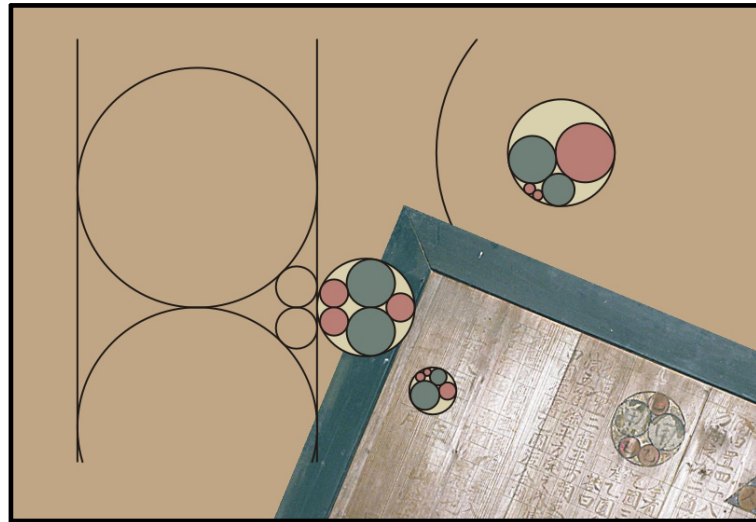


SANGAKUS

Contemplació i raó



Ramon Nolla

算額

SANGAKUS. Contemplació i raó

- SANGAKUS. Introducció
- Anàlisi de l'experiència d'observació
- El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*
- Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*
- Els reglets de càlcul
- Estudi d'un *sangaku*
- *Sangakus* com a recursos d'aula
- Galeria de *sangakus* per a la secundària i el professorat

SANGAKUS. Introducció

Són una de les manifestacions de la matemàtica japonesa *wasan* consistents en **tauletes de fusta que contenen problemes matemàtics**, en la seva majoria geomètrics, que es penjaven de les parets i ràfecs de les teulades dels temples budistes i santuaris sintoistes al Japó de l'època Edo [1603-1867].



Santuari Kaizu Tenma (pref. Shiga)
Sangaku de 520 cm de llargària



Santuari Aga (pref. Hyugo)
1879. 163 x 58 cm

SANGAKUS. Introducció

- Presenten composicions atractives de bellesa formal i plàstica, de cercles, polígons, el·lipses i figures tridimensionals. Algunes contenen les solucions i molt poques el procediment per arribar-hi.
- Se'n conserven al voltant de nou-centes i existeixen registres de més de mil set-centes desaparegudes.
- La més antiga conservada és del 1683. (pref. Tochigi)
- La més antiga enregistrada és del 1668 (diari de Yamaguchi Kanzan [1781-1850] en un viatge pel Japó)

SANGAKUS. Introducció



Confuci diu: “Hauríeu de dedicar tot el vostre temps a estudiar, oblidant els àpats i prescindint de dormir”.

Les seves paraules són valuoses per a nosaltres. Des que era un nen, he estat estudiant matemàtiques i llegint molts llibres de matemàtiques. Quan tenia algun dubte, visitava i consultava al matemàtic Ono Eijyu. Agraïxo els ensenyaments del meu mestre. Per la seva bondat, vaig a penjar un Sangaku en aquest temple.

Dedicatòria i sangaku penjat per **Saito Kuninori** [1828].

Temple Kitamuki Kannondo. Ueda (Nagano)

SANGAKUS. Introducció



Lloc: Santuari Katayamahiko. Okayama (Okayama)
1873. 162 x 88 cm

SANGAKUS. Introducció



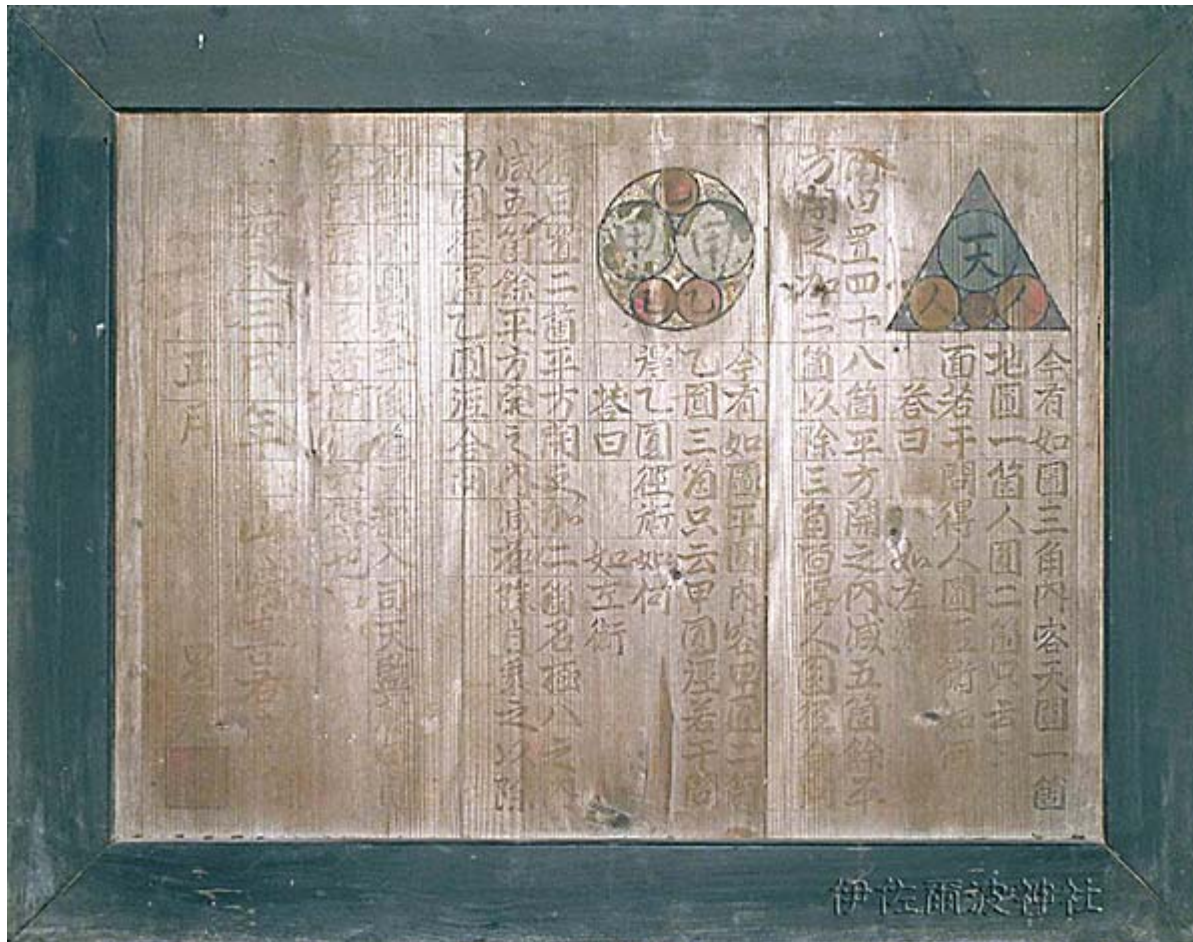
Lloc: Nagasaki
215 x 107 cm

SANGAKUS. Introducció



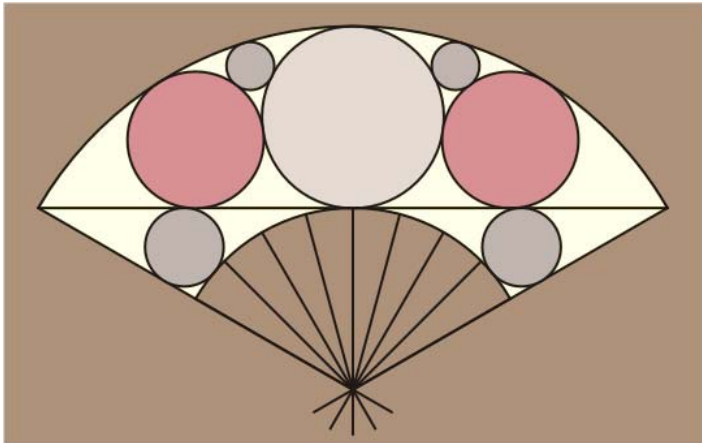
Fragment
Lloc: Nagasaki
215 x 107 cm

SANGAKUS. Introducció



Lloc: Santuari Isaniwa a Matsuyama (Ehime)
111 x 87 cm

SANGAKUS. Introducció



Lloc: Santuari Isaniwa a Matsuyama (Ehime)
75 x 91 cm

SANGAKUS. INTRODUCCIO



Lloc: Santuari deTakami (Fukuoka)

SANGAKUS. Introducció



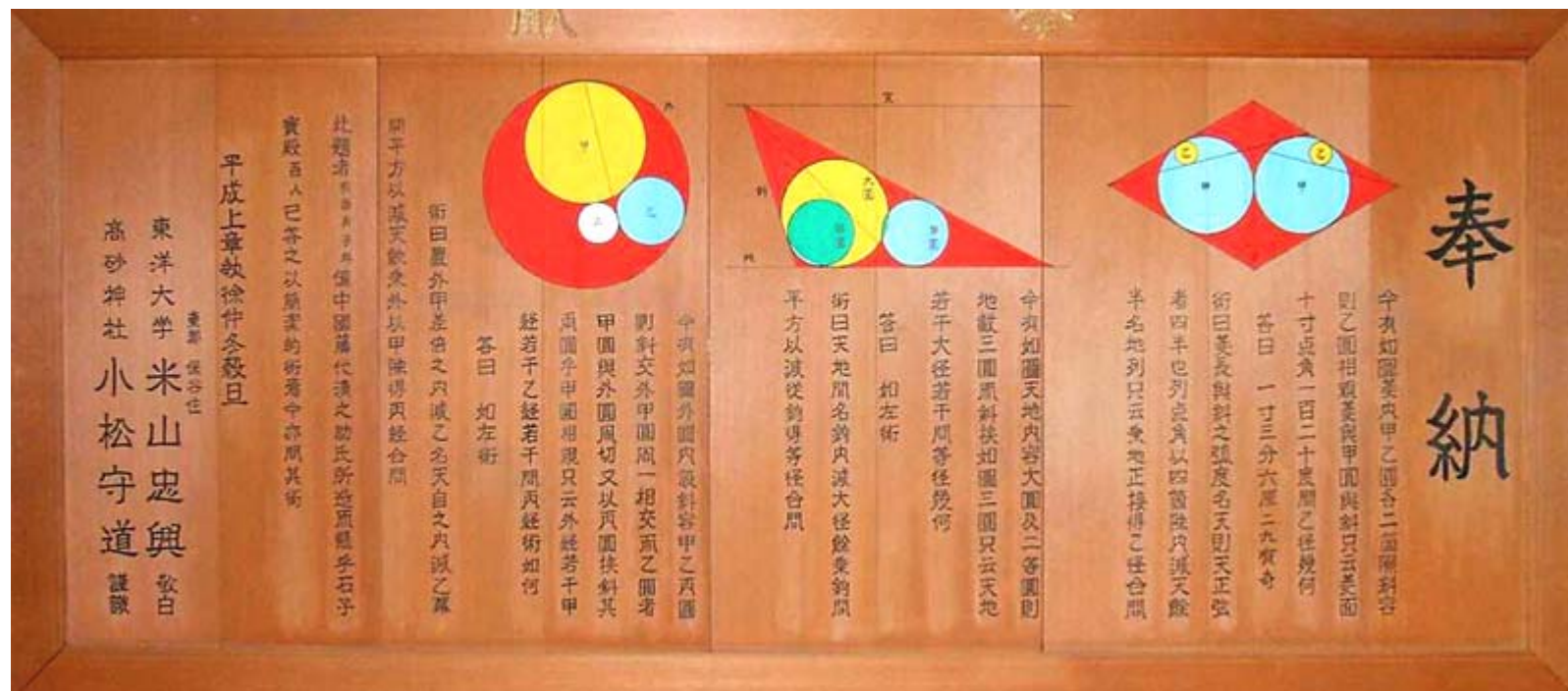
Lloc: Santuari Mizuho (Nagano)
1800. 160 x 58 cm

SANGAKUS. Introducció



Lloc: Santuari Haguro (Yamagata)
1823. 450 x 150 cm

SANGAKUS. Introducció



奉納

今有如圖式幕內
容甲珠四箇乙珠三
箇或甲珠一箇乙珠二箇或甲珠二箇乙珠一箇
五十五寸間甲珠徑
幾何

答曰甲珠徑二百九
十九寸九分有奇

術曰置五今四厘間平方加一箇二分乘乙
球徑得甲球徑合問

最上流小瓊亮如門人
松坂住
小林利助

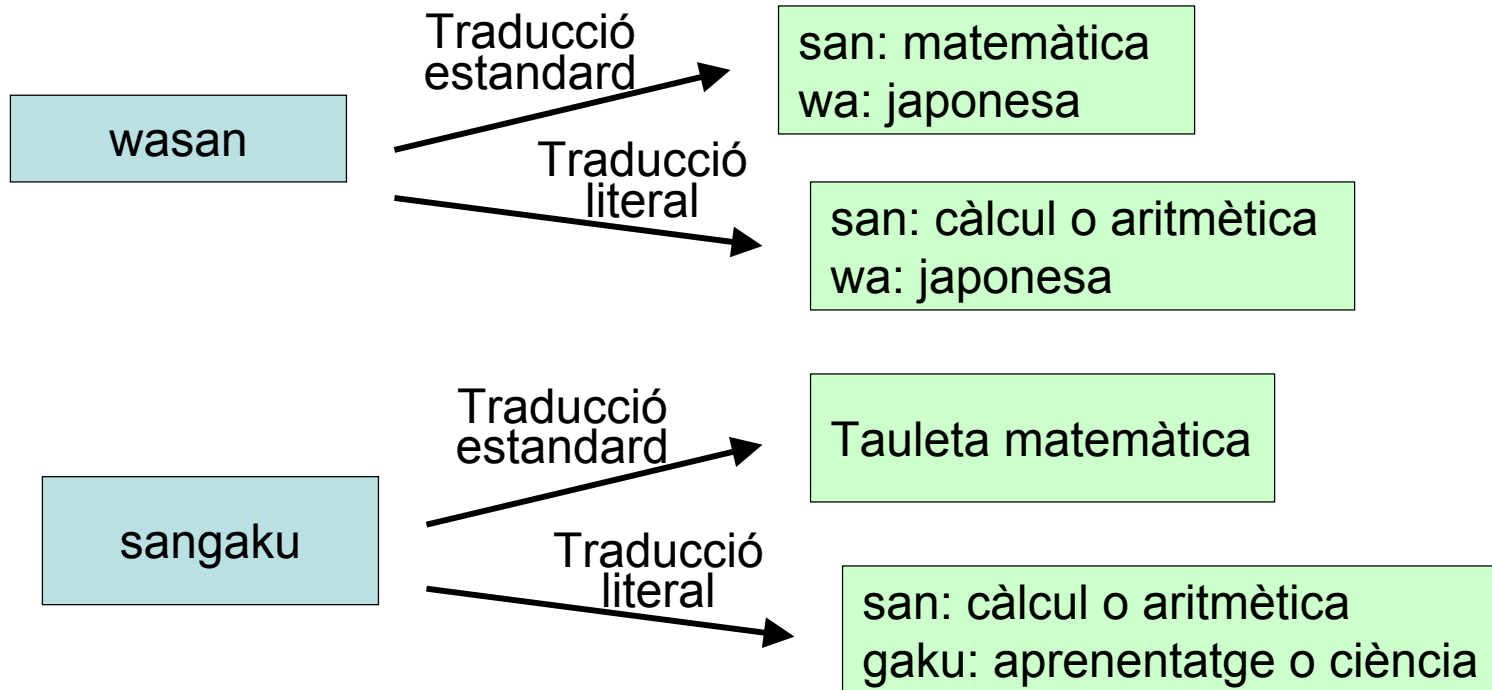
文化十一年
戌三月吉辰

時明
馬

Penjat el 1814 i descobertt el 1994.
D'un temple que va ser destruït.

SANGAKUS. Introducció

Sobre els termes *WASAN*, *MATEMÀTICA* i *SANGAKU*



Mathema o mathemata

Tot allò que és objecte d'instrucció i d'estudi amb estrets lligams amb la filosofia i les ciències en general.

SANGAKUS. Introducció

Exemple: Per a Plató el “mathema” suprem és la idea del Bé,

... la Idea del Bé és l'objecte de l'estudi suprem, a partir del qual les coses justes i totes les altres coses es tornen útils i valuoses.

Llibre VI de la *República*, 505 a.

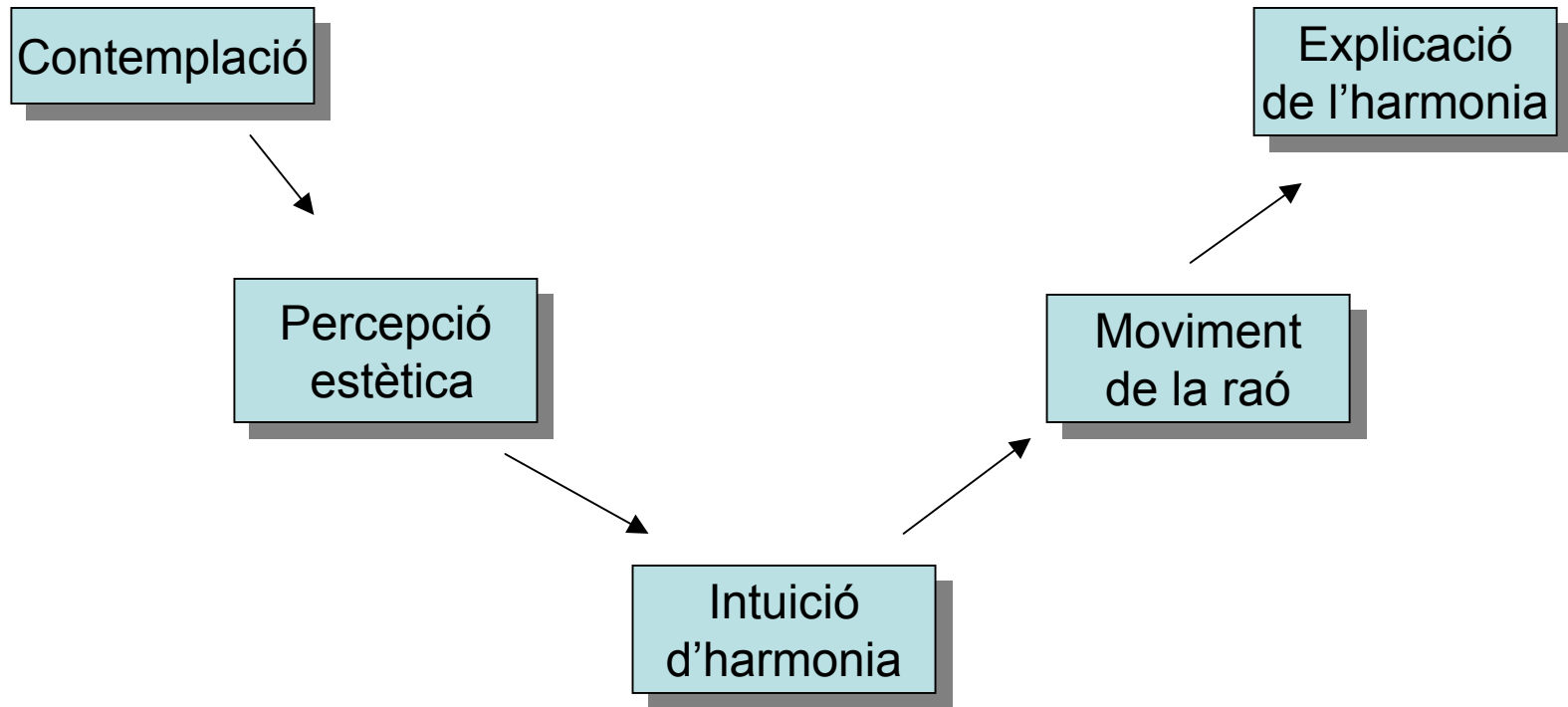
Conclusió:

El nom de matemàtica adoptat a Occident
pot implicar

l'existència de restes d'una creença en un cert tipus de
transcendència del coneixement que proporciona aquesta matèria.

Aquesta creença no es troba a la matemàtica japonesa i
potser per això no queda reflectit en el seu nom *wasan*.

Anàlisi de l'experiència d'observació



Anàlisi de l'experiència d'observació

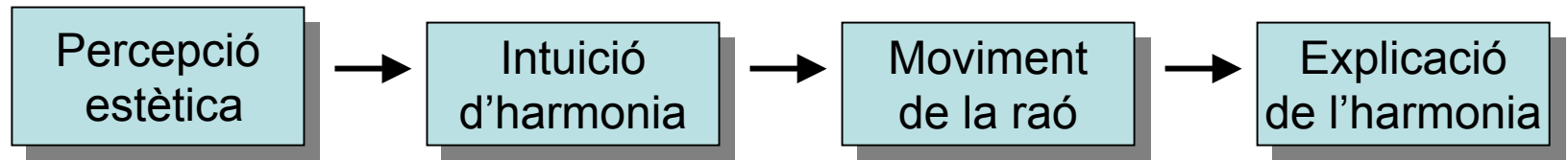
Contemplació

Contemplació vol dir **aturar-se** a considerar una obra d'art, **mirar-la, escoltar-la amb calma i durant l'estona que calgui**, a fi de descobrir-ne la seva bellesa formal i penetrar en el seu contingut profund

Anscari M. Mundó
La contemplació de la bellesa en l'art
Amics de l'art romànic-IEC. 2004

Implicació: La mirada hauria de ser d'una qualitat que portés l'ànima a un estat silenciós i buit per tal que la cosa observada pugui ser escoltada sense passar per cap filtre instal·lat en ella.

Anàlisi de l'experiència d'observació



- Es produeix un estat de **percepció** que es tradueix en un sentiment de profund nivell estètic.
- Apareix la intuïció d'una **harmonia** entre les parts de la imatge, alguns cops molt directa i clara i d'altres oculta en una col·lecció desordenada d'objectes.
- Possibilitat de reconduir la intuïció per activar un **moviment de la raó** dirigit a **explicar l'harmonia** mitjançant **llenguatges** que la facin present i amb poder comunicatiu.

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Els costums, les condicions socials i materials i la influència del pensament filosòfic poden guiar la comprensió sobre l'elecció dels problemes, les idees, el seu tractament i les tècniques emprades.

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*



Santuari Umamioka
Watamuki
(Shiga)

- Des de molts segles enrere, els fidels sintoistes feien ofrenes als déus (*kami*) en els santuaris.
- Creien que als *kami* els agradaven els cavalls i aquells que no podien oferir-ne un de viu presentaven un dibuix sobre una tauleta d'un cavall pintat.

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*



76 cm d'amplada.

Segle XVIII.

The Mingeikan Museum. Tokyo.

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*



Kiyomizu-dera temple

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

- Amb el temps els motius de les tauletes es diversificaren i el costum es conservà.



Temple Kouninnji (pref. Nara)



Actualment es venen tauletes per a ser penjades en els temples i santuaris

El caràcter japonès i el costum de penjar sangakus



Autor: Akira Yamaguchi

El caràcter japonès i el costum de penjar sangakus

- Seguint aquesta tradició, a partir del segle XVII es comencen a trobar tauletes matemàtiques



Dos sangakus moderns entre tauletes de temàtica diversa



El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

DEVOCIÓ?

i/o

ALTRES INTERESSOS?

La qüestió és de naturalesa similar a la que plantegen els exvots de les capelles de les nostres contrades

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*



Vaixells penjats a l'esglèsia de Sant Magí al carrer del Portal del Carro de Tarragona

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Motius del costum de penjar exvots a Occident

- Agraïment i devoció?
- Orgull?
- Publicitat?
- ...



El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Alguna cosa semblant pot haver passat al Japó.

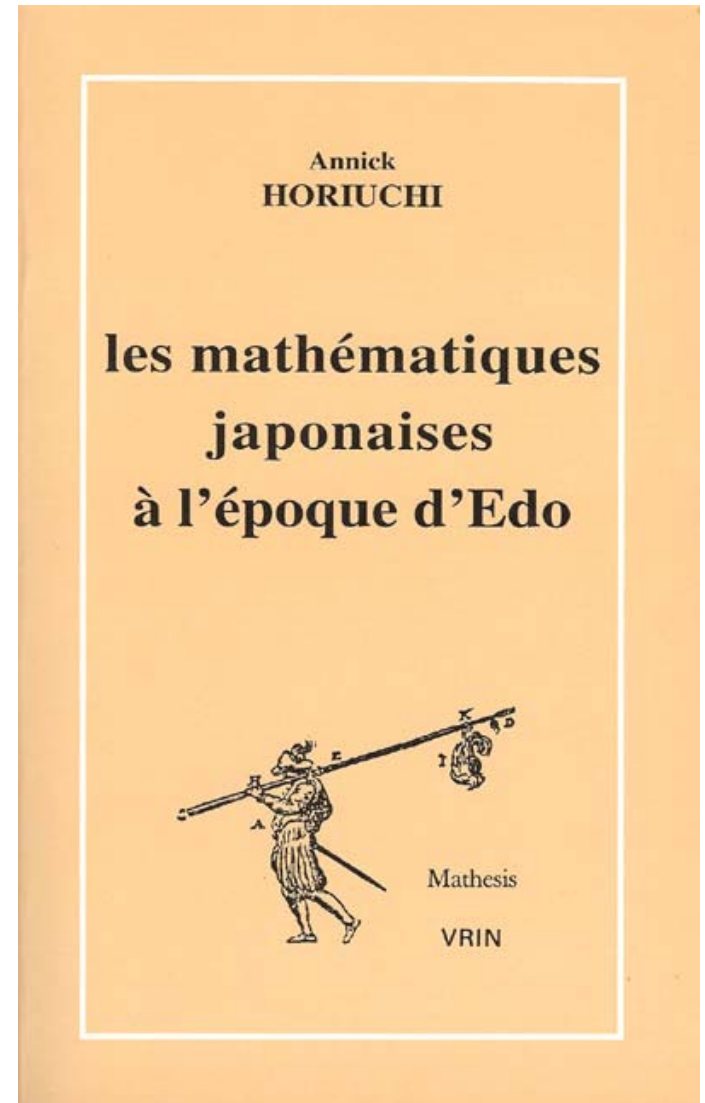
Una interpretació del costum de penjar *sangakus* al Japó en els seus inicis molt valorada pels historiadors, la trobem al *Sanpo buttankai* (No temeu de rectificar) [1673],

Serà una moda? És cada cop més freqüent que s'inscriguin problemes de matemàtiques [sobre tauletes] per exposar-los aquí o allà en els santuaris. Tractant-se de tauletes votives, hom espera trobar-hi fórmules d'invocació. Quan no n'hi ha, ens preguntem què és el que pretenen realment sinó cantar lloances al propi geni.

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Després de Mikami Yoshio [1875-1950], Annick Horiuchi ha escrit l'obra més exhaustiva en llengua occidental sobre *wasan*. Ella fa referència a **la competència entre escoles** en l'article,

“Les mathématiques peuvent-elles n’être que pur divertissement? Une analyse des tablettes votives de mathématiques à l’époque d’Edo”. *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, núm 20, 135–156.



El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Després d'una anàlisi de les condicions històriques en què es produeixen els *sangakus* **Horiuchi** conclou, respecte de la concepció d'activitat d'entreteniment que s'atribueix a la seva creació, que

La moda de les tauletes, en la qual s'ha vist durant molt de temps la prova que aquesta ciència [wasan] era desenvolupada com un pur entreteniment, s'inscrivía en un context històric precís marcat per la creixent difusió de la disciplina en el món rural, la professionalització dels mestres de la capital i, finalment, la forta competència entre les escoles. En aquest context, les tauletes juguen el paper d'instruments de comunicació i de publicitat còmodes d'ús, econòmics, eficaços i més espectaculars que els tractats.

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

- Un últim element per a l'anàlisi.

Aproximació a la sensibilitat del caràcter japonès a través d'un exemple extret de les arts tradicionals

- | | | |
|---|--|--|
| ☐ Pintura | ☐ Arranjament floral i de jardins | ☐ Teatre |
| ☐ Cal·ligrafia | | ☐ ... |
| ☐ Cerimònia del te | ☐ Elaboració de haikus | ☐ Elaboració de <i>sangakus</i> ? |



Els pins. Hasegawa Tohaku [1539-1610]

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Imatge inicial
de l'article de
la revista que
em va
introduir als
sangakus on
es troben
traces per e
l'anàlisi



*Sota la gran onada de kanawaga. Una de les Trenta-sis
vistes del Mont Fuji. Jatsushika Hokusai [1760-1849]*

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

- Percepció de **desenllaç obert**
- A completar a partir de la **contemplació**
- Generació d'un moviment intern amb consciència de **no permanència**
- El quadre no respon a les qüestions:
 - Destí dels pescadors
 - Simbolisme del Mont Fuji
 - ✓ Al mateix nivell que les onades (igual plasticitat=perill)
 - ✓ Pol oposat d'aquestes (estabilitat, seguretat, solidesa)
 - No s'entreveu l'estat d'ànim dels pescadors, només presència ordenada davant l'adversitat
 - ✓ Senten la protecció del Mont Fuji?
 - ✓ Senten l'amenaça de l'onada?
 - ✓ Se senten actors fora del temps en comunió amb els esdeveniments?
 - El detall de l'escuma infon alguna característica al conjunt?



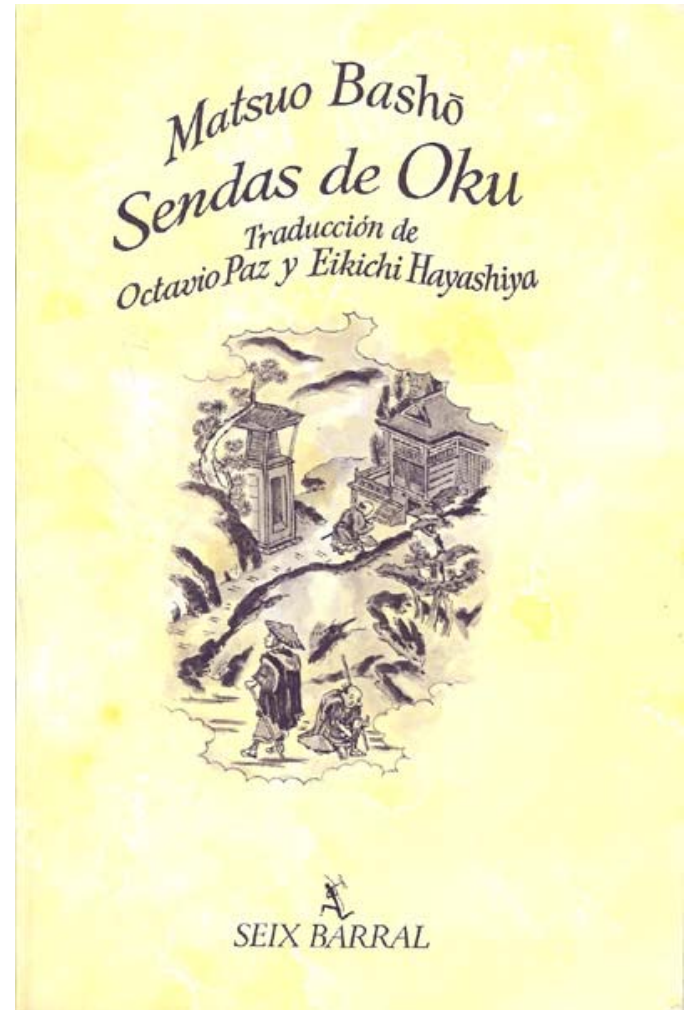
El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*



L'observador es converteix en protagonista i s'obre una porta a la meditació

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Octavio Paz reflexiona sobre la sensibilitat del caràcter japonès en la introducció de l'excel·lent relat de viatge i poemari *Sendas de Oku* de Matsuo Basho [1694]



Edició de Seix Barral, Barcelona, 1981

El carácter japonès i el costum de penjar sangakus

Ni antes ni ahora *el Japón ha sido para nosotros* una escuela de doctrinas, sistemas o filosofías sino *una sensibilidad*. Lo contrario de la India: no nos ha enseñado a pensar sino a sentir. Ciertamente, en este caso *no debemos reducir la palabra sentir al sentimiento o a la sensación*; tampoco la segunda acepción del vocablo (dictamen, parecer) conviene enteramente a lo que quiero expresar. *Es algo que está entre el sentimiento y la idea*. Los japoneses usan la palabra *kokoro*: corazón. Pero ya en su tiempo José Juan Tablada advertía que era una tradición engañosa: “kokoro es más, es el corazón y la mente, la sensación y el pensamiento y las mismas entrañas, como si a los japoneses no les bastara sentir sólo con el corazón”. Las vacilaciones que experimentamos al intentar reducir este término, *la forma en que los dos sentidos, el afectivo y el intelectual, se funden en él sin fundirse completamente, como si estuviese en perpetuo vaivén entre uno y otro, constituye precisamente el sentido (los sentidos) de sentir*.

Octavio Paz [1981]

Introducció de *Sendas de Oku* de Matsuo Basho, 1694.

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Hi ha una coherència d'aquesta sensibilitat amb els sistemes filosòfics i religiosos adoptats pels japonesos:

- **Budisme en la seva vessant zen**, que busca el despertar a la realitat última partint de la consciència de no permanència i caducitat, i utilitzant el binomi meditació-acció per educar l'atenció.
- **Sintoisme o "via dels déus"** constituïts per elements naturals, nocions abstractes i les ànimes dels morts de manera que totes les parcel·les de la vida són sagrades.



Amaterasu, deessa del Sol en el sintoisme

Aquests sistemes, amb independència de les disposicions governamentals de cada període històric i malgrat alguns enfrontaments, **foren sovint viscuts pels japonesos com a dues cares d'una mateixa religió** en què els budes i els bodhisattvas i les divinitats del sintoisme eren emanacions d'una mateixa realitat i es constituïen en guies protectors cap al despertar.

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Sensibilitat japonesa: produeix obres que ens inviten a participar, passar de la contemplació a l'acció.

Sensibilitat occidental: produeix obres acabades, compactes, tancades en la seva “perfecció”, com les catedrals o un teorema matemàtic demostrat sense fisures.

Sensibilitat japonesa $\neq$ Sensibilitat occidental

Podem experimentar la sensibilitat japonesa aïllant alguns elements de l'observació.

D'aquesta manera, aquests elements deixen de formar part del tot acabat i es fan accessibles al joc sensació-pensament.

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*



Catedral de Santa Maria,
Tarragona.

Façana del Pla de la Seu
i element decoratiu

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*



Església
d'Orsanmichele,
Florència



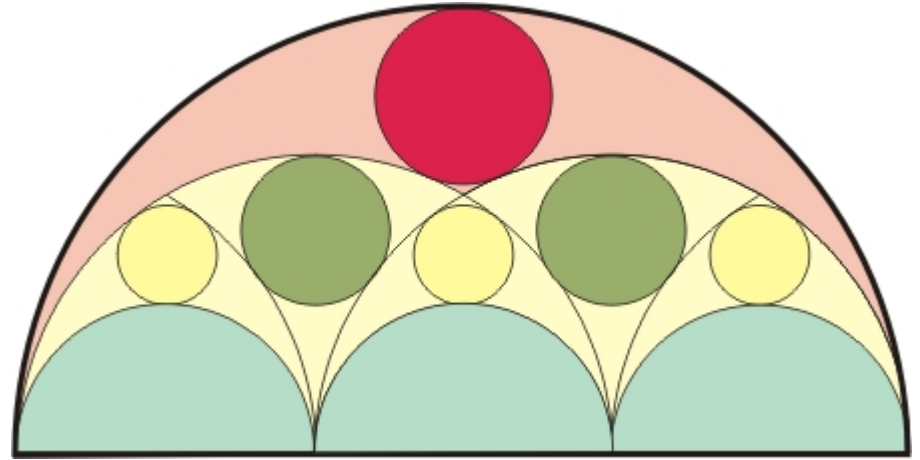
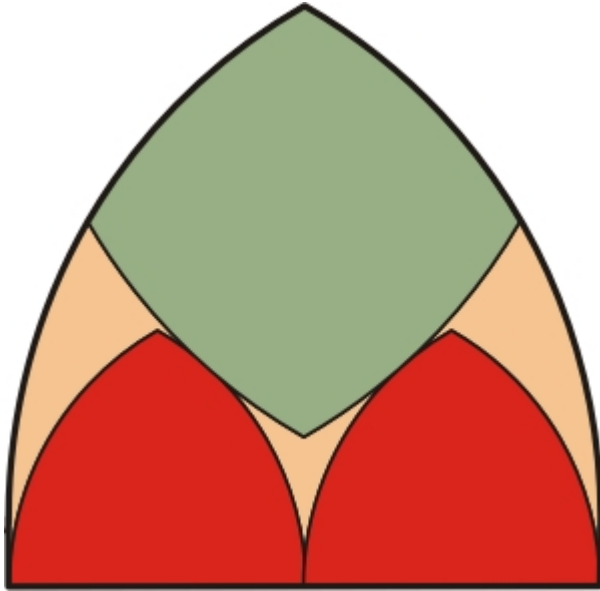
El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Seminari de Tarragona

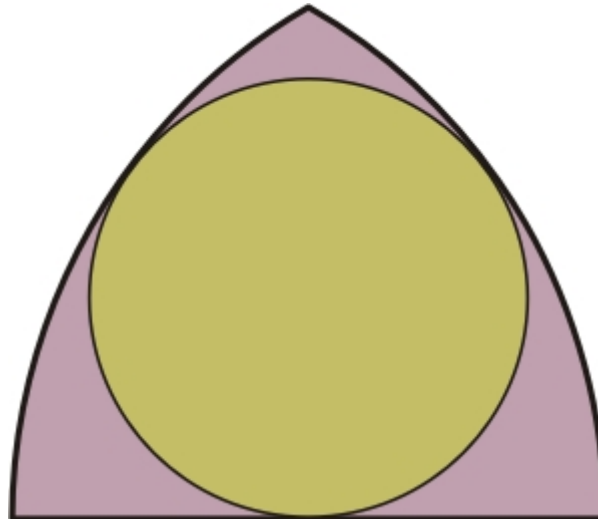


Detall de finestra

El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*



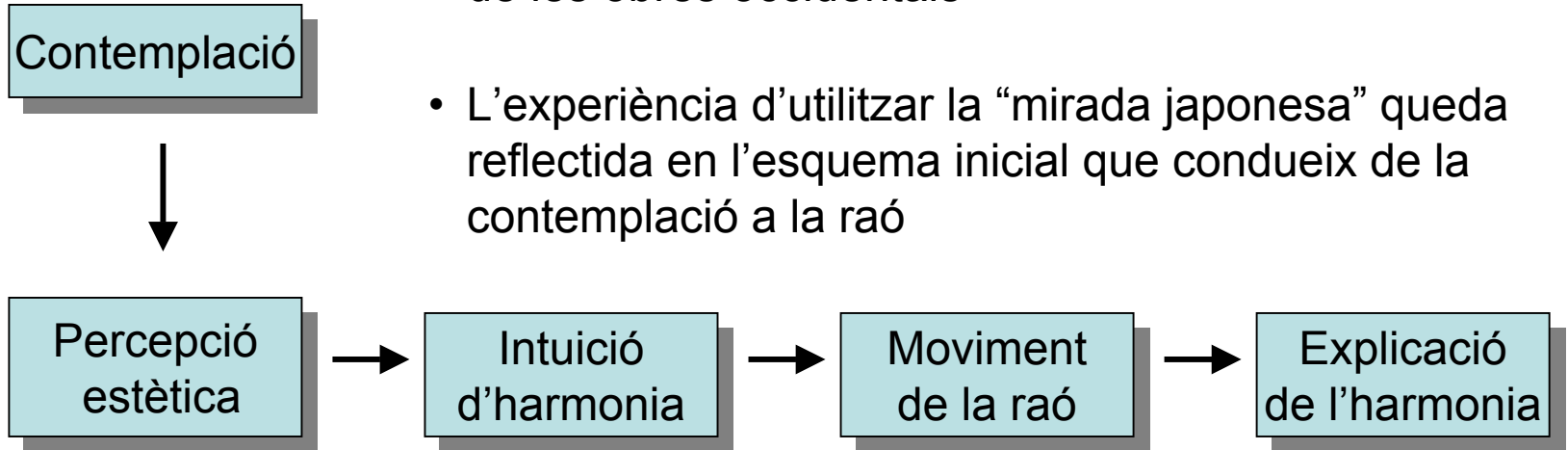
Occident o Orient?



El caràcter japonès i el costum de penjar *sangakus*

Conclusió:

- En la sensibilitat japonesa es produeix un joc entre contemplació i acció, un moviment entre sensació i pensament
- Podem aproximar-nos a aquesta sensibilitat des de l'observació dels *sangakus* i, també, aïllant elements de les obres occidentals
- L'experiència d'utilitzar la “mirada japonesa” queda reflectida en l'esquema inicial que condueix de la contemplació a la raó



Admirable

aquel que ante el relámpago

no dice: la vida huye . . .

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

- El desenvolupament del *wasan* coincideix amb l'època de govern dels Tokugawa, coneguda com a període Edo [1603–1867].
- En aquest període el Japó restà unificat i en pau i el poder real estava en mans del governador que instal·là el seu govern a Edo (Tòquio).
- Els nobles guerrers (*samurais*) tingueren que buscar noves formes de subsistir. Alguns es convertiren en mestres itinerants o d'escoles rurals (*juku*).
- Aquesta època coincidí amb un període de tancament del país (*sakoku*). En la dècada del 1630, el cristianisme quedà eradicat i el 1639 els portuguesos foren expulsats.
- L'únic contacte amb Occident fou, sota grans restriccions, amb els comerciants holandesos. Aquests feien els seus intercanvis confinats en l'illa artificial de Deshima de 200 per 70 metres, en el port de Nagasaki.



Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

En resulta una manera pròpia de fer matemàtiques que presenta dues vessants no antagòniques,

- Artística
- Científica o de recerca



Lloc: Santuari Souzume (Okayama)
1861

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

- Vessant artística

- Es manifesta públicament en l'elaboració de *sangakus* d'execució molt acurada i en què el **component estètic** resideix
 - En la plàstica de les presentacions
 - En el procediment (*jutsu*) de resolució, —quan hi és—, molt concís i de gran claretat però que pot amagar una anàlisi del problema i un seguit de càlculs per aconseguir-lo de gran complexitat.
- N'hi havia que presentaven força complexitat i es podien resoldre gràcies a la gran activitat desenvolupada en la **vessant científica**.
- L'adjectiu **artístic** li escau no tant sols per motius estètics sinó pel tipus d'organització de les escoles, similar al model *iemoto* que seguien les escoles d'arts tradicionals japoneses.

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

- Vessant científica o de recerca

- La trobem en el contingut dels **tractats escrits** per l'elit de la capital Edo en què es desenvolupen recerques de més alt nivell.
- Aquestes **adopten i assimilen** durant bona part del segle XVII **la tradició xinesa per després trencar amb ella** i desenvolupar formes pròpies de recerca.
- Els actors principals en aquest trencament són Seki Takakazu [1640?-1708] i el seu deixeble Takebe Katahiro [1664-1739].



Seki Takakazu

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

- Àlgebra en la tradició xinesa

És una eina per resoldre problemes i no una matèria que s'estudiï per ella mateixa. Fins i tot quan s'estudia amb independència dels problemes es fa sota la perspectiva de millorar les tècniques de cara a la seva resolució.

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

- Àlgebra en la tradició japonesa
 - Hi ha un esforç de generalització, de fer-ne una **presentació abstracta** i de crear una **estructura** dels processos de resolució.
 - Introducció d'una **àlgebra escrita** inspirada en la representació xinesa que utilitza la manipulació de reglets sobre una taula, per representar nombres, operacions i equacions.
 - En aquesta àlgebra incorporen novetats com la de que les **dades** poden ser **numèriques o literals**.
 - Això els permet ampliar les seves recerques en el tractament d'equacions i **estudiar**, per exemple, les **condicions d'existència de solucions d'una equació o la compatibilitat de les dades d'un problema**.

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

- Geometria *wasan*

Les recerques en el domini de l'àlgebra, els permetem l'obtenció d'alguns resultats en geometria que avancen els descobriments occidentals, lluny de l'ús de les eines de la geometria analítica i projectiva introduïdes per Descartes-Fermat i Desargues, i de les del càlcul diferencial en les recerques de màxims i mínims, d'àrees i volums determinats per expressions polinòmiques

Per establir les equacions algèbriques que determinaran les solucions dels problemes geomètrics, utilitzen principalment les regles de:

- La “base-perpendicular-hipotenusa” (teorema de Pitàgores)
- La “doble hipotenusa-perpendicular” (càlcul de l'altura d'un triangle, en funció dels seus costats, a partir dels dos triangles rectangles que determina).
- La semblança de triangles rectangles.

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

La relació inexistent amb la matemàtica occidental s'explica per,

- La política d'**aïllament** del país a l'època Edo
- Pel caràcter japonès que **no mostra interès en muntar un gran edifici teòric que justifiqui els resultats** obtinguts en les seves recerques a l'estil de la tradició iniciada als voltants del segle VIaC. a Grècia.

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

La matemàtica segons Takebe,

Les matemàtiques consisteixen en l'establiment de regles, l'aclariment del principi dels procediments i el càlcul dels nombres. Quant a aquesta tasca es dirà que és “conforme” si el principi és aclarit, si el procediment és explicat i si els nombres són calculats amb l'ajut d'aquest procediment. Es dirà que és “contrària” si el procediment és avaluat per mitjà dels nombres i si el principi és cercat amb l'ajut del procediment.

Tetsujutsu sankei
(El clàssic del procediment per acumulació)
[1722]

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

- Recerca “per mitjà del principi” (*conforme*).

Resideix en el **geni i la intuïció nascudes de l'atenció**, la qual porta a una **visió directa de la font** de comprensió del problema o procediment estudiat.

Segons Takebe un representant privilegiat és el mètode del ***tianyuan*** que a partir del principi de la introducció de l'element desconegut i de l'establiment d'una equació a partir de les condicions del problema permet amb un procediment que només implica multiplicacions i sumes aplicades d'una manera recurrent obtenir la solució d'una classe molt gran de problemes.

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

- Recerca “per mitjà dels nombres” (*contrària*).

Consisteix en l'elaboració de **temptejos de càlcul sobre valors numèrics concrets** per tal d'orientar els matemàtics sobre el resultat quan el “principi” és de difícil accés. **No hi ha una visió directa de la font** del problema o procediment, sinó que s'hi arriba per una marxa inversa a l'anterior. Un exemple el proporcionen els procediments per al càlcul de la longitud de l'arc i del cercle.

Introducció a la matemàtica japonesa *wasan*

Conclusió:

En cap moment es parla de deducció lògica a partir d'uns primers principis o de demostració tal com l'entenem a la nostra tradició.

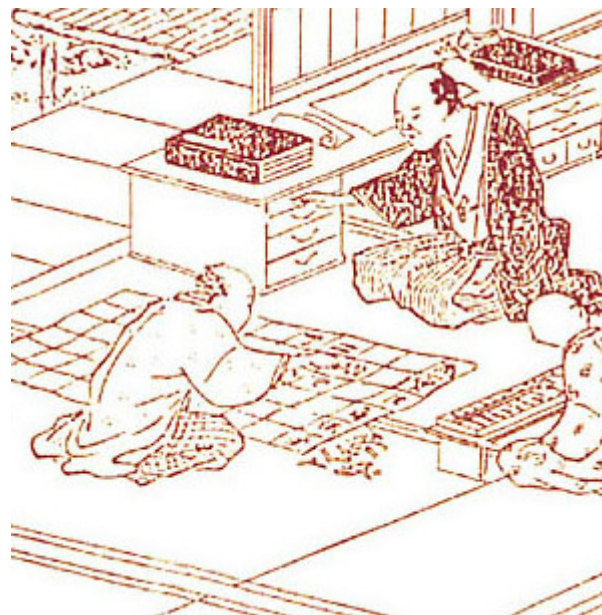
Més aviat es parla de descobriment per via intuïtiva paral·lela a l'ús del pensament que, moltes vegades, raona inductivament.

Aquí tornem a aquell moviment entre pensament i sensació que parlàvem al principi, propi del caràcter japonès i que assimila part de l'activitat matemàtica a un art.

Els reglets de càlcul

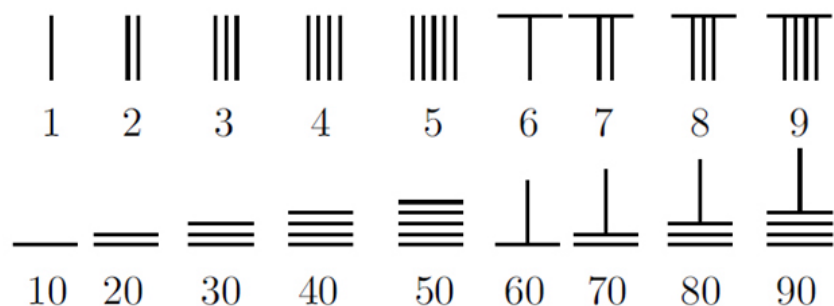
Sabem pels textos escrits, més que per les tauletes, que per resoldre els problemes dels *sangakus*, es recorria a l'aplicació del teorema de Pitàgores i de la semblança de triangles amb llenguatge algèbric i a la posterior resolució de les equacions resultants.

Es representaven els nombres i les equacions amb reglets. En el cas japonès es presentaven sobre un tauler quadriculat i tenien una versió escrita que permetia introduir coeficients literals.



Els reglets de càlcul

Els nombres es presentaven com es mostra a la imatge.



	≡	⊥
	⊥	
	⊥	

2	3	7
-	7	5
1	6	2

Les unitats d'ordre imparell tal com es veu al costat superior esquerre, i les d'ordre parell al costat inferior esquerre.

- Els nombres negatius i positius es presentaven amb reglets de colors negre i vermell respectivament, i en la representació escrita es podia trobar un reglet inclinat sobre la representació de les unitats si el nombre era negatiu.
- Pel zero es deixava un espai buit i en la representació escrita es podia trobar representat per un petit cercle. Les operacions aritmètiques es feien manipulant els reglets.

Els reglets de càlcul

Per al tractament d'equacions, es tria una línia horitzontal de referència que representa l'**element desconegut** (*yuan*) o la línia que representa l'**element constant** (*tai*). Llavors les línies immediatament inferiors representen les segones, terceres, quarts potències, etc, com es mostra en el quadre adjunt,

<i>tai</i>	x^0		Π
<i>yuan</i>	x^1		
I	x^2		$\equiv$
	x^3	$=$	$ $

Presentació indistinta de l'equació

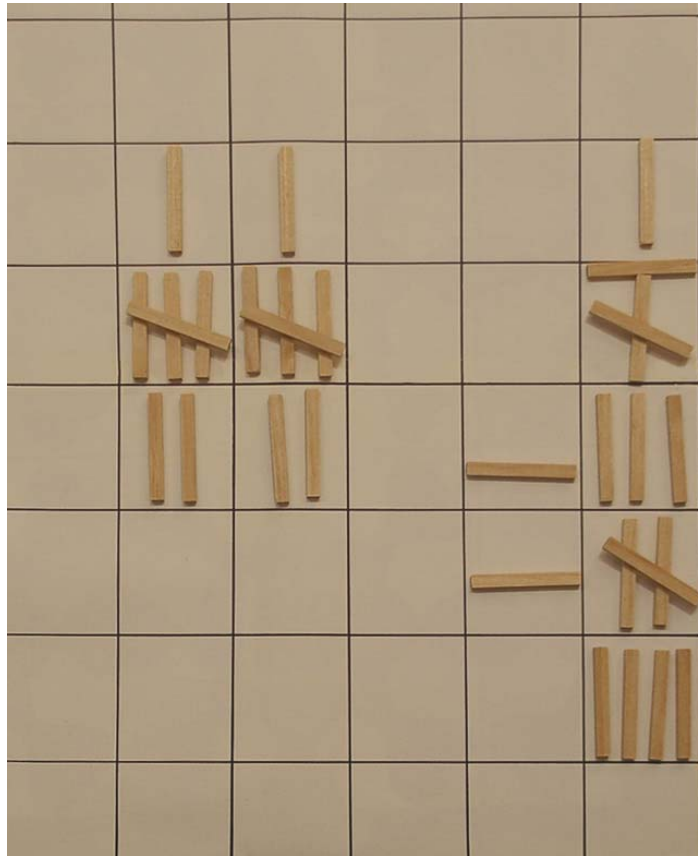
$$21x^3 - 5x^2 + 7 = 0$$

o del polinomi

$$21x^3 - 5x^2 + 7$$

Els reglets de càlcul

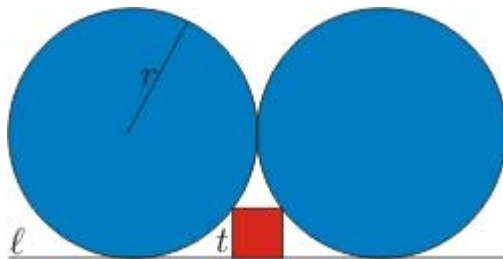
yuan →



Estudi d'un *sangaku*

Problema de dificultat baixa en què posarem de manifest la diferència dels estils i interessos entre el *wasan*, el model euclidià i el model de resolució per radicals.

Dos cercles de radi r són tangents a la línia l . Tal com es mostra a la figura, un quadrat de costat t toca ambdós cercles. Trobeu t en funció de r .

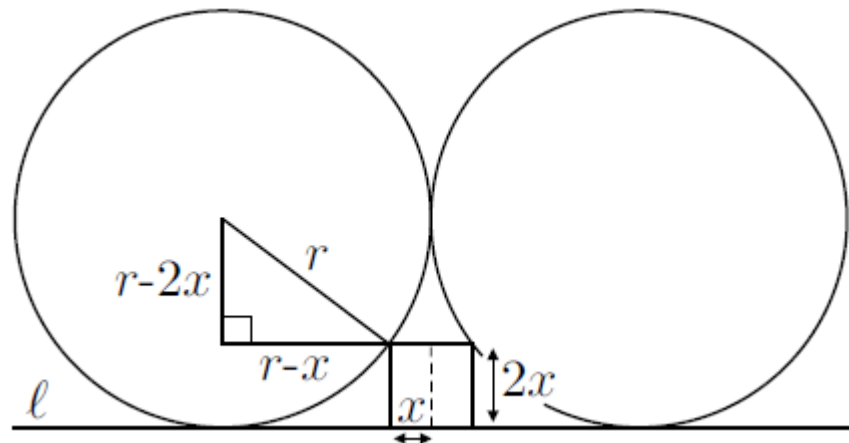


Santuari de Katayamahiko. Okayama (Okayama)

Estudi d'un *sangaku*. Resolució 1

- Anàlisi resolució algèbrica per radicals (a l'estil de secundària)

Si tracem les línies auxiliars de la figura i apliquem el teorema de Pitàgores s'obté



$$r^2 = (r - 2x)^2 + (r - x)^2 \iff 5x^2 - 6rx + r^2 = 0$$

$$\iff x = \frac{6r \pm \sqrt{36r^2 - 20r^2}}{10} = \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} r \\ \frac{r}{5} \end{matrix}$$

En ser la meitat del costat menor que el radi, obtenim que el costat del quadrat és

$$2x = \frac{2r}{5}$$

Estudi d'un *sangaku*. Resolució 2

- Anàlisi i resolució algebàrica a l'estil *wasan*

L'àlgebra *wasan* per a l'extracció d'arrels utilitza el mètode xinès del *tianyuan** amb les incorporacions de les recerques pròpies del *wasan*. En el nostre problema estudiarem un esbós del procediment en el cas particular de radi igual a 160 unitats, per tal de presentar algunes de les parts del càlcul de manera més entenedora. El procediment consta de tres parts.

**tian*, “cel”; *yuan*, “origen”.

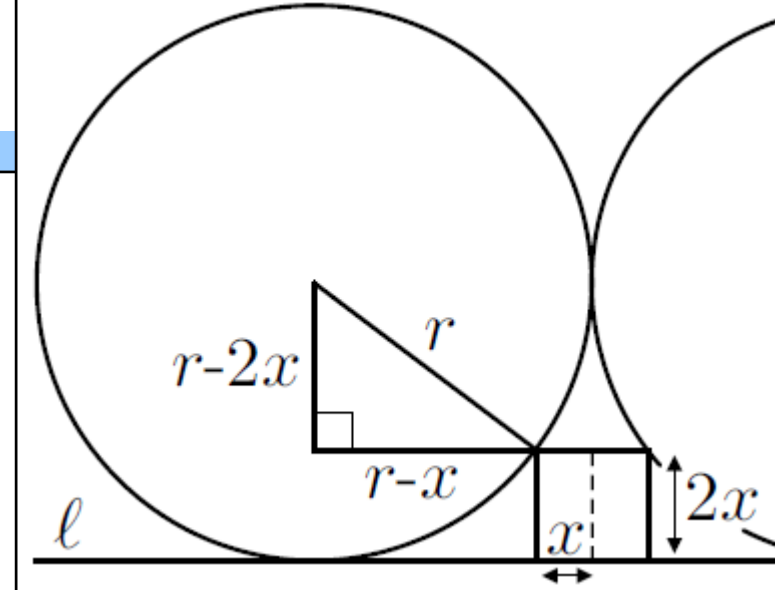
Tengen jutsu en japonès, mètode de l'element celestial

Estudi d'un *sangaku*. Resolució 2

- 1) Elecció de l'element desconegut o incògnita i presentació dels elements resultants de l'anàlisi mitjançant els reglets de càlcul.
- 2) Manipulació algebàrica dels elements presentats de cara a ser relacionats en una equació mitjançant l'aplicació d'alguns dels teoremes geomètrics citats anteriorment. Disposen de les regles de suma, multiplicació i potències de configuracions algebriques de reglets (polinomis).
- 3) Resolució de l'equació per un mètode similar al de Ruffini-Horner d'aproximacions successives.

Estudi d'un *sangaku*. Resolució 2

- 1) Elecció de l'element desconegut o incògnita i presentació dels elements resultants de l'anàlisi. En el nostre problema, si considerem el triangle rectangle de la figura els elements de l'anàlisi són,



		(1)	(2)			(3)		
<i>tai</i>	x^0	0	1	6	0	1	6	0
<i>yuan</i>	x^1	1		—	2		—	1

- (1) Meitat del costat del quadrat: x
 (2) Catet: $160 - 2x$
 (3) Catet: $160 - x$

Estudi d'un *sangaku*. Resolució 2

2) Manipulació algebraica dels elements presentats de cara a ser relacionats en una equació mitjançant el teorema de Pitàgores

$$\boxed{(160 - 2x)^2} \quad \text{yuan} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 0 \\ \hline & - & 2 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 0 \\ \hline & - & 2 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} 160^2 \\ 2 \cdot (-2) \cdot 160 \\ (-2)^2 \end{array}$$

$$\boxed{(160 - x)^2} \quad \text{yuan} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 0 \\ \hline & - & 1 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 0 \\ \hline & - & 1 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} 160^2 \\ 2 \cdot (-1) \cdot 160 \\ (-1)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hline & - & 6 & 4 & 0 \\ \hline & & & & 4 \\ \hline \end{array} \quad \boxed{25600 - 640x + 4x^2}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hline & - & 3 & 2 & 0 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \boxed{25600 - 320x + x^2}$$

2	5	6	0	0
	—	6	4	0
				4

$$(160 - 2x)^2 = 25600 - 640x + 4x^2$$

2	5	6	0	0
	—	3	2	0
				1

$$(160 - x)^2 = 25600 - 320x + x^2$$

Estudi d'un *sangaku*. Resolució 2

Teorema de Pitàgores i divisió per 5

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hline & - & 6 & 4 & 0 \\ \hline & & & & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hline & - & 3 & 2 & 0 \\ \hline & & & & 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ \hline & - & 9 & 6 & 0 \\ \hline & & & & 5 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 1 & 2 & 0 \\ \hline - & 1 & 9 & 2 \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$x^2 - 192x + 5120 = 0$$

Estudi d'un *sangaku*. Resolució 2

- 3) Resolució de l'equació per un mètode similar al de Ruffini-Horner d'aproximacions successives.

Dels càlculs adjunts s'estableix la solució

$$\boxed{x = 30 + 2 = 32}$$

$$x^2 - 192x + 5120 = 0$$

	1	- 192	5120
30		30	- 4860
	1	- 162	260
30		30	
	1	- 132	

	1	- 132	260
2		2	- 260
	1	- 130	0

Estudi d'un sangaku. Resolució 2

1)

x_0	a	b	c
	ax_0	$(ax_0 + b)x_0$	
x_0	a	$ax_0 + b$	$(ax_0 + b)x_0 + c$
x_0	ax_0	$ax_0^2 + bx_0 + c$	
	a	$2ax_0 + b$	

2)

x_1	a	$2ax_0 + b$	$ax_0^2 + bx_0 + c$
	ax_1	$(ax_1 + (2ax_0 + b))x_1$	
x_1	a	$ax_1 + (2ax_0 + b)$	$(*)$

$$(*) \quad (ax_1 + (2ax_0 + b))x_1 + (ax_0^2 + bx_0 + c)$$

3)

$x = x_0 + x_1$	$a(x_0 + x_1)^2 + b(x_0 + x_1) + c_0$
-----------------	---------------------------------------

Estudi d'un *sangaku*. Resolució 3

- Anàlisi i resolució geomètrica a l'estil de la tradició euclidiana en el marc del teorema de Pitàgores

Una de les possibilitats de plantejament de la qüestió per part dels geòmetres grecs hagués sigut sota la forma **d'un problema de construcció d'abast més general**.

D'aquest obtindríem la construcció concreta i la relació del costat en funció del radi com un subproducte.

- Primerament se'ns demanaria construir el quadrat inscrit entre els dos cercles tangents de la configuració donada i la seva recta tangent externa.
- Amb l'ús del **mètode de l'anàlisi** (llibre VII de la *Col·lecció Matemàtica de Papos*[s.III]) transformariem el problema en un d'enunciat geomètric més general. Aquesta anàlisi, que es fonamentaria en els teoremes I.47, II.1, II.4 i II.7 dels *Elements* i alguns de paral·lelisme i congruència del primer llibre.

Estudi d'un *sangaku*. Resolució

Anàlisi

$$OX^2 + XY^2 = OY^2 \quad [1.47]$$

$$\begin{cases} OX^2 + 2 \cdot OT \cdot XT = OT^2 + XT^2 \\ XY^2 + 2 \cdot XZ \cdot YZ = XZ^2 + YZ^2 \end{cases}$$

$$XZ = OS = OT = OY, \quad RS = YZ$$

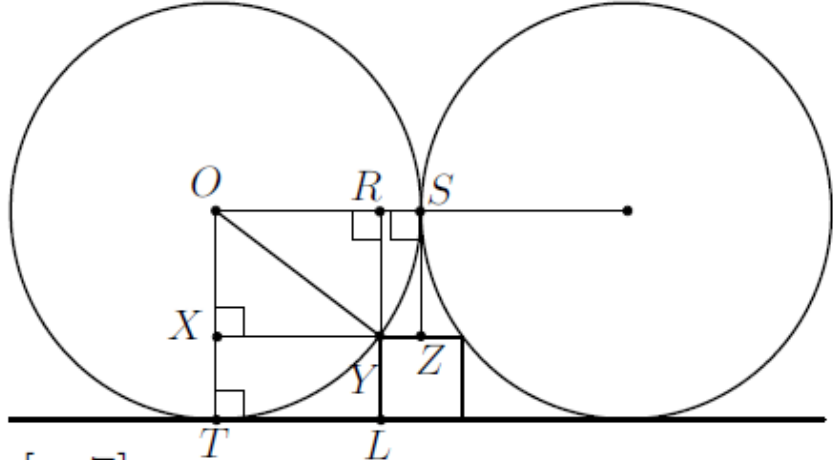
$$XT = YL = 2 \cdot YZ \implies XT^2 = 4 \cdot YZ^2 \quad [\text{II.4}]$$

$$\begin{cases} 2 \cdot OT \cdot XT = 2 \cdot OY \cdot 2 \cdot YZ = 4 \cdot OY \cdot YZ & [\text{II.1}] \\ 2 \cdot XZ \cdot YZ = 2 \cdot OY \cdot YZ \end{cases}$$

$$\rightarrow OX^2 + XY^2 + 6 \cdot OY \cdot YZ = 2 \cdot OY^2 + 4 \cdot YZ^2 + YZ^2$$

$$OY^2 + 6 \cdot OY \cdot YZ = 2 \cdot OY^2 + 5 \cdot YZ^2$$

$$6 \cdot OY \cdot YZ = OY^2 + 5 \cdot YZ^2 \implies YZ \cdot \left(\frac{6}{5} OY - YZ \right) = \frac{1}{5} OY^2 \quad [\text{II.1}]$$



Estudi d'un *sangaku*. Resolució

$$YZ \cdot \left(\frac{6}{5} OY - YZ \right) = \frac{1}{5} OY^2$$

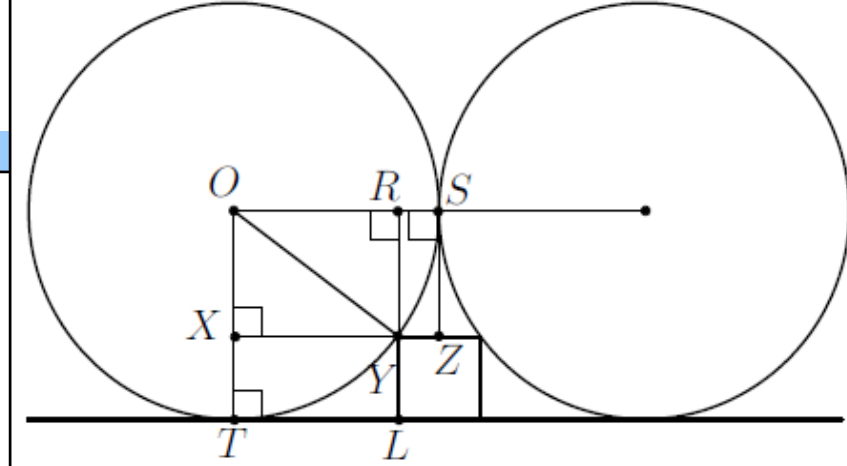
Enunciat del problema més general

$$AB = \frac{6}{5} OY [= a]$$

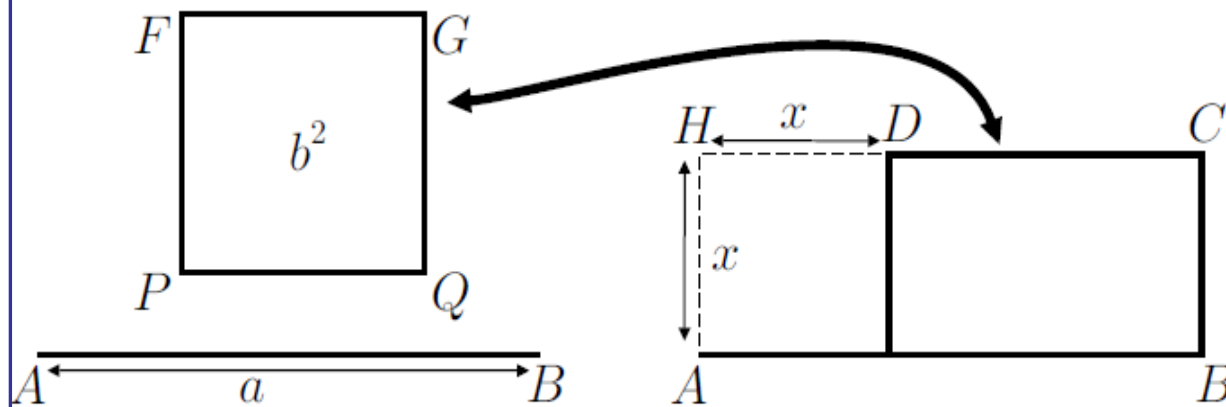
$$AD = YZ^2 [= x^2]$$

$$PG = \frac{1}{5} OY^2 [= b^2]$$

$$BD = YZ \cdot \left(\frac{6}{5} OY - YZ\right) [= x(a-x)]$$



Donats un segment AB i un quadrat PG de costat PQ ,
apliqueu sobre AB , amb defecte d'un quadrat AD , un
rectangle BD d'àrea igual a la del quadrat PG .



En el nostre llenguatge, si $r = OY$ és el radi,

$$\boxed{x(a - x) = b^2}$$

en què

$$a = \frac{6r}{5}$$

$$b^2 = \frac{r^2}{5}$$

Estudi d'un *sangaku*. Resolució 3

En aquest punt l'anàlisi seguiria* i, un cop acabada, la **presentació clàssica** que farien **de la solució** del problema seria,

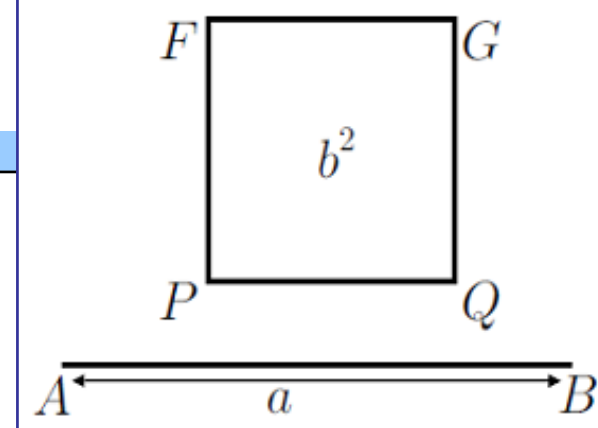
- Evitar de fer menció de l'anàlisi
- Donar la construcció de la solució
- Demostrar la seva validesa.

(*) Podeu consultar-la, junt amb la d'altres construccions de solucions d'equacions de segon grau a Nolla [2006] *Estudis i activitats sobre problemes clau de la història de les matemàtiques*, cap 2, 88-102.

El **teorema II.11** dels *Elements* (secció àuria d'un segment en llenguatge d'àrees) és una via d'entrada excel·lent per experimentar amb l'anàlisi geomètrica grega en el terreny dels problemes d'aplicació d'àrees equivalents a la resolució d'equacions de segon grau.

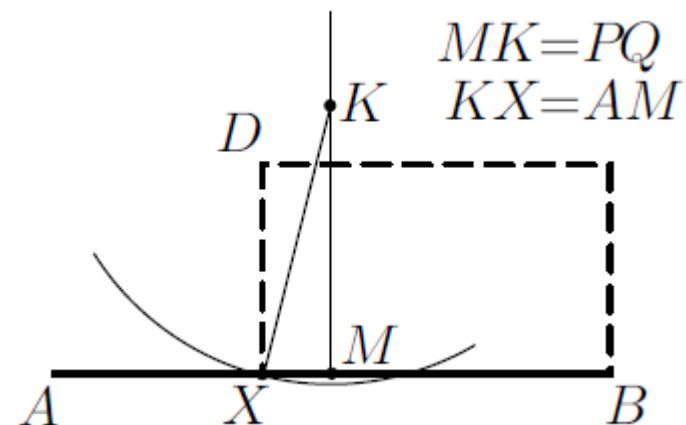
Estudi d'un *sangaku*. Resolució 3

Construcció



Considerem

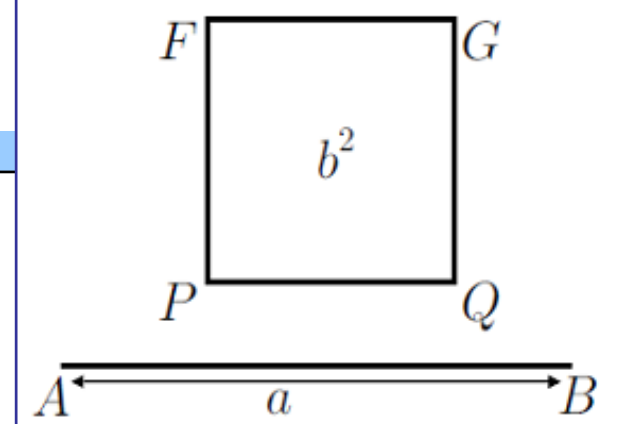
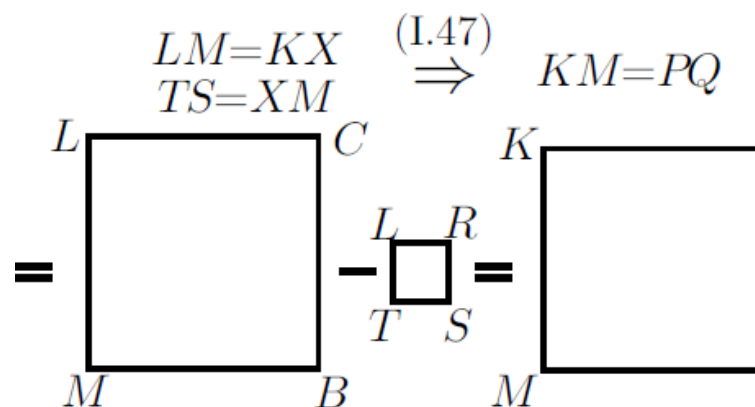
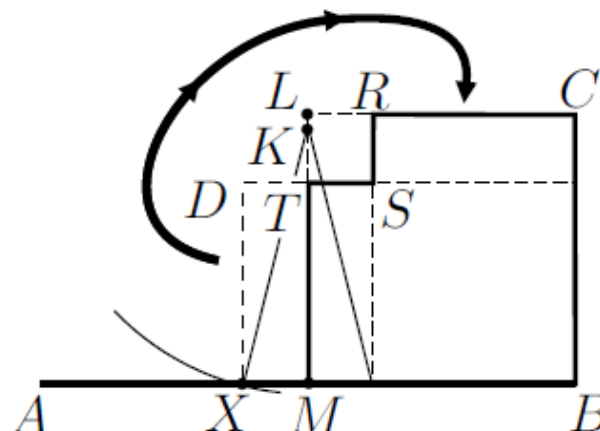
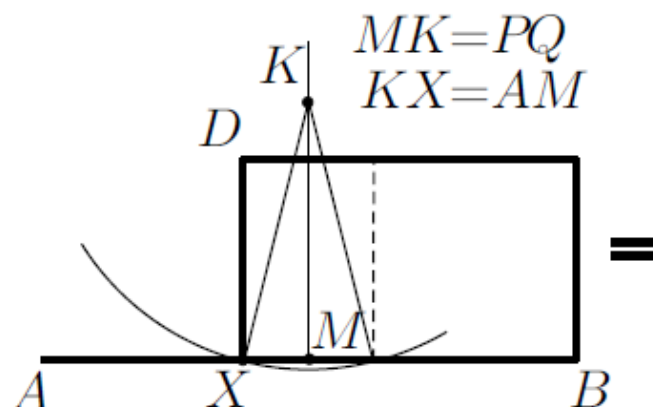
- El punt mitjà M d' AB i el punt K sobre la mediatriu d' AB amb $MK = PQ$.
- Un dels punts X d'intersecció de la circumferència (K, AM) amb AB .



Lavors el rectangle buscat té costats BX i $XD = XA$.

Estudi d'un sangaku. Resolució 3

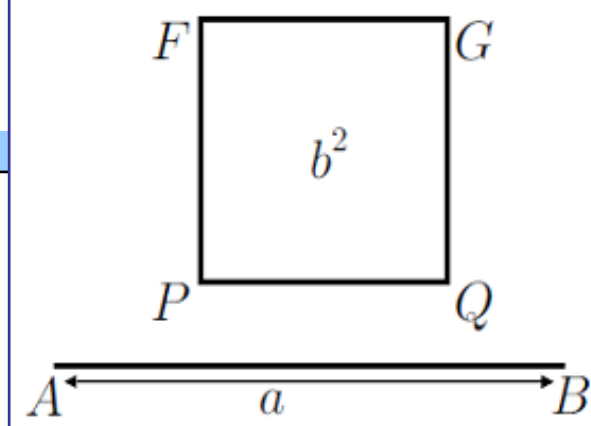
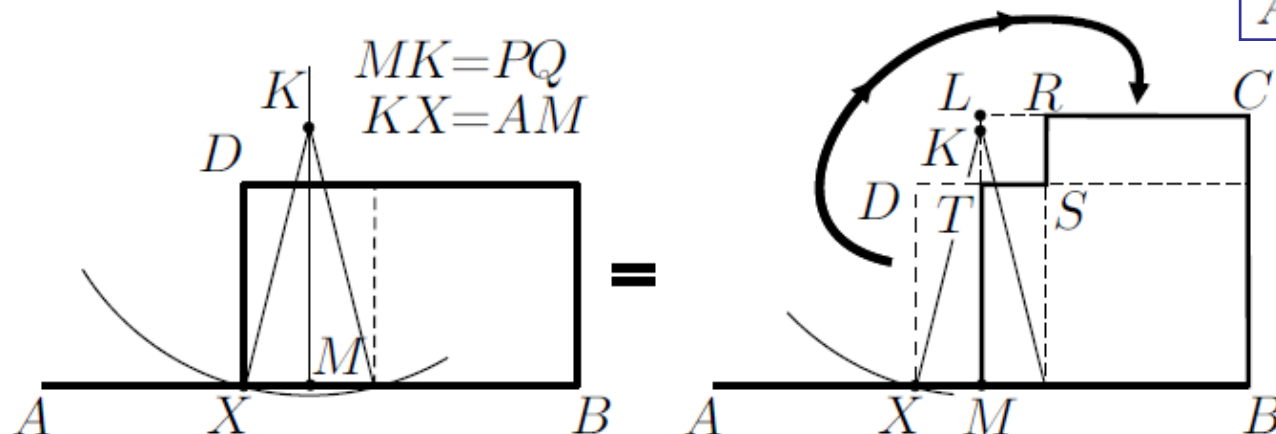
Demostració*



(*) [Geometria del tangram \[generalitzada\]](#)/Teorema de Pitàgores

Estudi d'un sangaku. Resolució 3

Valor del **costat del quadrat** $2x = 2AX$, solució del sangaku, en funció del **radi** r .



Considerem peces q quadrades bàsiques de costat $u=r/5$ i recordem que

$$AB = a = 6r/5 \quad PG = b^2 = r^2/5$$

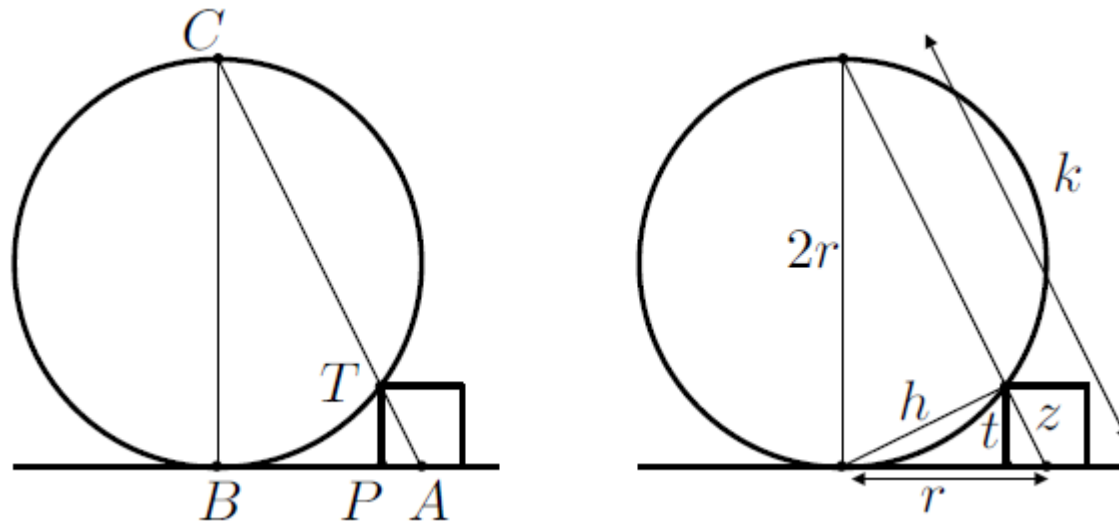
Llavors

$AB = 6u \implies MB = 3u \implies LB = 9q$ i, en ser $PG = 5q$, es conclou que

$$LS = 9q - 5q = 4q \implies MX = 2u \implies AX = MB - MX = 1u \implies 2x = 2u = \frac{2r}{5}$$

Estudi d'un *sangaku*. Resolució 4

- Anàlisi i resolució geomètrica a l'estil de la tradició euclidiana en el marc de la teoria de la semblança



- Resultat de l'anàlisi: A, T i C estan alineats
- Construcció
- Relació entre el radi i el costat del quadrat,

$$\frac{r}{t} = \frac{k}{h} = \frac{k - z + z}{h} = \frac{k - z}{h} + \frac{z}{h} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Sangakus com a recursos d'aula

Hem mostrat que els problemes continguts en els *sangakus* són susceptibles de **tractaments algebriques i geomètrics**.

Això es tradueix en que es poden utilitzar en les activitats amb alumnes

- de manera que es reflecteixi la **complementarietat dels llenguatges de l'àlgebra i la geometria**,
- en diferents etapes de desenvolupament del pensament i coneixement.

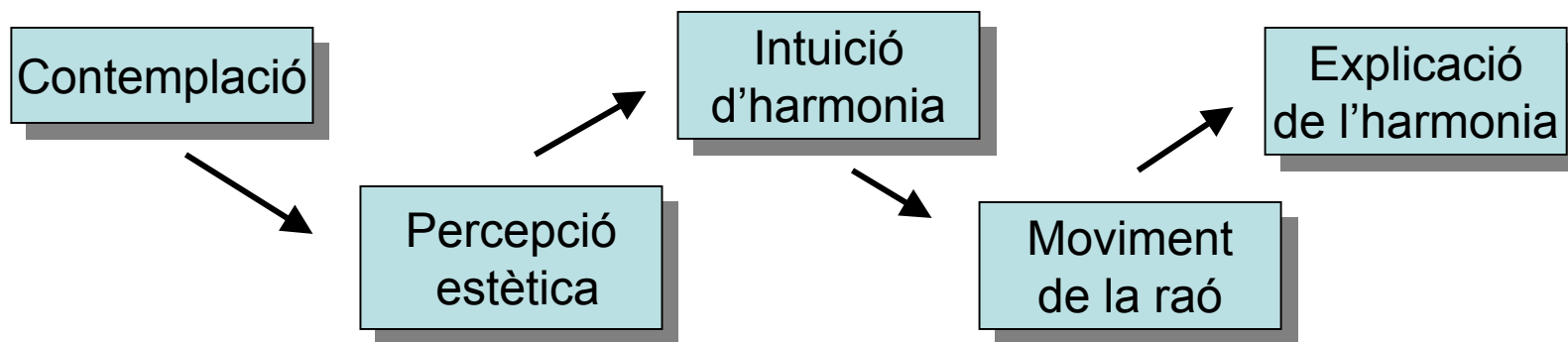
Si agafem com a referència el model de Van Hiele(p.2) es poden crear recursos i presentacions per a l'alumnat que es trobi majoritàriament implicat en els seus tres primers nivells:

- Visualització o reconeixement
- Anàlisi
- Ordenació o classificació

Sangakus com a recursos d'aula

Generació de recursos en què es pretén, reproduir amb l'alumnat les diferents etapes presentades a l'esquema **contemplació-raó** de cara a,

- percebre la matemàtica com
 - un fenomen cultural
 - una via d'enriquiment personal
- constatar la validesa dels seus llenguatges en el pla racional
- assolir els rudiments d'aquest llenguatges



Sangakus com a recursos d'aula

Una proposta de reproducció de les etapes.

- **Introducció de l'entorn on es troba el problema** de cara a crear un estat perceptiu favorable i **presentació de la imatge del *sangaku*** que es vol estudiar sense cap tipus més d'informació.
(Contemplació—Percepció estètica—Intuïció d'harmonia)
- **Invitació als alumnes a fer-ne una representació acurada a mà alçada** i debat sobre les dificultats que sorgeixen de cara a una representació satisfactòria i, consegüentment, les propietats geomètriques observades.
(Intuïció d'harmonia—Moviment de la raó)
- **Plantejament del problema** a resoldre que pot ser el mateix que proposa l'enunciat del *sangaku* o qualsevol altre que hagi sorgit com el de fer-ne una representació amb regla i compàs.
Aquí es pot optar per **elaborar un document per la alumne que el guiï** en l'anàlisi del problema.
Finalment es fa **un recull dels mètodes i propietats utilitzades** en l'estudi. També, en funció dels objectius perseguits i del tipus d'alumnat, es pot aprofundir en el seu estudi abstracte.
(Moviment de la raó—Explicació de l'harmonia)

Sangakus com a recursos d'aula

Quant al **document-guia** se'n poden trobar tres a Nolla-Masip [2009] [Sangakus. Recursos de geometria](#).

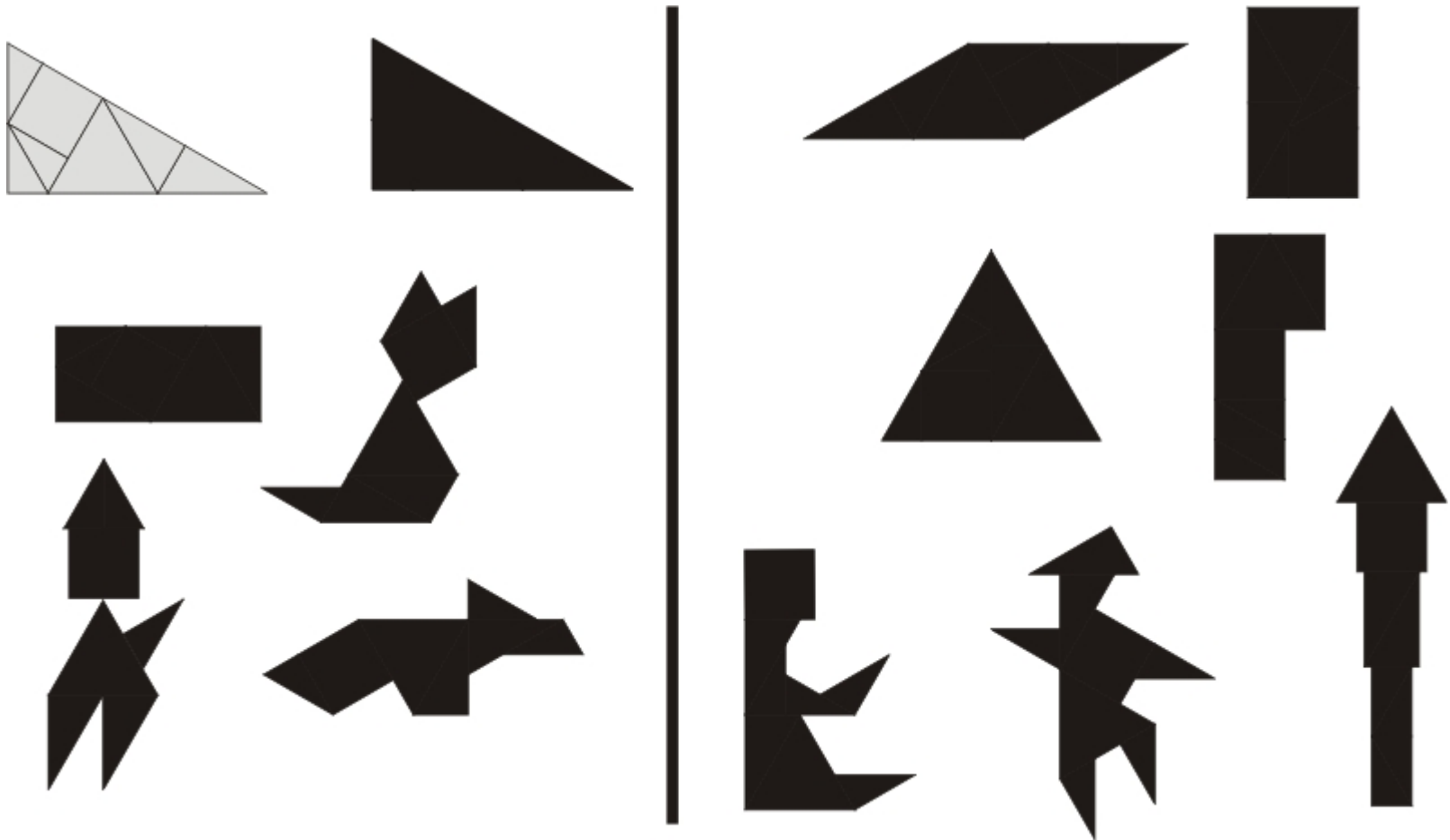
Cadascun dels tres documents es presenta amb l'estructura següent:

- **Activitat guiada** per a l'alumnat.
- **Full del professor** per a l'activitat que inclou
 - el **tipus d'alumnat** a qui va dirigida
 - les **qüestions curriculars** implicades
 - Una **proposta d'activitats complementàries**. Alguns d'aquests aspectes es desenvolupen en un annex d'eines complementàries per al professorat.
- **Proposta de resolució** dels diferents apartats de l'activitat.

D'aquests documents-guia, els dos primers estan dedicats a l'estudi del problema discutit anteriorment i el tercer a l'estudi del [problema 2](#) de la galeria que presentarem al final.

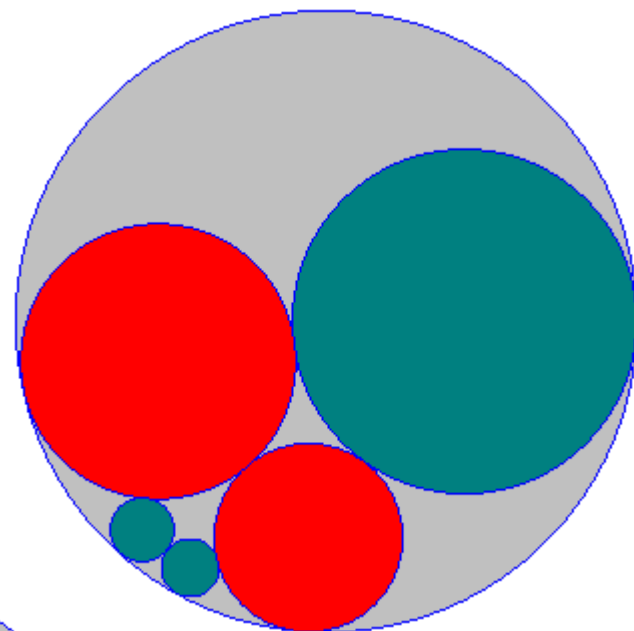
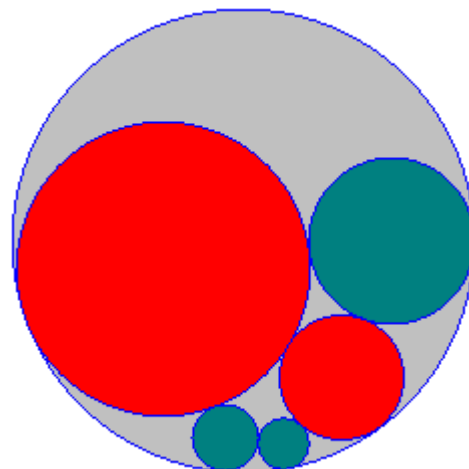
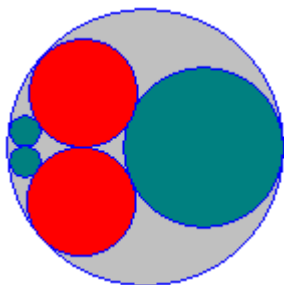
Sangakus com a recursos d'aula

Tangram 30-60-90



Galeria de *sangakus* per a la secundària

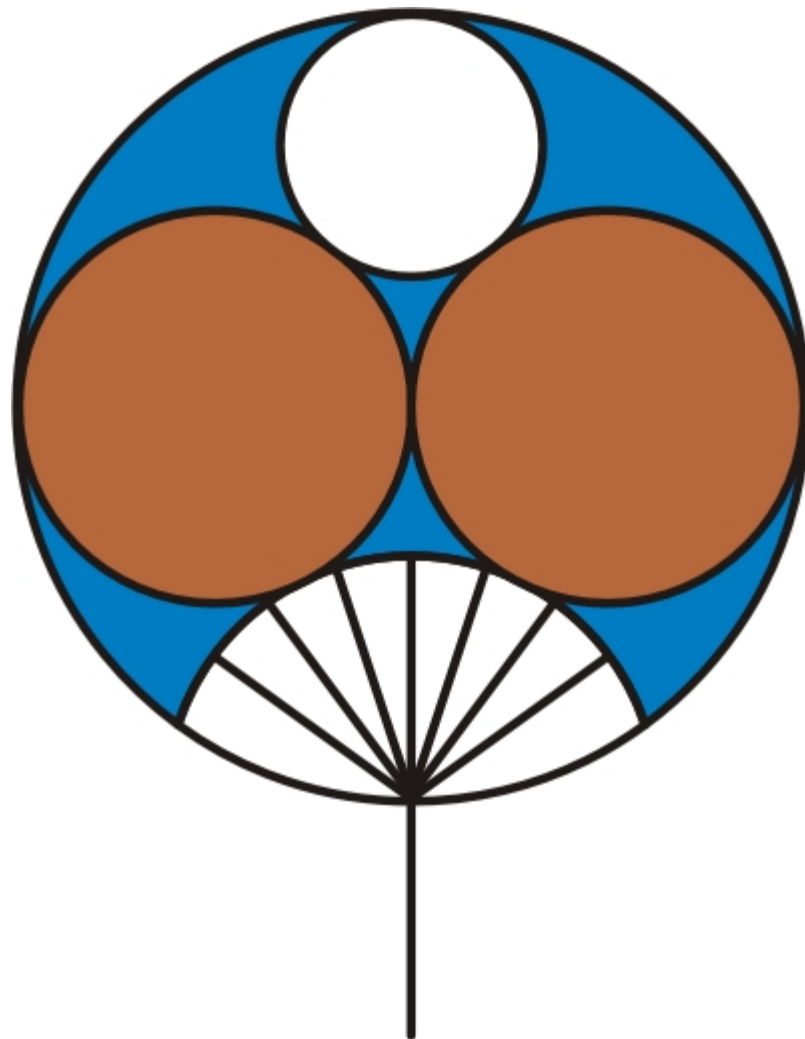
Es presenten **dotze enunciats** extrets de sangakus de nivell de dificultat divers. A més de resoldre la qüestió proposada es pretén fer-ne la construcció. Els sis primers es poden adequar per a l'elaboració de recursos a partir del segon cicle d'ESO i els sis últims per a l'alumnat de BAT i treballs de recerca.



Galeria de *sangakus* per a la secundària

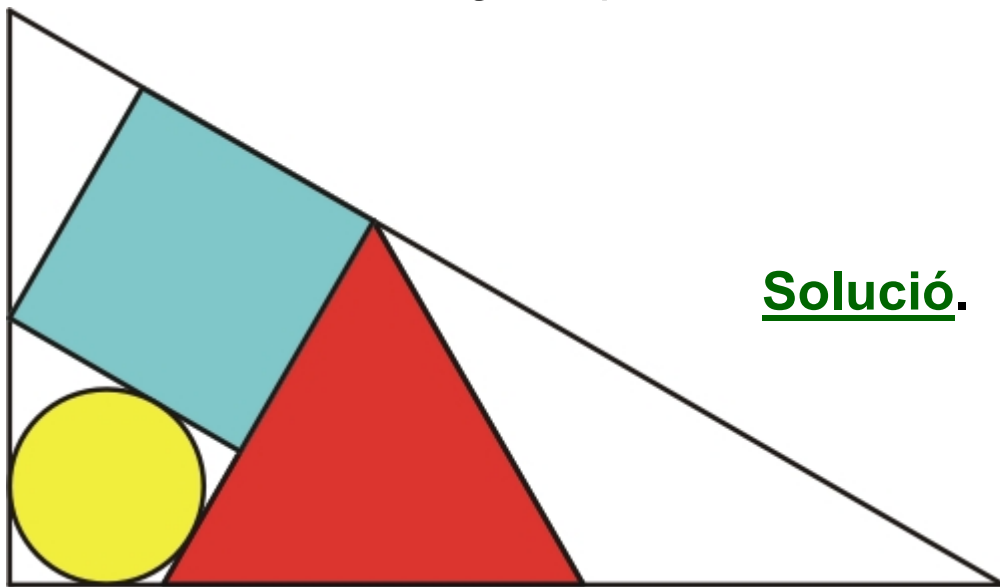
Enunciat 1. Trobeu la relació entre els radis, r i R , del cercle més petit i el cercle que inclou tot el disseny, si els altres dos cercles inscrits són iguals i els seus centres estan sobre el diàmetre del cercle gran.

Solució. $r = \frac{R}{3}$



Galeria de *sangakus* per a la secundària

Enunciat 2. Si les figures inscrites en el triangle rectangle són un triangle equilàter, un quadrat i un cercle tangent en tots els seus contactes, trobeu la relació entre el costat l del triangle equilàter i el catet vertical c .



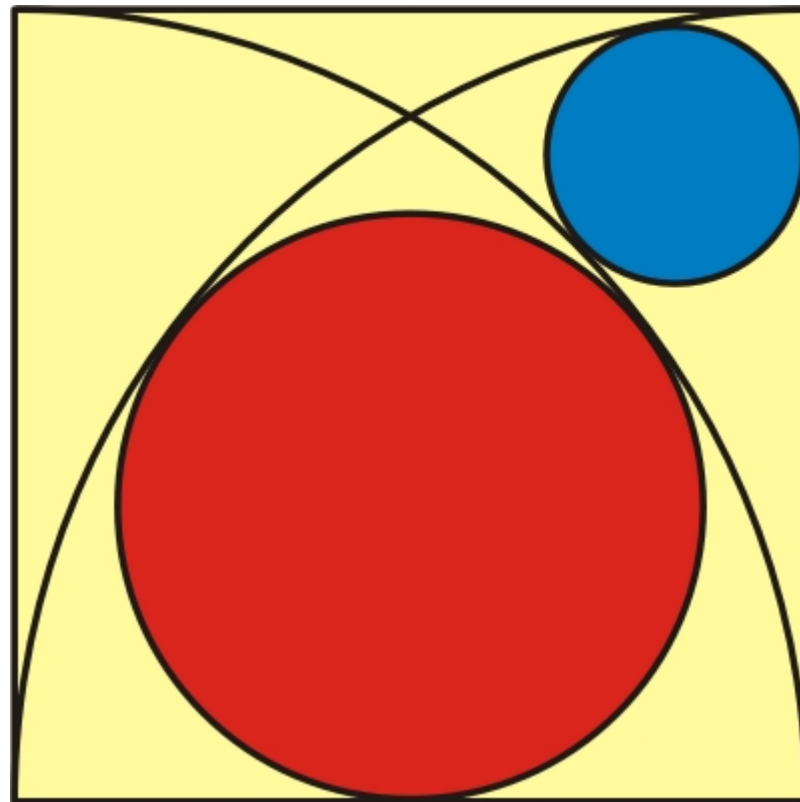
Solució. $l = (\sqrt{3} - 1) c$

Galeria de *sangakus* per a la secundària

Enunciat 3. Els arcs de les figures són quarts de cercle amb el centre sobre els dos vèrtexs de la base del quadrat de costat a . Trobeu la relació entre el radi R del cercle gran i a , i la del radi r del cercle petit i a .

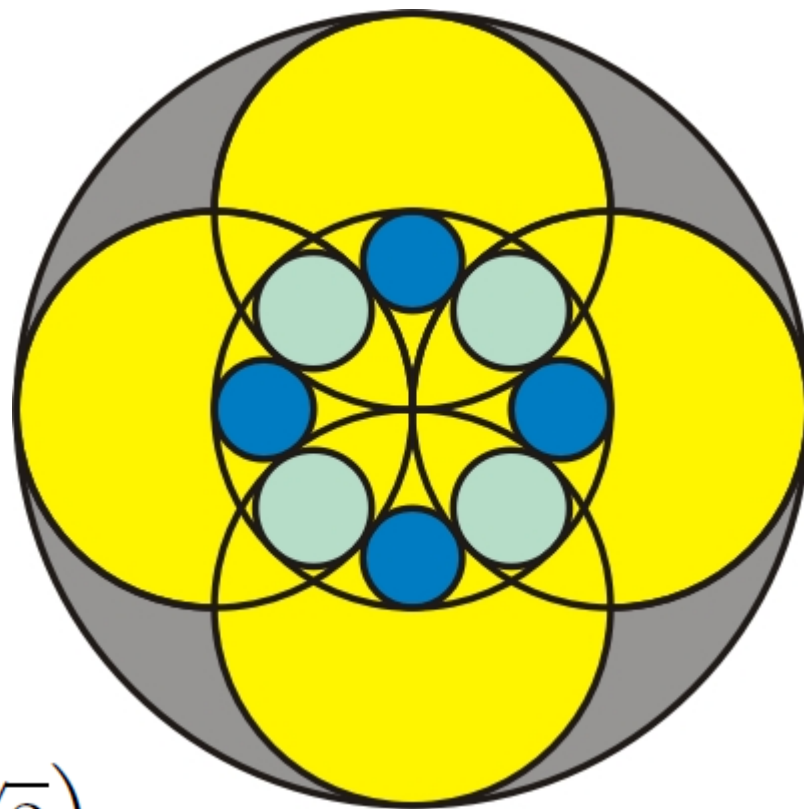
Solució.

$$R = \frac{3}{8} a$$
$$r = \frac{1}{6} a$$



Galeria de *sangakus* per a la secundària

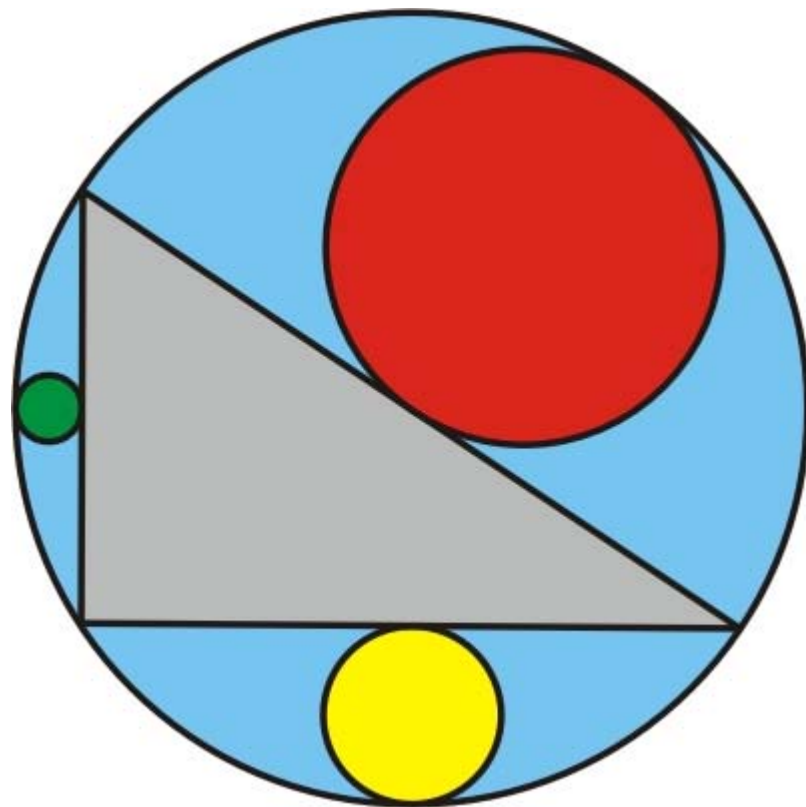
Enunciat 4. Entre els cinc cercles de radi a inscrits inscrits en el cercle gran de radi $2a$ hi ha dos tipus de cercles més petits inscrits tangencialment de radis $R > r$. Trobeu la relació entre R i r .



Solució.
$$R = 2 \left(2 - \sqrt{2} \right) r$$

Galeria de *sangakus* per a la secundària

Enunciat 5. Trobeu la relació entre els tres radis, — R , r_1 i r_2 —, dels cercles inscrits respectivament entre hipotenusa-catet vertical-catet horitzontal i la circumferència.

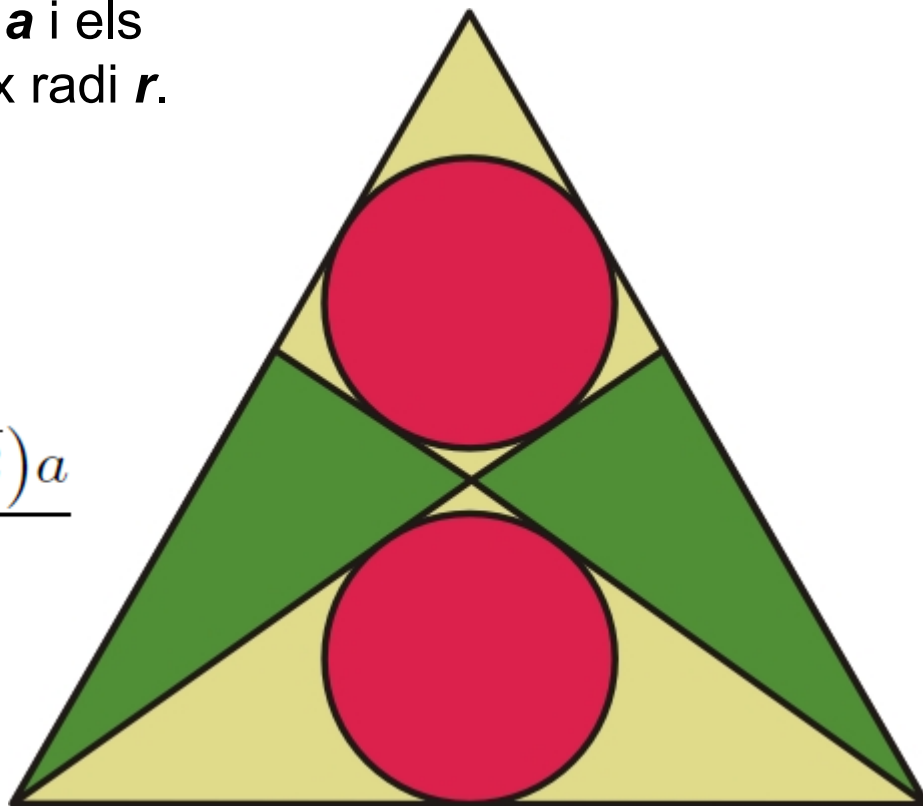


Solució.
$$R = r_1 + r_2 + \sqrt{2r_1r_2}$$

Galeria de *sangakus* per a la secundària

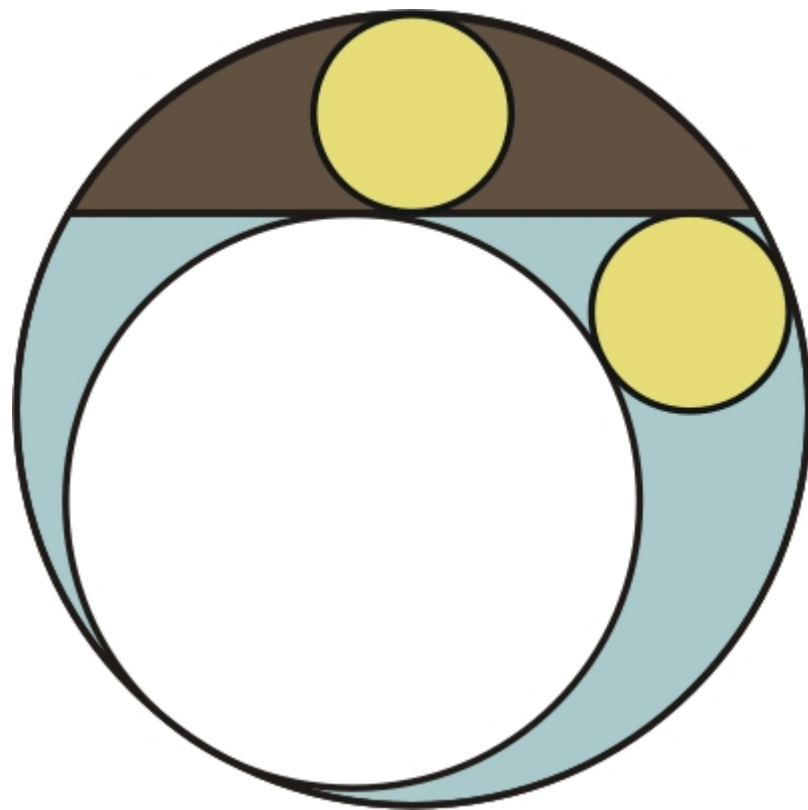
Enunciat 6. Els cercles inscrits entre el triangle equilàter de costat a i els dos segments tenen el mateix radi r . Trobeu la relació entre r i a .

Solució.
$$r = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})a}{2}$$



Galeria de *sangakus* per a la secundària

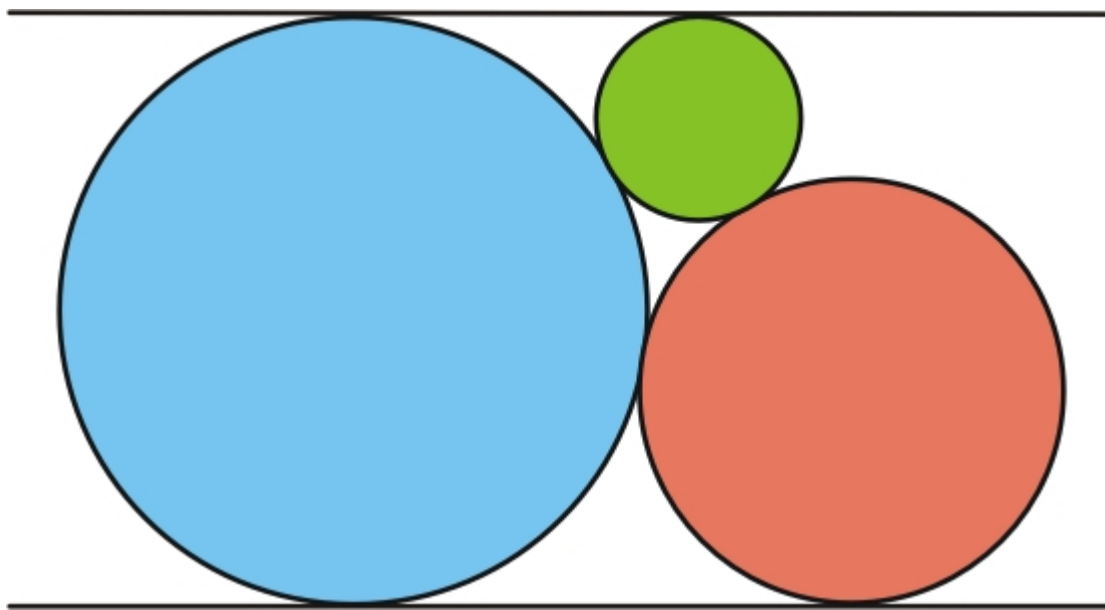
Enunciat 7. Els dos cercles petits tenen el mateix radi r . Si anomenem a el radi del cercle circumscribit i R el radi de l'altre cercle inscrit, trobeu r en funció de R i de a .



Solució.
$$r = 2\sqrt{R} \left(\sqrt{a} - \sqrt{R} \right)$$

Galeria de *sangakus* per a la secundària

Enunciat 8. Els cercles inscrits entre les paral·leles són tangents. Trobeu la relació entre els radis r_1 del gran, i r_2 , r_3 dels petits.

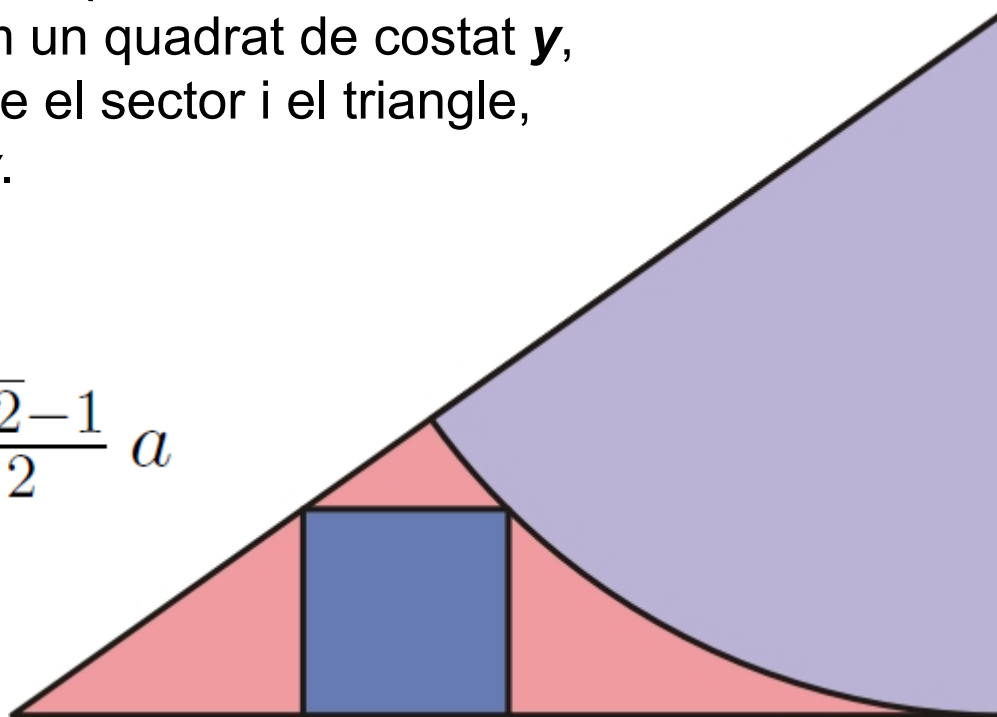


Solució. $r_1^2 = 4r_2r_3$

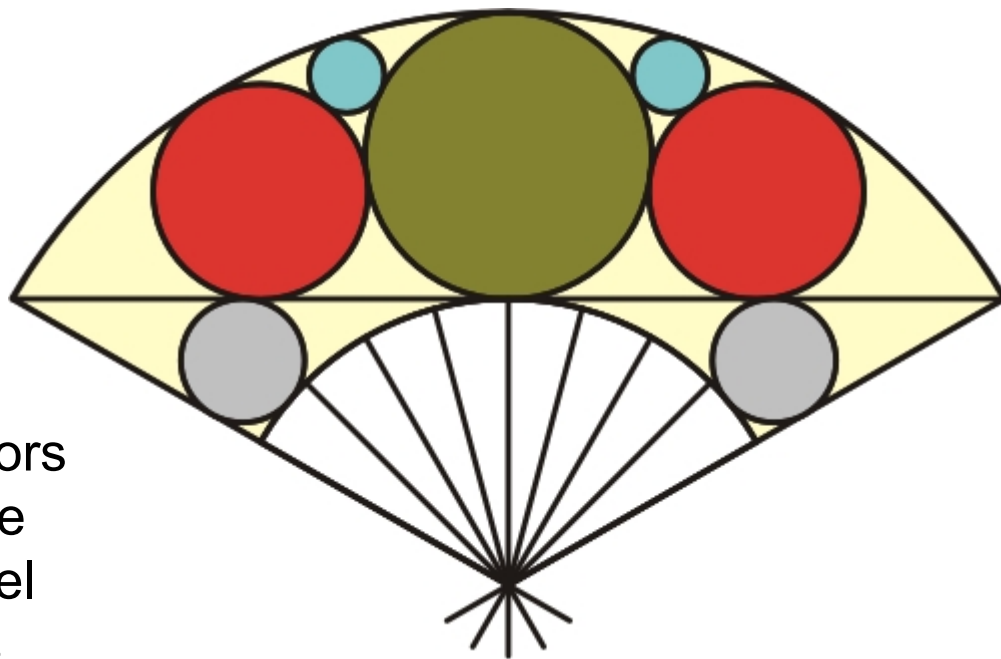
Galeria de *sangakus* per a la secundària

Enunciat 9. En un triangle rectangle de catet horitzontal a fix i catet vertical x variable tracem un sector amb centre el vèrtex superior i radi x , tal com indica la figura. Si inscrivim un quadrat de costat y , — que depèn de x —, entre el sector i el triangle, trobeu el màxim valor de y .

Solució.
$$y = \frac{\sqrt{2}-1}{2} a$$



Galeria de sangakus per a la secundària

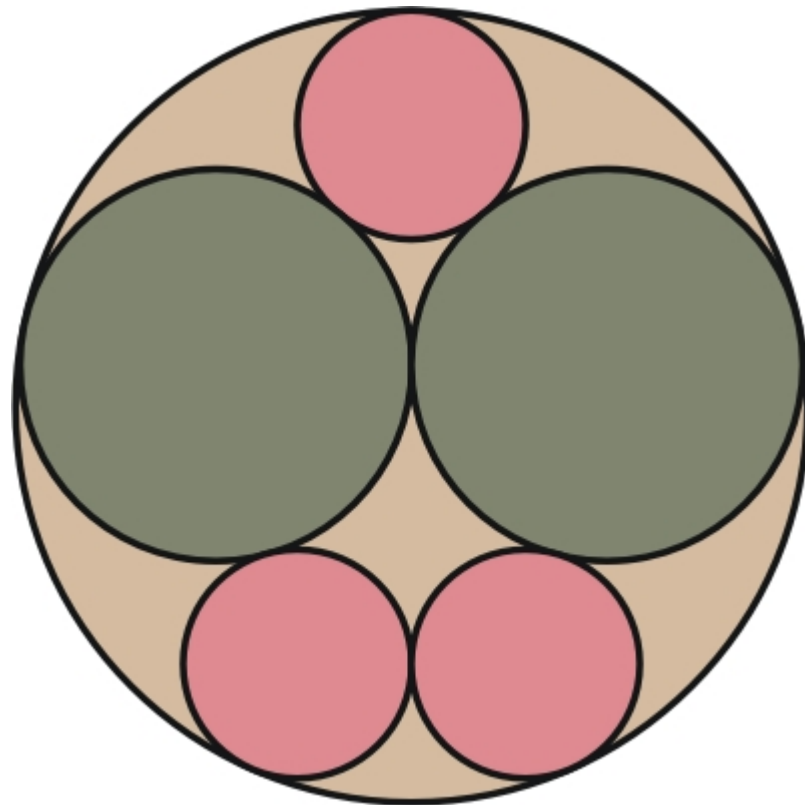


Enunciat 10. Entre dos sectors de cercle concèntrics tals que el radi del gran és el doble del petit hi ha inscrits els cercles de la figura. La figura és simètrica respecte un eix vertical que passa pel centre dels sectors. Trobeu la relació entre els radis, $r < R$, dels dos cercles més petits.

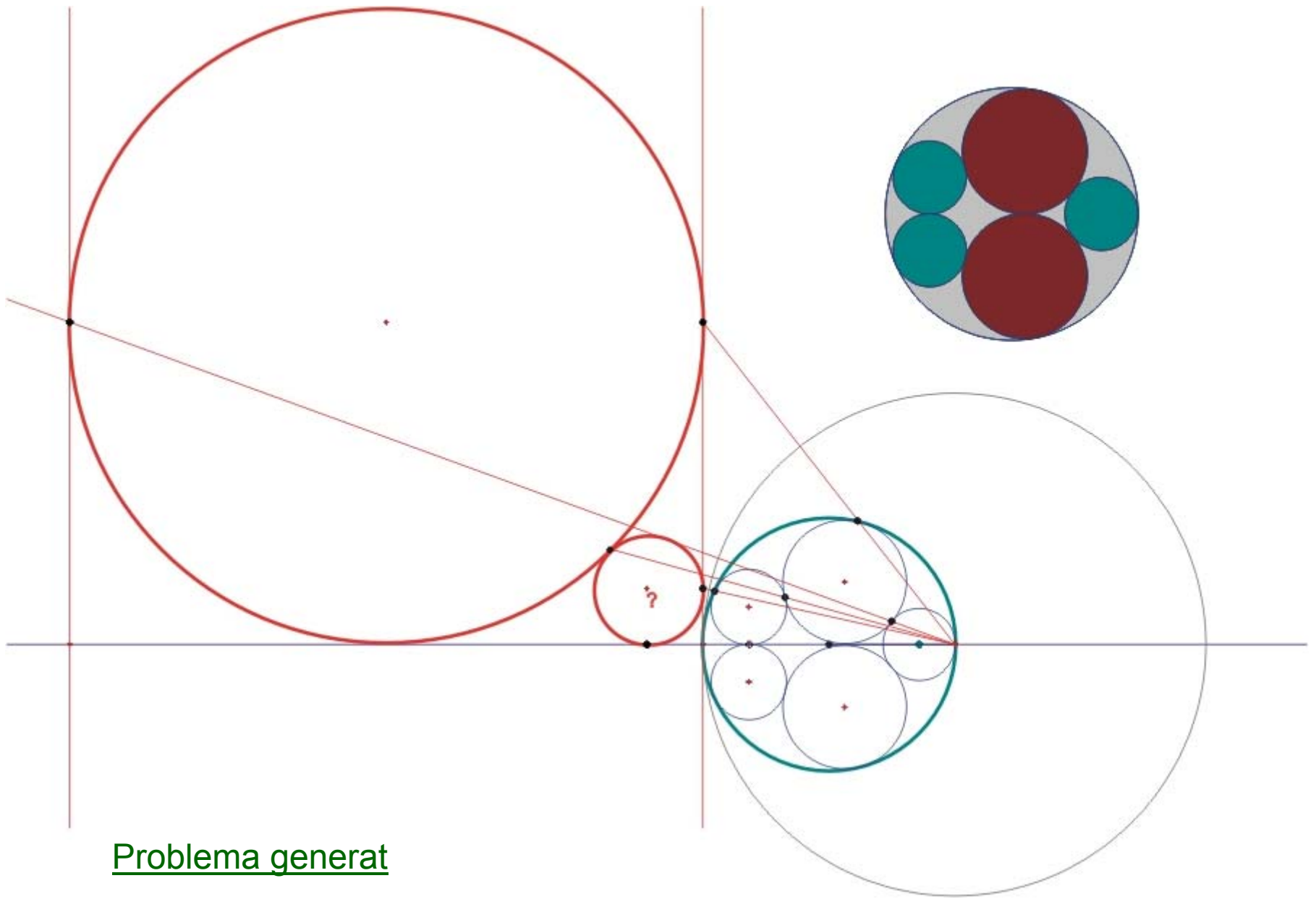
Solució. $\frac{R}{r} = \frac{31}{2} - 8\sqrt{3}$

Galeria de *sangakus* per a la secundària

Enunciat 11. Tenim cinc cercles inscrits en una circumferència de radi a , amb les tangències que es mostren a la figura. Els tres més petits tenen el mateix radi r , els dos més grans el mateix radi R . Trobeu la relació entre a i r .



Solució.
$$a = \left(1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{4\sqrt{2}+5}{7}} \right) \cdot r$$



Problema generat

Galeria de *sangakus* per a la secundària

Enunciat 12. Aquest és un problema inspirat en l'observació d'alguns *sangakus* amb configuracions de cercles tangents com l'anterior. Tenim la configuració de la imatge adjunta en què tres cercles inscrits tenen els centres sobre un diàmetre del cercle exterior. Es demana de construir la figura fixant el més gran dels tres cercles citats.

