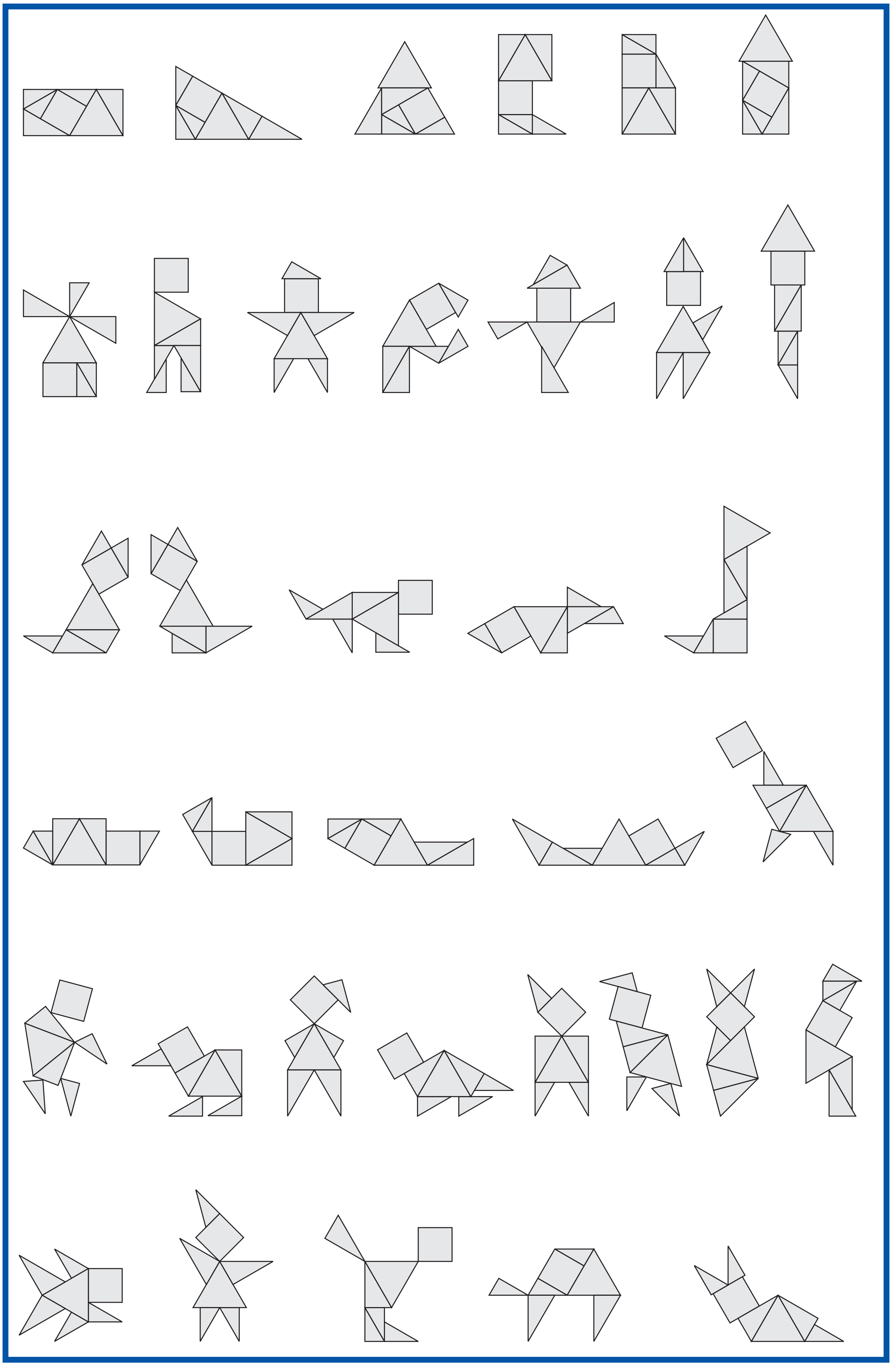


b) Si el segment BP és la unitat de mesura calculeu les àrees de totes les peces retallades.

Totes les figures tenen la mateixa superfície atès que s'han construït amb totes les peces del tangram. Per tant, només cal calcular la superfície del triangle inicial $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} AB &= 1 + (1+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3}) \\ BC &= 2+\sqrt{3} \\ \text{Superfície} &= AB \cdot BC/2 = (2+\sqrt{3}) \cdot (3+2\sqrt{3})/2 = 6 + 7\sqrt{3}/2 \end{aligned}$$





Eines complementàries per al professorat

EC.1 El concepte d'anàlisi

1. Una primera aproximació.

- **Anàlisi:** Davant d'un problema o d'una propietat per demostrar, és l'acció consistent a estudiar les implicacions que esdevenen quan suposem el problema resolt o la propietat demostrada.
  La seva finalitat és la d'arribar a una propietat, resultat o construcció coneguda. Llavors, en el procés anomenat de *síntesi*, es parteix d'aquesta propietat coneguda i, mitjançant l'estudi de les condicions que permeten invertir el procés de deducció de les implicacions que ens hi han portat, s'arriba a la resolució del problema o a la demostració de la propietat.
- **Anàlisi geomètrica:** Anàlisi que utilitza les propietats conegudes dels objectes i transformacions geomètriques.
- **Anàlisi algèbrica d'un problema o propietat geomètrica:** Anàlisi geomètrica que utilitza el llenguatge de l'àlgebra per trobar una o diverses equacions que un cop resoltes permetin construir la solució del problema o demostrar la propietat.

2. Una mica d'història

A l'obra Pólya [1945] es defineix l'*heurística* com la disciplina que estudia les operacions mentals típicament útils en el procés de resolució de problemes. En l'estudi d'aquests operacions s'ha de tenir en compte, entre d'altres qüestions, el mètode de l'anàlisi practicat pels geòmetres grecs que seguiren la tradició iniciada per Tales. Aquests cercaren la veritat en matemàtiques amb l'única eina de la raó i defugint la via del mite. Tanmateix els grecs no escrivien l'anàlisi que els portava al seus resultats, si més no, no s'ha conservat cap obra escrita d'aquesta manera. Només mostraven la síntesi, en què es demostraven les propietats i construccions proposades, però on no hi havia cap indicació del camí de descobriment. Sabem que aquests geòmetres utilitzaven el mètode de l'anàlisi per la presentació que en fa Papos d'Alexandria [s. III] en el llibre setè de la seva *Col·lecció*, anomenat el *El tresor de l'anàlisi*.

Segons Papos l'anàlisi consisteix a considerar assolit allò que es vol construir o demostrar i estudiar-ne les implicacions fins arribar a un resultat conegut o bé a un de fals, en què l'última possibilitat implicaria que la construcció és impossible o que el resultat a demostrar és fals. L'assoliment del resultat conegut portaria al procés de síntesi consistent a refer en ordre invers el camí de l'anàlisi, per establir finalment la construcció o proposició plantejada.

Així a Papos [iii] llegim:

> El camp de l'anàlisi, tal com el concebo, fill meu Hermodor, és la matèria particular de la qual disposen aquells que, desprès d'haver adquirit els elements vulgars, volen extreure d'entre les línies el poder de resoldre els problemes que els són proposats. És seguint la via de l'anàlisi i la síntesi que aquesta matèria ha sigut tractada per tres homes: Euclides, autor dels *Elements*, Apol·loni de Perga i Aristeu el Vell. Així l'anàlisi és la via que parteix de la cosa buscada, considerada com a obtinguda, per arribar mitjançant les conseqüències que se'n dedueixen a la síntesi d'allò que s'ha admès. Efectivament, suposant dins l'anàlisi que la cosa buscada és obtinguda, es considera allò que deriva d'aquesta cosa i allò que la precedeix, fins que tornant sobre les pròpies passes s'arriba a una cosa ja coneguda o que cau en l'ordre dels principis; i s'anomena aquesta via l'anàlisi en tant que constitueix el camí invers de la solució. A la síntesi, contràriament, suposant la cosa percebuda per l'anàlisi com a obtinguda, i disposant les seves conseqüències i causes en el seu ordre natural, referint les unes a les altres, s'arriba finalment a construir la cosa buscada; i és això el que anomenem síntesi.
>
> Hi ha dues classes d'anàlisi aquella que és pròpia de la recerca, la qual s'anomena teorètica, i aquella que s'aplica a trobar allò que es proposa, la qual s'anomena problemàtica.

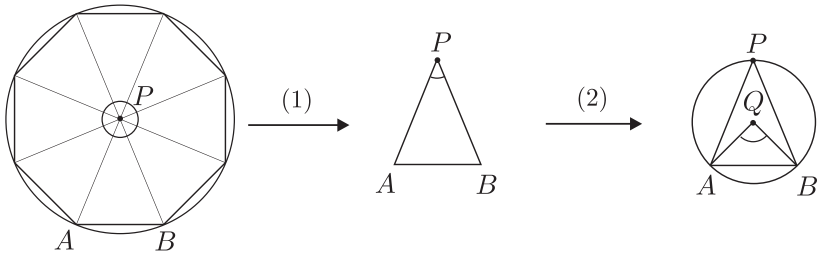
En la classe teorètica es considera establert i verdader el que es cerca, després, per les conseqüències que se'n dedueixen, admeses com a verdaderes i responent a la hipòtesi, s'arriba a una cosa ja acordada; i si aquesta cosa acordada és verdadera, allò que es busca també és verdader, i la demostració serà la inversa d'aquesta anàlisi; mentre que si s'arriba a una cosa acordada que és falsa, allò que es busca també serà fals. D'altra banda, en la classe problemàtica s'admet la proposició coneguda, i després, mitjançant les conseqüències que se'n dedueixen i que s'admeten com a verdaderes, s'arriba a qualsevol cosa acordada; i si això que s'acorda pot ser realitat o ja està adquirit (allò que els matemàtics anomenen donat), la proposició també podrà ser realitzada, i la demostració serà novament la inversa de l'anàlisi; mentre que si descansa sobre qualsevol cosa acordada la qual és impossible, el problema també serà impossible.

3. Un exemple d'anàlisi geomètrica

Problema de construcció: Donat un segment AB construïu un octàgon regular de costat AB.

• **Anàlisi**: Farem una anàlisi que conduirà a la construcció de la circumferència circumscrita a l'octàgon.

Suposem el problema resolt i sigui P el centre de l'octàgon. Implicacions:



(1) $\angle APB = \dfrac{360°}{8} = 45°$.

(2) Si considerem la circumferència circumscrita al triangle $\triangle APB$ i anomenem Q el seu centre, tenim $\angle AQB = 2 \cdot 45° = 90°$.

L'anàlisi s'ha acabat perquè el triangle $\triangle AQB$ és de construcció coneguda a partir de la circumferència de diàmetre AB.

• **Síntesi i construcció:** L'octàgon regular de costat AB és l'octàgon circumscrit a la circumferència de centre el punt P intersecció de la circumferència (Q, QB) amb la mediatriu s de AB, perquè $PA = PB$ i $\angle APB = \dfrac{\angle AQB}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

Etapes de la construcció:

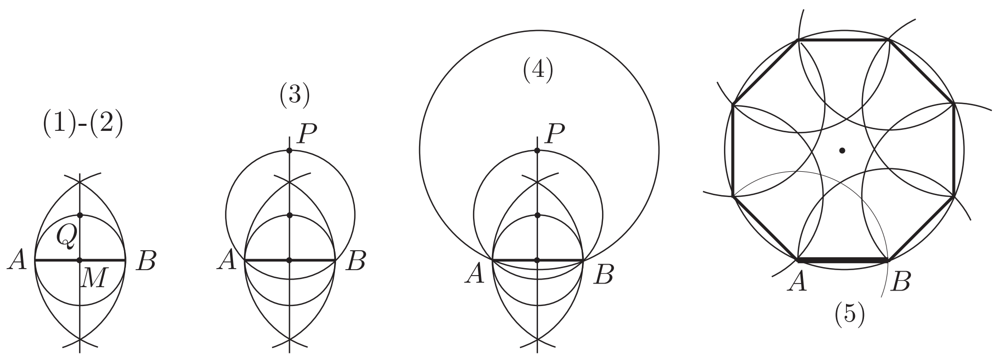
(1) Mediatriu s del segment AB. En resulta el punt mitjà M de AB.

(2) Punt d'intersecció Q de la recta s i la circumferència (M, MB).

(3) Punt d'intersecció P de la recta s amb la circumferència (Q, QB).

(4) Circumferència (P, PB). (Aquesta és la circumferència circumscrita a l'octàgon)

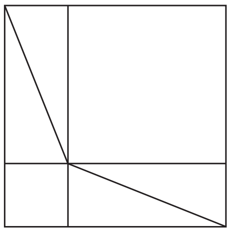
(5) Costats de l'octàgon a partir del segment AB i la circumferència (P, PB), a partir de la seva divisió en vuit parts mitjançant el transport del segment AB.

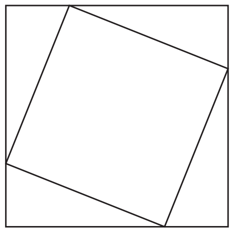


EC.2 Teorema de Pitàgores

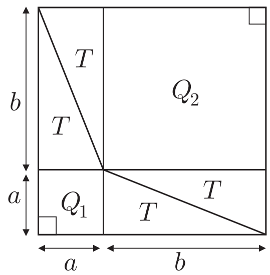
1. Una demostració per dissecció.

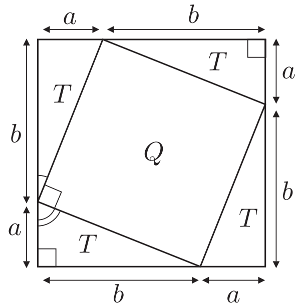
En els dos gràfics adjunts hem partit dos quadrats iguals en triangles i quadrilàters de manera que els segments determinats sobre els costats són únicament de dos tipus. Tots els més curts són iguals entre si i els més llargs també.





Si observem les figures es pot establir el teorema de Pitàgores comparant les àrees dels triangles i quadrilàters que hi apareixen.





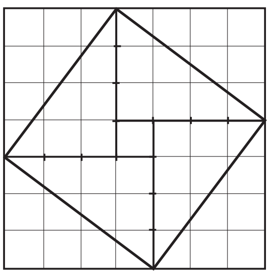
– Els quadrilàters Q_1 i Q_2 són quadrats i els triangles T són rectangles. D'això se'n pot fer una activitat de demostració rigorosa a partir de les dades inicials d'igualtat dels dos tipus de segments determinats sobre els costats del quadrats. Serviria per fer una revisió dels criteris d'igualtat de triangles, de les relacions entre els angles determinats per dues paral·leles i una secant i per a la caracterització de paral·lelograms.

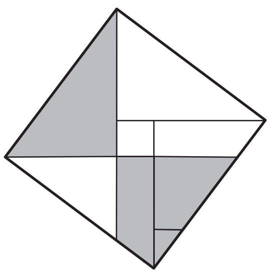
– El quadrilàter Q té els costats iguals, perquè els triangles T són congruents. A més, cadascun dels seus angles és el suplementari de dos angles complementaris del triangle T, per tant és recte. Per tant, Q és un quadrat.

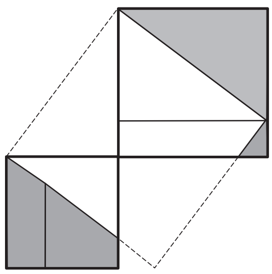
Finalment, $\left\{\begin{array}{r} 4\cdot \text{àrea}\,(T) + \text{àrea}\,(Q_1) + \text{àrea}\,(Q_2) = 4\cdot \text{àrea}\,(T) + \text{àrea}\,(Q) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \text{àrea}\,(Q_1) + \text{àrea}\,(Q_2) = \text{àrea}\,(Q). \end{array}\right.$

- **Un apunt històric sobre el mètode de dissecció**

No es coneix l'autor de la demostració anterior i es relaciona amb l'estil de presentació que es troba en el *Zhoubi Suanging.*[7] Allí es presenta teorema *gou-gu*, de Pitàgores, mitjançant el diagrama adjunt de la part esquerra sense comentari, en el cas particular de costats 3, 4 i 5.





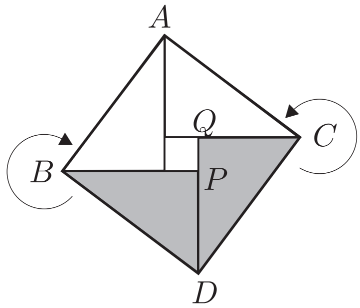


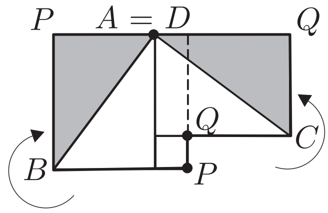
[7] Trobem dues traduccions de *Zhoubi Suanging*, vegeu MARTZLOFF 1987 i LI YAN–DU SHIRAN [1963]. La primera és *Cànon de càlculs gnonòmics de la dinastia Zhou*, —s'entén "cànon" com a conjunt de regles—. L'altra és *L'Aritmètica clàssica del gnòmon i de les trajectòries circulars del Cel*, les dues justificades sobre la doble accepció del mot "zhou", el qual es pot referir a la dinastia Zhou, però també té el significat de perímetre. Aquesta obra és de difícil datació i és representativa, junt amb el *Jiuzhang Suanshu* o *Els nou capítols sobre l'art matemàtic*, del desenvolupament de la matemàtica xinesa en el període XI aC – II dC.

Si actuem sense cap experiència podem comprovar la veritat del teorema, fent intents més o menys complicats com els retalls presentats a la part central i dreta de la figura.

El matemàtic indi Bhaskara [XII] suggereix quelcom de semblant, però més simple, en el diagrama semblant al xinès que se li atribueix, on afegeix com a únic comentari la paraula «contempleu».[8] Només cal considerar la part del diagrama inclosa entre els vèrtexs del quadrat $ABCD$.

Si fem girar BPD, amb centre B, un angle de 90° [o −270°], i CQD, amb centre C un angle de −90° [o 270°], obtenim la superfície del quadrat de costat AB com a suma de les superfícies dels quadrats de costats, respectivament, BP i QC.





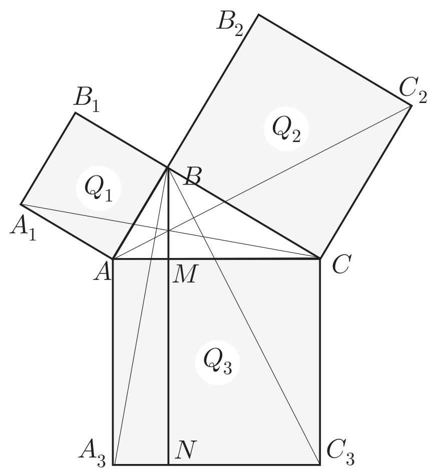
2. La demostració en els *Elements* d'Euclides.

El teorema de Pitàgores era conegut de totes les civilitzacions de l'Orient, en èpoques anteriors o contemporànies a la civilització grega del temps de Pitàgores [VI aC]. L'únic dubte es presenta en el cas d'Egipte, en el qual no tenim constància escrita d'aquest coneixement. Presentem una versió de la demostració que es troba en el teorema I.47 dels *Elements* d'Euclides [c.300 aC].[9]

Presentació d'Euclides. Parteix el quadrat construït sobre la hipotenusa en dos rectangles determinats per l'altura del triangle des de l'angle recte; llavors demostra que les àrees d'aquests rectangles són iguals a les de cadascun dels quadrats construïts sobre els catets.

Concretament, l'enunciat i el seu desenvolupament són més o menys així:

> En els triangles rectangles el quadrat sobre el costat que subtendeix l'angle recte és igual als quadrats sobre els costats que formen l'angle recte.



Considera el triangle rectangle $\triangle ABC$, els quadrats $Q_1 = \square AB_1$ i $Q_2 = \square BC_2$ sobre els catets AB i BC, i el quadrat $Q_3 = \square AC_3$ sobre la hipotenusa AC. Llavors

a) $\text{àrea}\,(\square Q_1) = 2 \cdot \text{àrea}\,(\triangle A_1AC)$.
b) $\text{àrea}\,(\triangle A_1AC) = \text{àrea}\,(\triangle BAA_3)$.
c) $\text{àrea}\,(\text{▯} A_3M) = 2 \cdot \text{àrea}\,(\triangle BAA_3)$.
d) $\text{àrea}\,(\square Q_1) = \text{àrea}\,(\text{▯} A_3M)$.
e) $\text{àrea}\,(\square Q_2) = \text{àrea}\,(\text{▯} C_3M)$.

Per tant,

$$\text{àrea}\,(\square Q_1) + \text{àrea}\,(\square Q_2) = \text{àrea}\,(\text{▯} A_3M) + \text{àrea}\,(\text{▯} C_3M) = \text{àrea}\,(\square Q_3)\,.$$

[8] Segons PLOFKER [2007], en el *Bījaganita*, —càlcul amb quantitats indeterminades—, es troba el verset que origina aquesta atribució.

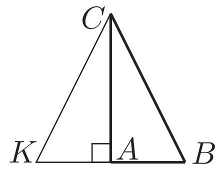
[9] Per a tots els teoremes que citem dels *Elements*, utilitzem indistintament qualsevol de les traduccions dEUCLIDES [c.300 aC].

Justificació:

a) Per tenir la mateixa base AA_1 i la mateixa altura AB.
b) Pel criteri de congruència de triangles C-A-C.
c) Per tenir la mateixa base A_3A i la mateixa altura AM.
d) En ser de superfície doble que els triangles congruents $\triangle A_1AC$ i $\triangle BAA_3$ citats.
e) Per les mateixes raons anteriors sobre els triangles i rectangles de la part dreta.

- **Recíproc del teorema** establert a la proposició I.48 .

  Si en un triangle ABC el quadrat sobre un dels costats BC és igual als quadrats sobre els altres dos costats AB i AC del triangle, l'angle format per aquests dos costats del triangle és recte.



L'estratègia d'Euclides consisteix en construir un triangle rectangle $\triangle ADC$ a partir del triangle $\triangle ABC$ donat, i demostrar que els dos són congruents amb el criteri C–C–C de congruència de triangles.
Desenvolupament:

a) Construeix una perpendicular a AC en A.
b) Considera el punt K, sobre AC, tal que $AK = AB$.
c) Llavors $KC = BC$, perquè $\triangle KAC$ és un triangle rectangle i

$$KC^2 = AK^2 + AC^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2 \Longrightarrow KC = BC$$

d) Per tant $\angle CAB = 90°$, en ser $\triangle AKC$ i $\triangle ABC$ triangles congruents pel criteri C–C–C.

EC.3 Equació de segon grau

Un cop vist que hi ha problemes que són susceptibles de tractament amb equacions de segon grau, es tracta d'introduir l'estudi de la seva resolució amb exercicis de dificultat creixent. Així s'intentarà d'arribar d'una manera més o menys natural al mètode compleció de quadrats i, en una segona fase, fer-ne l'aplicació per trobar la fórmula de resolució amb radicals per als casos més generals.

1. Compleció de quadrats a partir d'exercicis

Es proposa de començar amb l'atac d'equacions similars a les que proposarem a continuació. En els moments convenients es demanaran arguments sobre les conclusions dels alumnes i s'introduirà la conveniència en utilitzar alguna de les identitats notables.

a) $x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0.$

b) $x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2$ o bé $x = -2.$

c) $(x+2)^2 = 0 \Longrightarrow x+2 = 0 \Longrightarrow x = -2.$

d) $(x+2)^2 = 9 \Longrightarrow x+2 = \pm 3 \Longrightarrow x = -2 \pm 3 = \begin{cases} -2 \\ 3. \end{cases}$

e) $(x+2)^2 = 5 \Longrightarrow x+2 = \pm\sqrt{5} \Longrightarrow x = -2 \pm \sqrt{5} = \begin{cases} -2+\sqrt{5} \approx 0.236 \\ -2-\sqrt{5} \approx -4.236\,. \end{cases}$

f) $(x-4)^2 - 36 = 0 \Longrightarrow (x-4)^2 = 36 \Longrightarrow x-4 = \pm 6 \Longrightarrow x = 4 \pm 6 = \begin{cases} 10 \\ -2. \end{cases}$

g) $x^2 - 8x - 20 = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \left(x - \boxed{?}\right)^2 - \boxed{?} = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} (x-4)^2 - 16 - 20 = 0 \overset{(**)}{\Longrightarrow} \cdots x = \begin{cases} 10 \\ -2. \end{cases}$

(∗) Aquest passos requereixen molta atenció, orientació i discussió. Se situarà en el marc de la identitat del quadrat d'una diferència (o suma) i el seu objectiu serà el d'eliminar allò que en dificulta la resolució, l'existència de part lineal.
(∗∗) A partir d'aquest punt és igual que l'exercici anterior.

h) $6x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 - \frac{x}{6} - \frac{1}{3} = 0 \Longrightarrow \left(x - \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{144} - \frac{1}{3} = 0 \Longrightarrow \left(x - \frac{1}{12}\right)^2$

$$= \frac{49}{144} \Longrightarrow x - \frac{1}{12} = \pm\frac{7}{12} \Longrightarrow x = \frac{1}{12} \pm \frac{7}{12} = \begin{cases} \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

i) $x^2 + 2x + 4 = 0 \Longrightarrow (x+1)^2 - 1 + 4 = 0 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow x = -1 \pm \sqrt{-3} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ No existeix solució real.

j) Finalment caldrà remarcar el fet que, a més de les primeres equacions proposades que tenien solució immediata, hi ha equacions amb part lineal no nul·la que també admeten un tractament més simple. Es tracta de les equacions amb terme independent igual a zero. Només cal suggerir l'ús de la propietat distributiva amb l'extracció de factors comuns.

$$6x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow 2x(3x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ o bé } 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{3}\,. \end{cases}$$

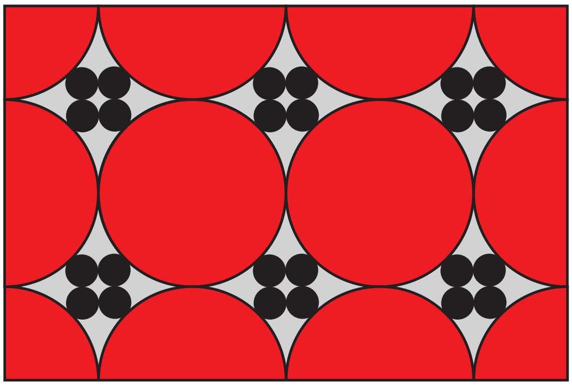
2. Fórmula de resolució amb radicals

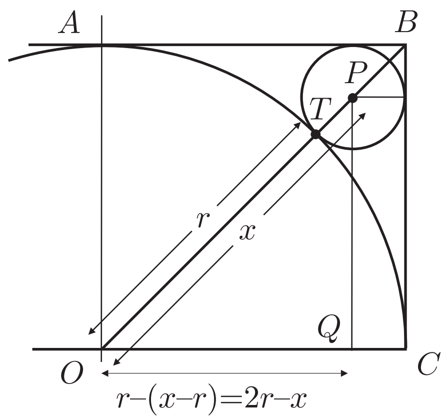
Considerem l'equació $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$. Es tracta de proposar el seguiment exacte de les etapes del mètode de compleció practicat en els exercicis anteriors.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
&\Longrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&\Longrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

3. Un problema d'aplicació

Construcció d'una rajola per al mosaic de la figura, de la qual tenim un esquema a la part dreta.





Considerem la unitat de mesura de longituds igual a r. Llavors, pel teorema de Pitàgores aplicat sobre el triangle $\triangle OQP$, tenim

$$x^2 = (2-x)^2 + (2-x)^2 \Longleftrightarrow x^2 = 2(2-x)^2 \Longleftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0.$$

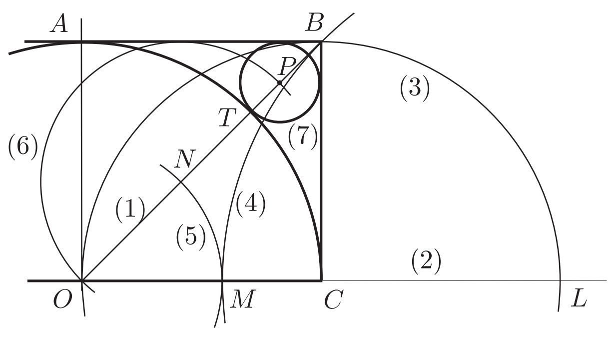
Es pot fer una resolució alternativa, mitjançant l'extracció d'arrels, de la que obtenim

$$x = \sqrt{2}(2-x) \Longleftrightarrow (1+\sqrt{2})x = 2\sqrt{2} \Longleftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Podem optar per aquesta via si ens interessa tractar la qüestió de la racionalització d'expressions amb radicals. Si no és el cas, (per exemple a 3r d'ESO), evitem la racionalització amb la resolució mitjançant l'equació de segon grau de més amunt.

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-32}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 4 + 2\sqrt{2} \\ \boxed{4 - 2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

De la solució emmarcada s'obté una construcció força senzilla de la figura que podeu estudiar en la figura adjunta seguint els passos que indica la numeració de l'1 al 7.



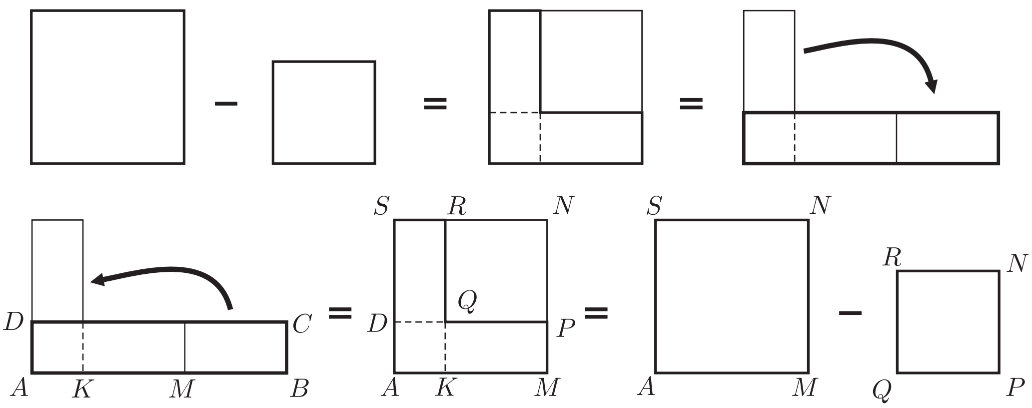
4. Tractament geomètric de les equacions de segon grau

Es pot fer un tractament des de la geometria de les equacions de segon grau i es pot debatre si això pot guiar una pràctica pedagògica prealgèbrica. Algunes fonts de la història antiga ens poden orientar en aquesta direcció. En aquests últims anys hi ha hagut canvis en la historiografia de la matemàtica mesopotàmica. Sembla ser que els algoritmes que resolen problemes concrets de segon grau en les tauletes del període antic (2000aC – 1500aC) tenen més a veure amb un tractament geomètric que numèric, en front de la interpretació estàndard de la primera meitat del segle XX que apuntava cap a un tractament numèric.[10] Si anem a la Grècia dels primers geòmetres, les investigacions teòriques sobre alguns problemes d'aplicació i comparació d'àrees proporcionen solucions que traduïdes al llenguatge modern de l'àlgebra equivalen a mètodes generals de resolució d'equacions de segon grau. Proposarem un problema de geometria que traduït a la nostra àlgebra es resol en una equació de segon grau, i del qual presentarem una resolució geomètrica.

- **Problema:** Els costats d'un rectangle es diferencien en dues unitats, i la seva àrea mesura dues unitats quadrades. Volem calcular els seus costats.

Des de les lectures de les fonts clàssiques,[11] podem desenvolupar una manera geomètrica d'actuar que ens portarà a la solució. Aquest desenvolupament, traduït al nostre llenguatge algèbric proporcionarà un algoritme de resolució d'equacions de segon grau.

Partim del fet clau que conèixer els dos costats d'un rectangle implica conèixer dos quadrats amb diferència de superfícies igual a la superfície del rectangle. Efectivament, ho podem provar si pensem la qüestió a l'inrevés: presentem la diferència de dos quadrats com un rectangle. En la figura adjunta podem veure els dos processos:



Llavors, en el nostre problema, observem que si AC és el rectangle de l'enunciat:

- AD és un costat desconegut i l'altre costat és $AB = AK + KB = AD + 2$.
- El punt mitjà de KB és M i $KM = MB = 1$.
- El quadrat petit QN té costat $QP = KM = 1$ i àrea $1 \cdot 1 = 1$.
- El quadrat gran AN té costat $AS = AD + 1$ i la seva àrea és la suma de la del gnòmon $AMPQRS$, —o la del rectangle AC—, i la del quadrat petit. És a dir, $2 + 1 = 3$.

Conclusió: En el quadrat gran AN, $AM = \sqrt{3}$ i en el rectangle inicial AC, $AB = 1 + \sqrt{3}$ i $AD = \sqrt{3} - 1$.

Traducció al llenguatge algèbric de tot el procés:

$$x = AD \Longrightarrow x^2+2x = 2 \Longrightarrow (x^2+2x)+1 = 3 \Longrightarrow (x+1)^2 = 3 \Longrightarrow x+1 = \sqrt{3} \Longrightarrow x = \sqrt{3}-1.$$

[10] Vegeu Høyrup [2002].

[11] En la tauleta BM 13901, Robson [2007], del període antic babiloni trobem 24 models de solució de problemes d'àlgebra de segon grau. En les proposicions II.5, II.6, II.11, II.14, VI.28 i VI.29 dels *Elements* d'Euclides trobem eines per al tractament geomètric de problemes equivalents a la resolució d'equacions de segon grau.

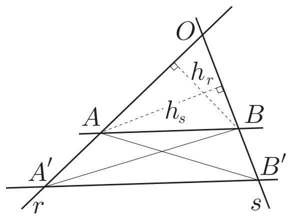
EC.4 Teorema de Tales. Semblança i trigonometria

Els apartats sense contingut o tractament trigonomètric han estat experimentats des del segon curs d'ESO fins a quart curs d'ESO, amb les adaptacions necessàries segons els nivells dels alumnes. Quant als continguts trigonomètrics s'adapten a la introducció que es fa a quart d'ESO.

1. Teorema de Tales

Donades dues rectes r i s secants en el punt O, i els punts A, A' sobre r i B, B' sobre s, es compleix l'equivalència:

$$AB \text{ i } A'B' \text{ paral·leles} \iff \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}.$$



Demostració:

$\Longrightarrow$) L'estratègia de la prova passa per relacionar les raons entre segments amb raons entre àrees, que siguin fàcils de comparar.[12] Traçarem els segments AB' i BA', i tindrem en compte que les àrees de ABA' i BAB' són iguals, en compartir un mateix costat AB, i una mateixa altura sobre aquest costat, —la distància entre les paral·leles AB i $A'B'$—.

$$\begin{aligned}\frac{OA}{OA'} &= \frac{\frac{1}{2}OA\cdot h_r}{\frac{1}{2}OA'\cdot h_r} = \frac{\text{àrea}\,(OBA)}{\text{àrea}\,(OBA')} = \frac{\text{àrea}\,(OBA)}{\text{àrea}\,(OBA)+\text{àrea}\,(ABA')} = \\ &= \frac{\text{àrea}\,(OAB)}{\text{àrea}\,(OAB)+\text{àrea}\,(BAB')} = \frac{\text{àrea}\,(OAB)}{\text{àrea}\,(OAB')} = \frac{\frac{1}{2}OB\cdot h_s}{\frac{1}{2}OB'\cdot h_s} = \frac{OB}{OB'}\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Si es dóna la proporcionalitat entre segments tenim:

$$\begin{aligned}\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \implies \frac{\text{àrea}\,(OBA)}{\text{àrea}\,(OBA')} = \frac{\text{àrea}\,(OAB)}{\text{àrea}\,(OAB')} &\implies \text{àrea}\,(OBA') = \text{àrea}\,(OAB') \implies \\ &\implies \text{àrea}\,(ABA') = \text{àrea}\,(BAB').\end{aligned}$$

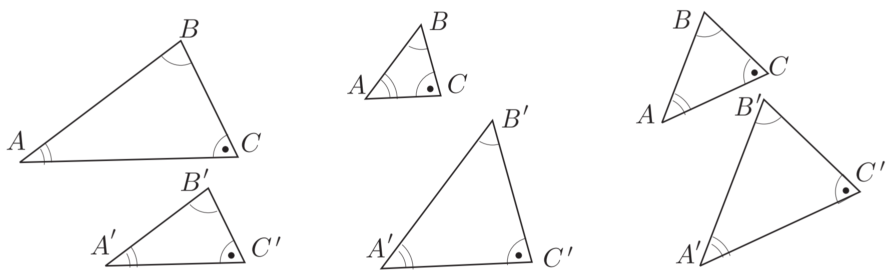
Llavors, els triangles ABA' i BAB' tenen la mateixa altura i, per tant, AB i $A'B'$ són paral·leles.

2. Semblança de triangles

Anomenem *triangles semblants*, els triangles tals que els angles d'un d'ells són iguals als de l'altre. Llavors, a partir del teorema de Tales es poden demostrar els criteris de semblança següents:

- Dos triangles són semblants si i només si tenen dos costats proporcionals i l'angle que aquests costats determinen igual.
- Dos triangles són semblants si i només si tenen els tres costats proporcionals.

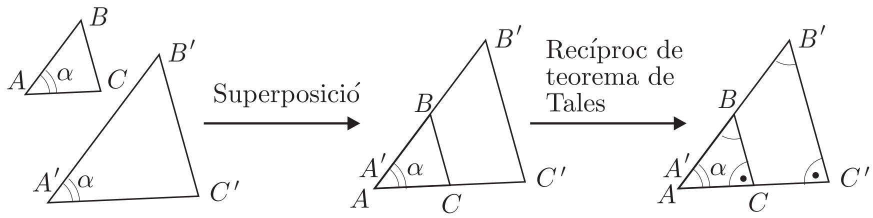
Així, en la figura adjunta, les parelles de triangles que si presenten són semblants.



[12] Aquesta és l'estratègia a d'Euclides en el teorema VI.2 dels *Elements*.

Quant a la demostració dels dos criteris, il·lustrem com es pot actuar amb la presentació de la prova del cas recíproc del primer d'ells. És a dir que, si dos triangles tenen dos costats proporcionals i l'angle que determinen aquests costats és el mateix, llavors tots els angles són iguals.

Suposem, a la figura adjunta, que els triangles ABC i $A'B'C'$ considerats compleixen $\widehat{BAC} = \alpha = \widehat{B'A'C'}$ i $AB/A'B' = AC/A'C'$.



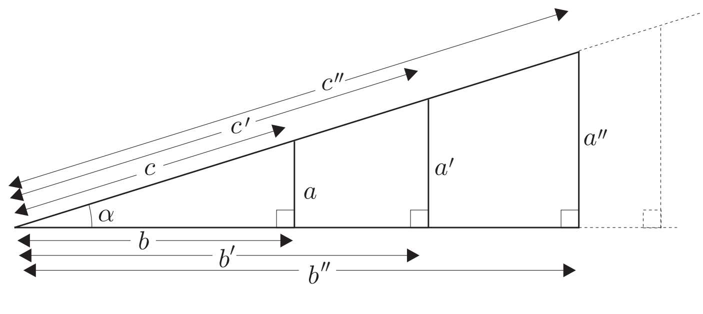
Podrem traslladar ABC sobre $A'B'C'$ de manera que coincideixin, per superposició, els angles α. Així el vèrtex A caurà sobre el vèrtex A', el costat AB sobre el costat $A'B'$, i el costat AC sobre el $A'C'$. Llavors, pel recíproc del teorema de Tales, tenim que els segments BC i $B'C'$ són paral·lels. Per tant, es compleixen les igualtats d'angles:

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \qquad \text{i} \qquad \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}\,.$$

la qual cosa és la que preteníem demostrar.

3. Les raons trigonomètriques dels angles aguts

L'observació de les relacions entre els costats dels triangles rectangles semblants, permet d'establir unes raons invariants en aquests triangles. Concretament, en la col·lecció de triangles rectangles semblants de la figura adjunta s'observa que si mantenim l'angle α constant:



$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}\,,\frac{a}{a''} = \frac{c}{c''}\,\cdots \implies \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''} = \cdots = \text{constant}$$
$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\,,\frac{b}{b''} = \frac{c}{c''}\,\cdots \implies \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} = \cdots = \text{constant}$$
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}\,,\frac{a}{a''} = \frac{b}{b''}\,\cdots \implies \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \cdots = \text{constant}$$

Llavors, aquesta invariància de quocients, estableix la seva independència respecte de la grandària dels costats i legitima les definicions següents per a un angle α agut, en un triangle rectangle.

$$\text{sinus}(\alpha) = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}\,, \quad \text{cosinus}(\alpha) = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}\,, \quad \text{tangent}(\alpha) = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}\,.$$

Aquests tres quocients reben el nom de *raons trigonomètriques* de l'angle α, i es representen mitjançant les notacions $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i $\tan\alpha$.

La importància d'aquestes raons de cara al tractament de problemes geomètrics va ser advertida molts segles enrere. Els seus valors per als diferents angles van ser calculats i emmagatzemats en llargues llistes de taules. Avui en dia els podem obtenir de les calculadores científiques, en les quals els programadors han implementat algoritmes que proporcionen aquests valors amb una gran velocitat.

4. Les raons trigonomètriques inverses

També s'utilitzen les raons trigonomètriques inverses *secant*, *cosecant* i *cotangent*. Es defineixen:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

5. Quatre identitats

Considerem el triangle rectangle de catets a i b, i hipotenusa c. Sigui α és l'angle oposat al catet a. Presentem quatre identitats amb les seves demostracions:

– $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$.[13] Això és immediat pel teorema de Pitàgores, perquè:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

– $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$. Perquè $\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a/c}{b/c} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

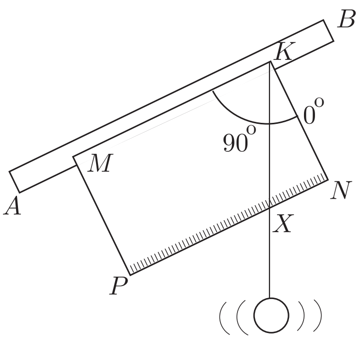
– $\boxed{1+\tan^2\alpha = \sec^2\alpha}$. Perquè $1+\tan^2\alpha = 1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$.

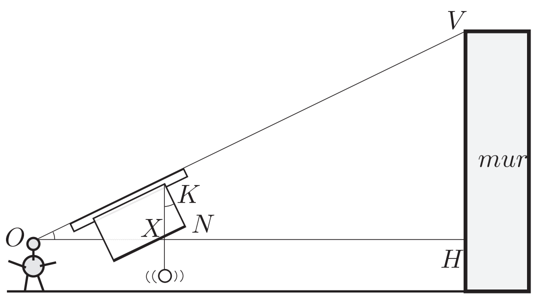
– $\boxed{1+\operatorname{cotan}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha}$. Perquè $1+\operatorname{cotan}^2\alpha = 1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} =$
$= \operatorname{cosec}^2\alpha$.

6. Exemple pràctic per comparar mètodes

Una estratègia per resoldre el problema de mesurar distàncies o altures de llocs inaccessibles es basa en la consideració de triangles semblants. Construirem un "quadrant" que ens ajudarà en aquest problema. Aquest es compon de:

– Un llistó de fusta AB, (llargària entre 35 i 45 cm).
– Un cartó rígid o fullola $MPKN$ de forma rectangular (15×25 cm). El costat MK segueix la direcció del llistó, i els costats KN i MP li seran perpendiculars. Sobre KN anirà escrita la mesura del costat, i sobre NP s'establirà una graduació mil·limètrica assignant a N el valor 0. També s'establirà una graduació angular de 90° sobre un quart de circumferència de centre K, assignant a KN el valor 0° i seguint l'orientació horària.
– Una plomada penjada del vèrtex K.





[13]Les notacions $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, etc., són les expressions abreujades de $(\sin\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$, etc.

a) Observeu el gràfic adjunt en què l'observador O col·loca el quadrant amb el llistó AB, seguint la direcció del raig visual, dirigit al capdamunt del mur que té davant. Justifiqueu que els triangles KNX i OHV són semblants.

b) Trobeu la fórmula que dóna l'alçada del mur utilitzant la informació de l'apartat anterior.

c) Calculeu l'alçada d'una habitació en què $KN = 15$ cm, $XN = 6$ cm, $OH = 5$ m i l'alçada del punt de mira de l'observador és 1.70 m.

d) Feu el càlcul per a una habitació en què $OH = 4.5$ m i $\measuredangle NKX = 23°$ i l'alçada de l'observador és 1.70 m.

e) Si entre l'observador O i el peu d'un mur H que voleu mesurar hi hagués un obstacle que us impedís mesurar la distància OH, com ho podríeu fer per trobar l'alçada del mur? (Podeu allunyar-vos del mur.)

- Resolució:

a) Els triangles KNX i OHV són semblants perquè $\widehat{NKX} = \widehat{VOH}$, en ser angles aguts de costats perpendiculars, i $\widehat{KNX} = \widehat{OHV} = 90°$.

b) En ser els triangles KNX i OHV semblants, els seus costats són proporcionals. Per tant,

$$\frac{HV}{NX} = \frac{OH}{KN} \Longrightarrow HV = \frac{OH \cdot NX}{KN},$$

i l'alçada del mur resultarà de sumar HV a l'alçada de l'observador.

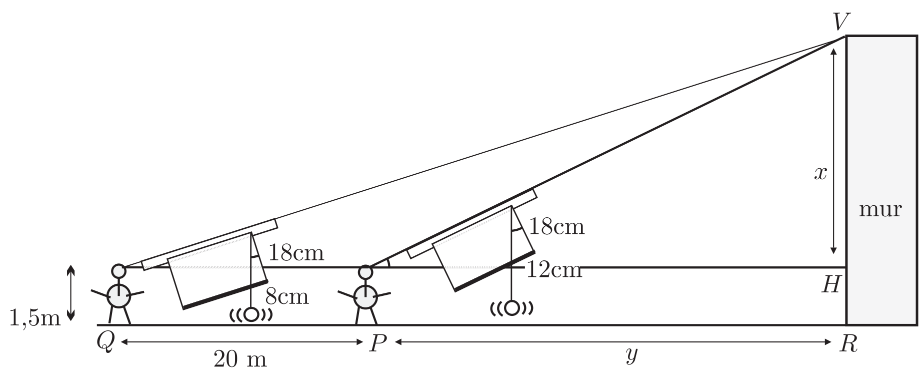
c) Considerem que la paret de l'habitació juga el paper del mur a l'apartat anterior. Llavors,

$$\frac{HV}{6 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ m}}{15 \text{ cm}} \Longrightarrow \text{Alçada} = HV + 1.70 = \frac{6 \cdot 5}{15} + 1.70 = 3.70 \text{ m}.$$

d) En ser l'angle d'elevació conegut podem utilitzar la trigonometria.

$$\tan 23° = \frac{HV}{4.5} \Longrightarrow 1.70 + HV = 1.70 + 4.5 \cdot \tan 23° \approx 3.61 \text{ m}.$$

e) Es podria resoldre prenent mesures des de dos punts d'observació P i Q diferents, de manera que estiguessin alineats amb el peu R de la vertical del mur que passa pel punt V cap on hem dirigit les dues visuals, —vegeu la figura adjunta—.



Tindríem $x = VH$ i $y = PR$ desconeguts, i les dades del quadrant conegudes en les dues posicions P i Q de l'observador, així com l'altura HR d'aquest últim. Si suposem que s'han fet les lectures que figuren en el gràfic, tenim:

$$\frac{x}{8} = \frac{20+y}{18}, \quad \frac{x}{12} = \frac{y}{18} \Longrightarrow x = 26.67 \, \text{m}.$$

Llavors, l'altura del mur, seria de $1.5\,\text{m} + 26,67\,\text{m} = 28.17\,\text{m}$.

Si, en un altre mur, en lloc de fer les lectures anteriors s'haguessin fet les lectures dels angles d'elevació, i aquestes haguessin sigut 35° i 15°, i la distància entre les dues observacions fos de 20 m, la resolució seria:

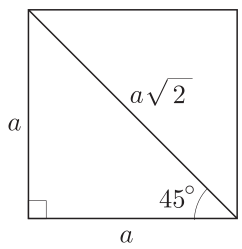
$$\left\{\begin{array}{l} \tan 35^\circ = \dfrac{x}{y} \\ \tan 15^\circ = \dfrac{x}{y+20} \end{array}\right. \Longrightarrow \tan 15^\circ = \frac{y \cdot \tan 35^\circ}{y+20} \Longrightarrow y(\tan 35^\circ - \tan 15^\circ) = 20 \tan 15^\circ \Longrightarrow$$

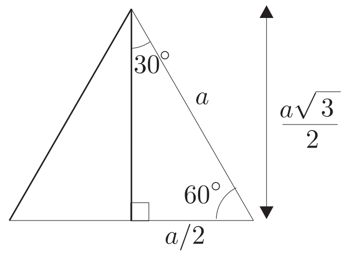
$$\Longrightarrow y = \frac{20 \tan 15^\circ}{\tan 35^\circ - \tan 15^\circ} \Longrightarrow x = \frac{20 \tan 15^\circ \tan 35^\circ}{\tan 35^\circ - \tan 15^\circ} \approx 8.68 \text{ m}$$

L'alçada del mur s'obtindria afegint a aquesta mesura l'altura de l'observador.

7. Raons trigonomètriques que cal recordar

Si en un quadrat tracem una diagonal i en un triangle equilàter tracem una altura, obtenim la configuració d'angles de les figures adjuntes. A més, de l'aplicació del teorema de Pitàgores, s'obtenen les mesures dels costats que s'hi indiquen.





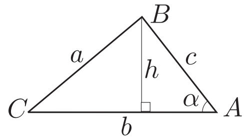
Llavors, en resulten les raons trigonomètriques següents:

$\sin 30^\circ = \dfrac{a/2}{a} = \dfrac{1}{2}$	$\sin 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}/2}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}/2}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 60^\circ = \dfrac{a/2}{a} = \dfrac{1}{2}$
$\tan 30^\circ = \dfrac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 45^\circ = \dfrac{a}{a} = 1$	$\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}/2}{a/2} = \sqrt{3}$

8. Àrea d'un triangle

Sigui ABC el triangle de costats a, b i c. Estudiem una manera alternativa de cercar l'àrea S, amb l'ajut de la trigonometria. Concretament, en funció de dos costats b i c i de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$ que determinen.

$$\left.\begin{array}{l} S = \dfrac{1}{2}\, b \cdot h \\ h = c \cdot \sin\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin\alpha}\,.$$



- **Exemple d'aplicació** Càlcul de l'àrea d'un eneàgon regular inscrit en una circumferència de radi 10 cm.

Resolució:

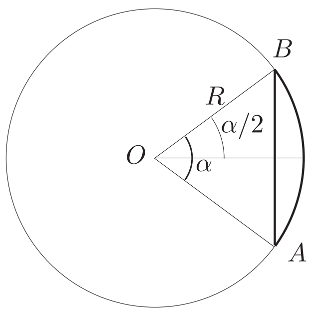
L'eneàgon es pot descompondre en 9 triangles isòsceles de costats iguals de valor 10 cm, els quals formen un angle $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$. Per tant,

$$\text{Àrea} = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 40^\circ \approx 289.25 \text{ cm}^2.$$

9. Apunt històric[14]

La trigonometria entesa com a disciplina que cercava d'establir les relacions entre les mesures de tots els elements d'un triangle, nasqué a Grècia a l'època d'Hiparc [II aC], o potser una mica abans amb Apol·loni [III aC]. Sembla clar que una de les motivacions de la seva aparició, residí en l'intent de crear un model cosmològic racional que expliqués i relacionés els moviments dels astres en la volta celeste, i contribuís a la mesura cada cop més acurada dels fenòmens relacionats, com la durada de les hores de claror, les posicions relatives dels planetes, etc. Aquest intent esdevingué en el món grec, a més tardar, en el segle IV aC, a l'època de Plató. S'elaboraren diferents models i a partir possiblement d'Apol·loni i, de ple, amb Hiparc i Ptolemeu [II dC], per tal de concordar més acuradament aquests models amb les observacions, s'introduïren cercles excèntrics i epicicles per aproximar millor les trajectòries dels astres interiors de l'esfera celeste. En d'altres paraules els moviments d'aquests astres s'explicaven a partir de la composició de trajectòries circulars amb diferents centres. La complexitat que afegia aquesta teoria, contribuí a fer més punyent la necessitat de relacionar les mesures dels angles i els costats dels triangles. Hiparc fou, possiblement, el primer a establir aquesta relació, amb la compilació d'una "taula de cordes", en què es recollien els valors de les cordes determinades per diferents arcs de circumferència. El mateix va fer Menelau en el primer segle de la nostra era, però cap d'aquestes taules s'ha conservat. L'obra més antiga en què podem trobar-ne un model és la *Composició Matemàtica* —o *Sintaxi Matemàtica*— de Ptolemeu, composta de tretze llibres conservats íntegrament.[15] Allí es pot estudiar la seva presentació, així com els procediments geomètrics, —amb les demostracions pertinents—, emprats per elaborar-les.

En aquestes taules, els valors de les cordes corresponents a diferents arcs —o angles centrals— d'una circumferència venien donats en funció del radi. Així, si en la circumferència (O, OA) es considera la corda AB i l'arc $\widehat{AB}$, subtendits per l'angle central $\alpha = \widehat{AOB}$, la taula proporcionava per a cada valor de α la mesura de la corda $AB = \operatorname{crd}(\alpha)$. És a dir, el valor de la corda de l'angle α que proporcionava la taula era $2R\sin(\alpha/2)$, en què R era el radi de la circumferència.



$$AB = \operatorname{crd}(\alpha) = 2R\,\sin(\alpha/2)$$

Per estudiar l'evolució de la trigonometria, a partir de Ptolemeu, hem de traslladar-nos a l'Índia i, més tard, a la civilització àrab. De la mateixa manera que entre els grecs, està lligada amb l'interès per resoldre els problemes pràctics originats per l'astronomia. Però, també, el fet de ser útil per solucionar problemes originats en altres disciplines com la topografia i l'òptica la converteix cada cop en una disciplina més independent i abstracta.[16] A l'Índia trobem una primera innovació en els conceptes bàsics de la disciplina. Això passa a partir del segle IV,

[14] El text d'aquest apartat ha estat extret de Nolla [2006], 230–232 i 258–261.

[15] Vegeu Ptolemeu [II]. Es pot despenjar de la plana web gallica.bnf.fr.

[16] El breu apunt que presentem en aquesta secció pot ser ampliat a partir, entre d'altres, de Bag [1979], 229-285, Berggren [1986], 127-156, Cajori [1928–29], 142-179, Gheverghese [1991], 379-388 i 453-462 de l'edició de 1996, i Youschkevitch [1976], 131-150.

en què en els Siddhanta es presenta per primera vegada l'estudi de la relació entre la meitat d'un arc 2α donat i la meitat de la corda d'aquest arc. Aquesta semicorda rebia el nom de *jya–ardha* o "corda meitat", el qual s'abreujà a *jya* o també *jiva*.

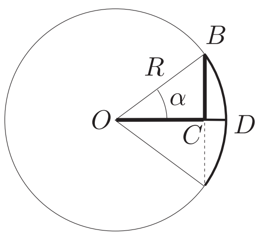
Aquesta nova relació és equivalent a la que ofereix la funció sinus, amb la correcció del factor R igual al radi de la circumferència. Així tenim la nova relació

$$\text{semicorda}\,(\alpha) = R \cdot \sin\alpha\,.$$

Posteriorment els àrabs, per anomenar la semicorda, conservaren la forma "jiva", amb la circumstància que el seu significat en aquest idioma era el de plec, pit o badia. Els traductors Gerard de Cremona i Robert de Chester, en el segle XII, la van convertir en la paraula, de significat equivalent en llatí, *sinus*. Finalment, Edmund Gunter [1581–1621] professor d'astronomia a Londres li va assignar la notació *sin*. A la trigonometria índia, també trobem les noves relacions

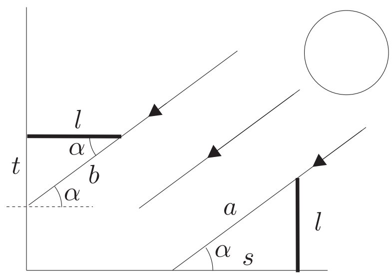
- *kojya* (α), equivalent a $R\cos\alpha$.
- *ukramajya* (α), equivalent a $R(1-\cos\alpha)$.

Els matemàtics àrabs begueren de les fonts índies, —els Siddantha havien estat traduïts a l'àrab en el segle VIII—, i de les fonts gregues, —existien traduccions de l'*Almagest*, en el segle IX, i de les *Esfèriques* de Menelau—. Així, dels primers incorporaren les noves relacions trigonomètriques. La relació *kojya* (α) rebia el nom de "sinus del complement de l'arc", i *ukramajya* (α) el de "sinus inclinat" en la direcció de la fletxa entre l'arc i la corda. La traducció llatina d'aquesta última era *sinus versus*, o sinus vers o inclinat. Moltes vegades per distingir-los clarament, escrivien *sinus rectus*, o sinus recte, per designar el sinus.



BC = sinus recte(α) = R · sinus(α)
CD = sinus vers(α) = R · (1− cosinus(α))
OC = sinus del complement(α) = R · cosinus (α)

Els àrabs adquiriren dels grecs tots els coneixements sobre triangles plans i esfèrics, i els ampliaren. També introduïren noves relacions trigonomètriques. En temps d'Al-Huwarizmi trobem l'"ombra" i l'"ombra invertida" d'un angle α, traduïdes al llatí com *umbra recta* i *umbra versa*. La primera era la longitud de l'ombra s d'un gnòmon l situat perpendicularment al terra horitzontal, i la segona era l'ombra t, sobre una paret vertical, d'un gnòmon l situat perpendicularment sobre aquesta. L'angle α era l'angle d'inclinació dels raigs del Sol respecte del pla horitzontal.



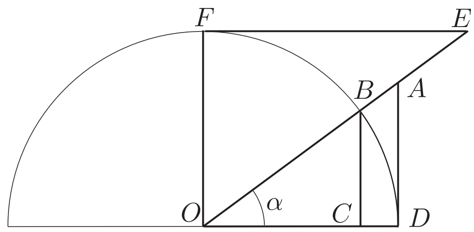
Es pot veure que aquestes eren les relacions equivalents a les nostres cotangent i tangent,

$$\begin{aligned}\text{umbra recta}\,(\alpha) &= s = l\cdot\cot\alpha\\ \text{umbra versa}\,(\alpha) &= t = l\cdot\tan\alpha.\end{aligned}$$

També s'introdueixen en el segle IX, el "diàmetre a de l'ombra" sobre el gnòmon vertical, equivalent a la cosecant, i el "diàmetre b de l'ombra invertida" sobre el gnòmon horitzontal, equivalent a la secant.

$$\begin{aligned} \text{diàmetre de l'ombra}\,(\alpha) &= s = l \cdot \csc\alpha \\ \text{diàmetre de l'ombra invertida}\,(\alpha) &= t = l \cdot \sec\alpha. \end{aligned}$$

Abu'l-Wafa, en el segle X defineix les línies trigonomètriques a partir del cercle, deixant de banda els gnòmons i, per exemple, presenta la tangent trigonomètrica sobre una recta tangent a la circumferència.[17] Així, si representem totes les línies trigonomètriques citades, amb els noms actuals, sobre una circumferència de radi unitat, tenim el gràfic adjunt de fàcil justificació.



$BC = \text{sinus}(\alpha)$
$OC = \text{cosinus}(\alpha)$
$DA = \text{tangent}(\alpha)$
$FE = \text{cotangent}(\alpha)$
$OA = \text{secant}(\alpha)$
$OE = \text{cosecant}(\alpha)$

Abu'l-Wafa també proporciona taules del sinus, cosinus i tangent per al radi igual a 1, les quals consegüentment proporcionen els valors per a les funcions trigonomètriques tal com es consideren actualment, sense necessitat del factor de correcció igual al radi R. Cal destacar la importància de l'existència de taules de tangents i cotangents de cara a la simplificació dels càlculs.

Per acabar aquesta secció citem que els noms tangent i secant són introduïts per Thomas Fincke el 1583, i el terme cotangent per Edmund Gunter el 1620. Quant a les representacions gràfiques d'aquestes línies com a funcions de l'angle, sembla que es troben per primera vegada en el treball de Roberval [1602–1675] sobre la determinació de l'àrea sota la cicloide. Allí utilitza una corba auxiliar que no es altra que el gràfic del cosinus, la qual no identifica, però si que identifica en el mateix treball la corba del sinus corresponent al primer quadrant.[18]

[17] Vegeu YOUSCHKEVITCH [1976], 134.
[18] Vegeu KATZ [1993] 447-448.

Bibliografia

BAG, A. K.

– [1979] *Mathematics in Ancient and Medieval India*. Chaukhamba Orientalia, Varanasi-Delhi.

BERGGREN, J. L.

– [1986] *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. Springer, New York.

CAJORI, Florian

– [1928–29] *A History of Mathematical Notations*. Open Court Pub. Co., La Salle, Illinois. [Reeditat per Dover, New York, 1993].

EECKE, Paul Ver

– [1933] *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathématique*. Bruges. [Reeditat per Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1982].

EUCLIDES

– [c.300 aC] *Elements*.
–Traducció espanyola a càrrec de María Luisa Puertas amb introducció de Luís Vega, *Elementos*, en tres volums. Gredos, Madrid, 1994.
–HEATH, Sir Thomas [1908]. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Cambridge University Press, Cambridge. [Reeditat per Dover, New York, 1956].
–VERA, Francisco [1970]. *Científicos Griegos*, 2 volums. Aguilar, Madrid.

FOUZ, Fernando

– [2003] «Sangaku: Geometría en los templos japoneses». *SIGMA*, núm 22, 173–190. Departamento de Educación del Gobierno Vasco.
http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/sigma_aldizkaria.html

FOUZ, F. i DONOSTI, B.

– [2005] «Modelo de Van Hiele para la didàctica de la geometria». *Un paseo por la geometría*, 67–81. Dto. Matemáticas, UPV-EHU, Bilbao.
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf

FUKAGAWA, H. i PEDOE, D.

– [1989] *Japanese Temple Geometry. Problems*. The Charles Babage Research Centre, Winnipeg, Canada.

FUKAGAWA, H. i ROTHMAN, T.

– [1998] «Géométrie et religion au Japon». *Pour la Science*, núm 249.
– [2008] *Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

GHEVERGHESE, George

– [1991] *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Penguin Books, Harmondsworth, U.K. [Traducció espanyola a càrrec de Jacobo Cárdenas, *La Cresta del Pavo Real. Las Matemàticas y sus Raíces no Europeas*. Ediciones Piràmide, Madrid, 1996].

HORIUCHI, Annick

– [1994] *Les mathématiques japonaises a l'époque d'Edo*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris.

HØYRUP, Jens

– [2002] *Lengths, widths, surfaces: a portrait of Old Babylonian algebra and its kin*. Springer-Verlag, New York.

HUVENT, Géry

– [2008] *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*. Dunod, Paris.

ITO, E.(et al.)

– [2003] *Japanese temple mathematical problems in Nagano Pref. Japan*. Kyoikushokan, Nagano.

KATZ, Victor J.

– [1993] *A History of Mathematics*. HarperCollins College Publishers, New York.

LI YAN, DU SHIRAN

– [1963] *Zhongguo gudai shuxue jianshi*. Hong Kong. [Traducció anglesa a càrrec de John N. Crossley i Anthony W.-C. Lun, *Chinese Mathematics. A Concise History*. Oxford University Press, Oxford, 1987].

MARTZLOFF, Jean-Claude

– [1987] *Histoire des mathématiques chinoises*. Masson, Paris. [Traducció anglesa a càrrec de Stephen S. Wilson, *A History of Chinese Mathematics*. Springer, Berlin, 1997].

NOLLA, Ramon

– [2006] *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica*. SCM-IEC, Barcelona.
Es pot descarregar des de `http://scm.iec.cat/Publicacions/pubs_2.asp`

PAPOS D'ALEXANDRIA

– [III] *La Collection Mathématique*. Vegeu Eecke [1932].

PLOFKER, Kim

– [2007] «Mathematics in India». *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook*. Editat per Victor KATZ. Princeton University Press, Princeton and Oxford.

PÓLYA, George

– [1945] *How to solve it*. Princeton University Press, USA. [Traducció espanyola a càrrec de Julián Zagazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México D.F., 1965, reimpressió 1994].

PTOLEMEU, Claudi

– [II] *Composition Mathématique* o [*Almagest*]. [Facsímil de la traducció francesa d'Halma dels anys 1813–1816. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1988].

ROBSON, Eleanor

– [2007] «Mesopotamian Mathematics». *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook*. Editat per Victor KATZ. Princeton University Press, Princeton and Oxford.

SMITH, D.E. i MIKAMI, Y.

– [1914] *A History of Japanese Mathematics*. Open Court Pub. Co., Chicago. [Reeditat per Dover, New York, 2004]

YOUSCHKEVITCH, Adolf P.

– [1976] *Les Mathématiques arabes*. Vrin, Paris. (És una traducció, a càrrec de Cazenaze i Jaouiche, de la versió en llengua alemanya de la tercera part d'una obra en llengua russa sobre "Les matemàtiques a l'edat mitjana").

Índex