# Sobre el *tianyuan* i l'optimització en la matemàtica japonesa

Ramon Nolla
INS Pons d'Icart de Tarragona.

## 1 El mètode del *tianyuan*

Takebe Katahiro [1664-1739] en el *Tetsujutsu sankei*, (Tractat sobre el procediment [o tècnica] per acumulació [o connexió d'exemples o casos particulars estudiats]), de 1722, explica que el mètode del *tianyuan*,

- Parteix del principi de la introducció de l'element desconegut, (*celestial*).
- L'utilitza per establir una equació a partir de les condicions del problema.
- I, finalment, amb una regla que només implica multiplicacions i sumes aplicades d'una manera recurrent, dóna la solució d'una classe molt gran de problemes.

Considerem qu amb l'aplicació del mètode obtenim l'equació $2x^3-5x^2+8x-20=0$. L'etapa final del *tianyuan* proporciona una arrel de l'equació o un valor aproximat d'aquesta per aproximacions successives. És a dir, si anomenem $p(x)=2x^3-5x^2+8x-20$, se cerquen successivament nombres $x_0,\ x_1,\ \dots\ x_n$ tals que $p(x_0+x_1+\cdots+x_n)\cong 0$.

### Presentació

Amb l'objectiu de contrastar-les, presentem dues formes d'actuació, la segona de les quals presenta un estalvi de càlcul i segueix i justifica la marxa del *tianyuan*:

(1) Càlcul directe: $p(x_0)=2x_0^3-5x_0^2+8x_0-20$, en què hem de fer 9 operacions.
(2) Propietat distributiva: $p(x_0)=\big((2x_0-5)x_0+8\big)x_0-20$, en què hem de fer 6 operacions.[1]

Com s'ha dit, la segona proposta és la que segueix el mètode i, alhora, el justifica:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & 8 & -20 \\ x_0 & & 2x_0 & (2x_0-5)x_0 & \big((2x_0-5)x_0+8\big)x_0 \\ \hline & 2 & 2x_0-5 & (2x_0-5)x_0+8 & \boxed{\big((2x_0-5)x_0+8\big)x_0-20} \end{array}$$

Seguim amb el procediment que es desenvolupa en $n$ etapes, una per a cada aproximació de la solució. En aquest cas en seran dues. Comencem amb $x_0=2$ per a la primera aproximació:

- $\boxed{\text{Primera etapa}}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & 8 & -20 \\ 2 & & 4 & -2 & 12 \\ \hline & 2 & -1 & 6 & \boxed{-8} \\ 2 & & 4 & 6 & \\ \hline & 2 & 3 & \boxed{12} & \\ 2 & & 4 & & \\ \hline & \boxed{2} & \boxed{7} & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & 8 & -20 \\ 3 & & 6 & 3 & 33 \\ \hline & 2 & 1 & 11 & 13 \end{array}$$

[1] Recompte d'operacions per al grau $n$ en què s'observa l'economia d'operacions de l'opció (2),

(a) En el càlcul directe el nombre màxim d'operacions és
$$n+n+\big(1+2+\cdots(n-1)\big)=2n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}.$$
(b) Quan apliquem la propietat distributiva el nombre màxim d'operacions és $n+n=2n$.

Primera conclusió:

$$\left.\begin{array}{l} p(2) = -8 \\ p(3) = 13 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 2 \text{ no és solució de l'equació i existeix una solució } x \in (2,3).$$

- $\boxed{\text{Segona etapa}}$

Se cerca una segona aproximació, és a dir, $x_1$ tal que $p(2 + x_1) \cong 0$. Amb aquesta finalitat es consideren els coeficients emmarcats com a coeficients d'una nova equació i assignarem a $x_1$ el valor o l'aproximació de la solució d'aquest última. Provem amb $x_1 = 0.5$,

$$\begin{array}{c|cccc} & \boxed{2} & \boxed{7} & \boxed{12} & \boxed{-8} \\ 0.5 & & 1 & 4 & 8 \\ \hline & 2 & 8 & 16 & \boxed{0} \end{array}$$

Llavors, en ser $x_1 = 0.5$ solució de l'última equació, la solució de l'equació inicial és

$$x = x_0 + x_1 = 2 + 0.5 = 2.5$$

## Justificació de la transició entre etapes

Pretenem de trobar una explicació de l'elecció dels elements emmarcats en la primera etapa per fer els càlculs de la segona. Recordem que cercàvem $x_1$ tal que $p(2 + x_1) \cong 0$. Fem el càlcul directe:

$$\begin{aligned} 0 \cong p(2 + x_1) &= 2(2 + x_1)^3 - 5(2 + x_1)^2 + 8(2 + x_1) - 20 \\ &= 2x_1^3 + (12 - 5)x_1^2 + (24 - 20 + 8)x_1 + (2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 20) \\ &= \boxed{2}\, x_1^3 + \boxed{7}\, x_1^2 + \boxed{12}\, x_1 - \boxed{8} \end{aligned}$$

És a dir que l'aplicació de l'algoritme que porta a l'obtenció i elecció dels coeficients de la nova equació queda justificada perquè el valor de $x_1$, segons s'ha vist, ha de satisfer-la.

En general, considerem l'equació $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, i les aproximacions $x_0$ i $x_0 + x_1$ a una solució. Observem que si utilitzem el desenvolupament de la potència d'un binomi i reordenem,[2]

$$\begin{aligned} p(x_0 + x_1) &= a(x_0 + x_1)^3 + b(x_0 + x_1)^2 + c(x_0 + x_1) + d \\ &= ax_1^3 + (3ax_0 + b)x_1^2 + (3ax_0^2 + 2bx_0 + c)x_1 + (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d). \end{aligned}$$

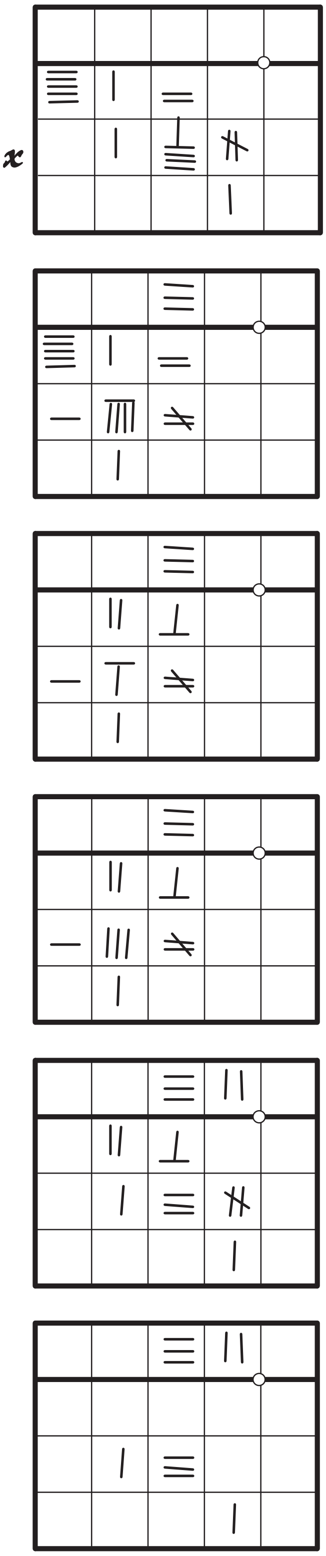
Llavors, el *tianyuan* és una forma excel·lent d'aconseguir els coeficients de l'equació que ha de satisfer $x_1$. Una altra cosa seria descobrir els camins que van seguir per descobrir l'algoritme. Aquí ens limitem a confirmar-ho.

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ x_0 & & ax_0 & ax_0^2 + bx_0 & ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 \\ \hline & a & ax_0 + b & ax_o^2 + bx_0 + c & \boxed{ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d} \\ x_0 & & ax_0 & 2ax_0^2 + bx_0 & \\ \hline & a & 2ax_0 + b & \boxed{3ax_0^2 + 2bx_0 + c} & \\ x_0 & & ax_0 & & \\ \hline & \boxed{a} & \boxed{3ax_0 + b} & & \end{array}$$

[2]Aquestes tècniques estaven a l'abast dels matemàtics japonesos i dels xinesos dels quals les havien heretat.

## Càlcul de la solució de $x^2 - 192x + 5120 = 0$ pel mètode del *tianyuan*

En la primera columna es mostra la resolució amb l'ús dels *sangi*, —el petit cercle ∘ representa la separació part entera i decimal—. En la segona, la seva transcripció en numeració aràbiga. Finalment, en la tercera columna es presenten els càlculs en la configuració actual de dues maneres: A l'opció 1 es treballa amb l'aproximació $x = 30$, mentre que en l'opció 2 es treballa amb la mateixa aproximació però es fan els càlculs amb l'ús de la xifra 3 de les desenes, és a dir es treballa amb $y$ tal que $x = 10y$. En aquesta última opció es reprodueixen més fidelment les manipulacions dels *sangi* en la primera columna. Amb els símbols ⓐ, ⓑ i ⓒ s'han indicat les configuracions amb càlculs.




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 1 | 2 | 0 | |
| $x$ | | 1 | 9 | 2 | – |
| | | | | 1 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | | |
| | 5 | 1 | 2 | 0 | |
| $x$ | 1 | 9 | 2 | | – |
| | | 1 | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓐ | | | 3 | | |
| | | 2 | 6 | 0 | |
| $x$ | 1 | 6 | 2 | | – |
| | | 1 | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓑ | | | 3 | | |
| | | 2 | 6 | 0 | |
| $x$ | 1 | 3 | 2 | | – |
| | | 1 | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | 2 | |
| | | 2 | 6 | 0 | |
| $x$ | | 1 | 3 | 2 | – |
| | | | | 1 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓒ | | | 3 | 2 | |
| | | | | 0 | |
| $x$ | | 1 | 3 | 0 | – |
| | | | | 1 | |

**Opció1**

$\boxed{x^2 - 192x + 5120 = 0}$

$$
\begin{array}{c|ccc}
ⓐ & 1 & -192 & 5120 \\
30 & & 30 & -4860 \\
\hline
ⓑ & 1 & -162 & 260 \\
30 & & 30 & \\
\hline
 & 1 & -132 &
\end{array}
$$

1a aproximació: $x \approx 30$

$\boxed{x^2 - 132x + 260 = 0}$

$$
\begin{array}{c|ccc}
ⓒ & 1 & -132 & 260 \\
2 & & 2 & -260 \\
\hline
 & 1 & -130 & 0
\end{array}
$$

Solució: $x = 30 + 2 = 32$

**Opció 2**

$x = 10y$
$100y^2 - 1920y + 5120 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccc}
ⓐ & 100 & -1920 & 5120 \\
3 & & 300 & -4860 \\
\hline
ⓑ & 100 & -1620 & 260 \\
3 & & 300 & \\
\hline
 & 100 & -1320 &
\end{array}
$$

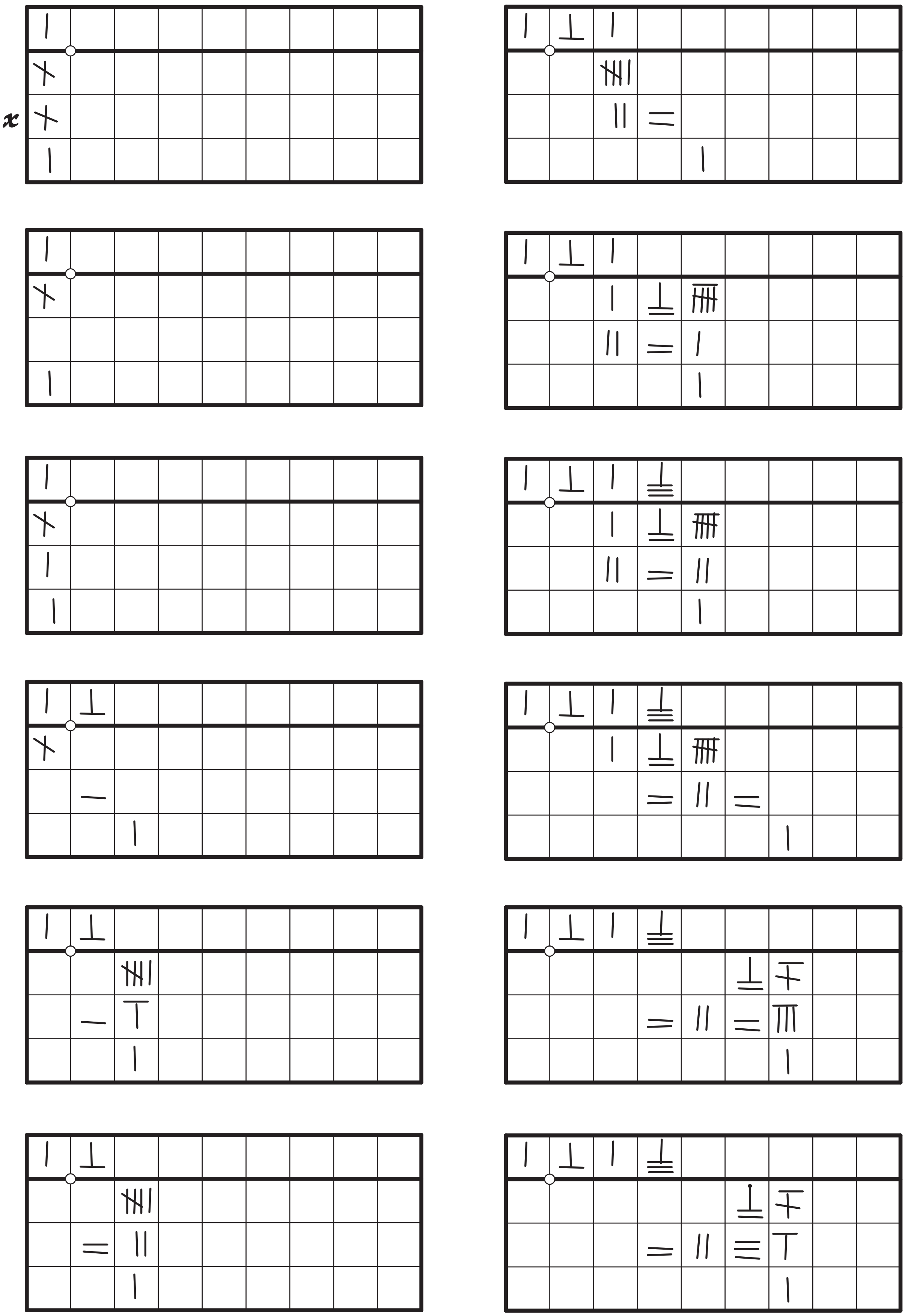
1a aproximació: $y \approx 3$

$100y^2 - 1320y + 260 = 0$
$x = 10y$
$\Longrightarrow x^2 - 132x + 260 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccc}
ⓒ & 1 & -132 & 260 \\
2 & & 2 & -260 \\
\hline
 & 1 & -130 & 0
\end{array}
$$

Solució: $x = 3 \cdot 10 + 2 = 32$

Càlcul amb reglets de la solució de $x^2 - x - 1 = 0$ pel mètode del *tianyuan*



## Càlcul de la solució de $x^2 - x - 1 = 0$ pel mètode del *tianyuan*

Al costat esquerre de cada quadre es presenten els càlculs que es farien amb els *sangi*, transcrits a numeració aràbiga, i en el costat dret dels quadres es presenten amb la disposició actual en què en la part inferior s'han fet els canvis $10^p \cdot x = y$, $1 \leq p \leq 3$.

| | 1 | |
|---|---|---|
| | 1 | – |
| $x$ | 1 | – |
| | 1 | |

| | 1 | |
|---|---|---|
| | 1 | – |
| $x$ | 0 | |
| | 1 | |

| | 1 | |
|---|---|---|
| | 1 | – |
| $x$ | 1 | |
| | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | −1 | −1 |
| 1 | | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | −1 |
| 1 | | 1 | |
| | 1 | 1 | |

| | 1 | 6 | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | – |
| $x$ | | 1 | | |
| | | | 1 | |

| | 1 | 6 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | – |
| $x$ | | 1 | 6 | |
| | | | 1 | |

| | 1 | 6 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | – |
| $x$ | | 2 | 2 | |
| | | | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | −1 |
| 0.6 | | 0.6 | 0.96 |
| | 1 | 1.6 | −0.04 |
| 0.6 | | 0.6 | |
| | 1 | 2.2 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 10 | −100 |
| 6 | | 6 | 96 |
| | 1 | 16 | − 4 |
| 6 | | 6 | |
| | 1 | 22 | |

$$\Longrightarrow x \approx 1.6$$

| | 1 | 6 | 1 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | | | – |
| $x$ | | | 2 | 2 | | |
| | | | | | 1 | |

| | 1 | 6 | 1 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 7 | 9 | – |
| $x$ | | | 2 | 2 | 1 | |
| | | | | | 1 | |

| | 1 | 6 | 1 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 7 | 9 | – |
| $x$ | | | 2 | 2 | 2 | |
| | | | | | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2.2 | −0.04 |
| 0.01 | | 0.01 | 0.0221 |
| | 1 | 2.21 | −0.0179 |
| 0.01 | | 0.01 | |
| | 1 | 2.22 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 220 | −400 |
| 1 | | 1 | 221 |
| | 1 | 221 | −179 |
| 1 | | 1 | |
| | 1 | 222 | |

$$\Longrightarrow x \approx 1.61$$

| | 1 | 6 | 1 | 8 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 7 | 9 | | | – |
| $x$ | | | | 2 | 2 | 2 | | |
| | | | | | | | 1 | |

| | 1 | 6 | 1 | 8 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 7 | 6 | – |
| $x$ | | | | 2 | 2 | 2 | 8 | |
| | | | | | | | 1 | |

| | 1 | 6 | 1 | 8 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 7 | 6 | – |
| $x$ | | | | 2 | 2 | 3 | 6 | |
| | | | | | | | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2.22 | −0.0179 |
| 0.008 | | 0.008 | 0.017824 |
| | 1 | 2.228 | −0.000076 |
| 0.008 | | 0.008 | |
| | 1 | 2.236 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2220 | −17900 |
| 8 | | 8 | 17824 |
| | 1 | 2228 | − 76 |
| 8 | | 8 | |
| | 1 | 2236 | |

$$\Longrightarrow x \approx 1.618$$

# 2 Estudi d'arrels i optimització

Farem una aproximació al tractament de les equacions i als problemes d'optimització en el Japó de l'època Edo. Cal advertir que no disposem de cap transcripció una mica completa de les fonts originals. Només disposem de les que presenta (Horiuchi) [1994], en el seu esplèndid, dens i comprimit tractat. Totes les presentacions que aquí es fan intenten aproximar-nos a l'estil *wasan* que ens ha comunicat l'obra citada, però en cap cas s'afirma que les coses hagin passat exactament així. Només el fet d'utilitzar el nostre simbolisme algèbric ja fa perdre perspectiva de perquè les coses anaven d'una manera i no d'una altra.

## Multiplicitat d'arrels i nombres límit

Una de les qüestions que Seki Takakazu es planteja en profunditat, és la de l'estudi de les equacions i les seves arrels. Una de les finalitats d'aquest estudi és la de satisfer una de les condicions que han de complir els problemes de matemàtiques: que l'equació que en resulti tingui una única arrel que satisfagui les condicions de l'enunciat. [3]

L'estudi de les equacions el porta, en primer lloc, a estendre el *tianyuan* a l'extracció de totes les arrels d'una equació. Quan troba una arrel, no s'atura sinó que continua amb el procediment per trobar les altres. De l'observació de les situacions diferents que es produeixen sortiran les condicions que cal imposar als coeficients per aconseguir que les equacions tinguin un nombre o altre d'arrels.

Considerem l'equació $x^3-7x+6=0$. Quan troba una arrel segueix amb la tècnica de treballar amb l'equació resultant per trobar un valor que en ser afegit a la primera arrel proporcioni una altra arrel.

- $\boxed{x^3-7x+6=0}$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
2 & & 2 & 4 & -6 \\
\hline
 & 1 & 2 & -3 & 0 \\
2 & & 2 & 8 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 5 & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & 6 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 6 & 5 \\
-1 & & -1 & -5 \\
\hline
 & 1 & 5 & 0 \\
-1 & & -1 & \\
\hline
 & 1 & 4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rr}
 & 1 & 4 \\
-4 & & -4 \\
\hline
 & 1 & 0
\end{array}
$$

Llavors les solucions són $x=2$, $x=2-1=1$, $x=2-1-4=-3$.[4]

Seguirem amb la seva manera d'actuar en el càlcul de les diverses solucions d'una equació que admet una solució doble. Aplicarem el *tianyuan* i observarem les diferències amb el que ha esdevingut en l'estudi de l'equació de més amunt. Això permetrà conjecturar una manera d'establir l'etapa del procediment anomenada d'«anul·lació del rang quadrat», la qual proporciona una condició necessària d'existència d'arrel doble (o «nombre límit»).

Considerem l'equació $x^3+x^2-5x+3=0$ i apliquem el *tianyuan* com abans.

[3](Horiuchi) [1994], 207-209, cita que en el *Kaihô honhen no hô* (1685) fa l'estudi de les equacions. Utilitzarà els seus resultats per corregir els enunciats dels problemes defectuosos, els quals han estat classificats en el *Daijutsu bengi no hô* (1685) (Mètode per diferenciar els enunciats i les resolucions). Els procediments per a la correcció els presenta en el *Byôdai meichi no hô* (1685) (Mètode per aclarir els enunciats defectuosos).

[4]En l'inici de cadascuna de les tres etapes del procediment es prescindeix de l'últim coeficient per la dreta igual a zero i això no afecta al resultat.

- $\boxed{x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & & 1 & 3 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & 4 & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & \boxed{0} \\ 0 & & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \\ 0 & & 0 & \\ \hline & 1 & 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rr} & 1 & 4 \\ -4 & & -4 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

En aquest cas les solucions són $x = 1$, $x = 1 + 0 = 1$, $x = 1 + 0 - 4 = -3$.

La diferència amb el primer exemple rau en l'existència d'una solució repetida. Si observem la marxa de l'algoritme, l'existència d'aquesta solució, $x = 1$, («nombre límit»), té el seu origen en «l'anul·lació del rang quadrat» que és el coeficient emmarcat en les dues primeres etapes del procediment. Aquesta serà la condició que s'imposarà per a l'existència d'aquestes solucions. Des d'aquests estudis és conscient que si el rang quadrat no s'anul·la, l'equació pot passar de tenir una solució a tenir-ne tres i d'aquí podem entendre el nom de «nombre límit».[5]

L'exemple que trobem a (Horiuchi) estudia el canvi al qual hem de sotmetre el coeficient $-3$ a l'equació sense solució $x^2 - 3x + 4 = 0$, perquè en tingui una. Si suposem que $x_0$ és arrel doble de l'equació general $ax^2 + bx + c = 0$, llavors de l'aplicació del *tianyuan* i de l'anul·lació del rang quadrat obté

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ x_0 & & ax_0 & ax_0^2 + bx_0 \\ \hline & a & ax_0 + b & \boxed{ax_0^2 + bx_0 + c = 0} \\ x_0 & & ax_0 & \\ \hline & a & \boxed{2ax_0 + b = 0} & \end{array}$$

Llavors, fent combinacions lineals de les equacions redueix el sistema

$$\left\{ \begin{array}{cc} ax_0^2 + bx_0 + c = 0 & (E_1) \\ 2ax_0 + b = 0 & (E_2) \end{array} \right.$$

a un sistema de dues equacions de primer grau en la incògnita $x$.

$$2ax_0 \cdot E_1 - bx_0 \cdot E_2 - ax_0^2 \cdot E_2 = 0 \Longleftrightarrow -abx_0^2 + (2ac - b^2)x_0 = 0$$

En resulta el sistema

$$\left\{ \begin{array}{cc} 2ax_0 + b = 0 & (E_2) \\ -abx_0 + 2ac - b^2 = 0 & (E_3) \end{array} \right. \tag{1}$$

Elimina la incògnita $x_0$ mitjançant la combinació $ab \cdot E_2 + 2a \cdot E_3 = 0$, d'on surt la condició expressada per

$$\det \begin{pmatrix} 2a & b \\ -ab & 2ac - b^2 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 4a^2c - 2ab^2 + ab^2 = 0 \Longleftrightarrow b^2 - 4ac = 0$$

[5] Amb les eines de treball actuals es pot fer una ràpida visualització de la situació. Només caldrà introduir la funció $f(x) = x^3 + x^2 + ax + 3$, $-7 \leq a \leq -3$, en un programa com GEOGEBRA i observar-ne el comportament quan varia el paràmetre $a$. Això és el que fa Seki amb les seves eines que són el procediment d'extracció d'arrels *tianyuan* aplicat al treball amb coficients numèrics i simbòlics.

Torna a l'equació i aplica aquest resultat. Obté,

$$b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Longrightarrow b^2 - 16 = 0, \text{ d'on considera el valor } b = -4.$$

Per a valors més petits ($b < -4$) l'equació té solució i per a més grans no en té. Per a aquest valor concret obté la solució $x = 2$ que rep el nom de «nombre límit», la nostra arrel doble.

## Optimització

És notable que Takebe Katahiro aplica les tècniques d'aquesta obra per resoldre problemes d'optimització en el *Tetsujutsu sankei* (1722).[6] Concretament ho fa en el problema següent.

> Sigui un paral·lelepípede en què la diferència entre la llargada i l'amplada és de 7 *shaku* i la suma de l'amplada i l'alçada és de 8 *shaku*.[7] Es vol que el volum sigui el més gran possible. Es demana la llargada, l'amplada, l'altura i el volum màxim.

A falta del document original, basant-nos en l'exposició anterior, podem conjecturar una marxa de la resolució que ens permeti flairar els seus mètodes.

Es tracta de calcular el valor màxim de l'expressió

$$V = x(x-7)(15-x) = -x^3 + 22x^2 - 105x, \text{ en què } x \text{ és la llargada.}$$

Aquest problema es resol a partir del càlcul del «nombre límit» de l'equació

$$x^3 - 22x^2 + 105x + V = 0.$$

És a dir, es tracta de calcular per a quin valor de $V$ el nombre de solucions de l'equació canvia. En el nostre llenguatge es tracta de trobar el coeficient $V$ per al qual hi ha una solució doble.

(1) Suposem que $x_0$ és «el nombre límit» o solució doble. Apliquem el *tianyuan*, anul·lem el rang quadrat i s'obté,

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -22 & 105 & V \\
x_0 & & x_0 & x_0^2 - 22x_0 & x_0^3 - 22x_0^2 + 105x_0 \\
\hline
 & 1 & x_0 - 22 & x_0^2 - 22x_0 + 105 & \boxed{x_0^3 - 22x_0^2 + 105x_0 + V = 0} \\
x_0 & & x_0 & 2x_0^2 - 22x_0 & \\
\hline
 & 1 & 2x_0 - 22 & \boxed{3x_0^2 - 44x_0 + 105 = 0} & \\
x_0 & & x_0 & & \\
\hline
 & 1 & 3x_0 - 22 & &
\end{array}$$

(2) Resulten les dues condicions sobre $x_0$ i $V$,[8]

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0^3 - 22x_0^2 + 105x_0 + V = 0 \\ 3x_0^2 - 44x_0 + 105 = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

[6] Vegeu (Horiuchi) [1994], 215-220.

[7] El *shaku* equival a 30.3 cm.

[8] Cal remarcar que per calcular i anul·lar el rang quadrat no li cal aplicar tot el procediment d'extracció perquè ja ha establert a partir dels seus càlculs i gràcies al treball amb coeficients simbòlics que

$$\begin{array}{rcl}
ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow & \text{rang quadrat} & = 2ax + b \\
ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Longrightarrow & \text{rang quadrat} & = 3ax^2 + 2bx + c \\
ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \Longrightarrow & \text{rang quadrat} & = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots
\end{array}$$

Arribat aquest punt, es redueix el sistema de dues equacions a un sistema de tres equacions de segon grau, anomenades de «substitució».[9] S'actuava fent combinacions lineals, amb coeficients del tipus $ax^p$, de les dues inicials i de les que s'anaven obtenint.[10] En aquest últim sistema s'eliminava la incògnita $x$ mitjançant combinacions lineals de les equacions en què intervenien els coeficients del sistema. En resultava l'anul·lació d'una suma de sis productes (tres de positius i tres de negatius) de tres coeficients. Aquest procediment es resumia en una regla igual a la de Sarrus, la qual SEKI intentà generalitzar als casos de 4 equacions de tercer grau i 5 equacions de quart grau amb sort diversa.

En el nostre problema s'obtindria el sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 44x + 105 = 0 \\ 44x^2 - 758x + 2310 + 3V = 0 \\ 105x^2 - (2310 + 3V)x + (11025 + 44V) = 0. \end{cases}$$

Llavors la condició de «nombre límit» és

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -44 & 105 \\ 44 & -758 & 2310 + 3V \\ 105 & -2310 - 3V & 11025 + 44V \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 27V^2 - 1012V - 705600 = 0.$$

D'aquí s'obté el volum $V = \dfrac{4900}{27} \approx 181.48$, per a la llargada $x_0 = \dfrac{35}{3} \approx 11.67$

## Observacions

- L'anul·lació del rang quadrat equival a l'anul·lació de la primera derivada. SEKI anomena «rang quadrat» de l'equació (polinomi) allò que nosaltres anomenem derivada de la funció polinòmica. Opino que, a diferència nostra, no entén el rang quadrat com el resultat d'un procés de pas al límit, —malgrat el nom de «nombre límit» donat al resultat de la seva anul·lació—. L'entén com el resultat d'una manipulació algèbrica que li permet establir la condició d'existència de «nombre límit» o solució múltiple.

- Malgrat els errors comesos per SEKI en la introducció dels determinants d'ordre superior, (HORIUCHI), 195-196 argumenta que ha obtingut un objecte del tot equivalent al determinant. Tanmateix, segueix dient, la importància que s'ha donat a aquest fet ha negligit la importància dels canvis que introdueix en la pràctica de les matemàtiques:

  (1) Voluntat de trobar i explicitar l'estructura comuna dels procediments de resolució de problemes.

  (2) La introducció de coeficients simbòlics en les equacions i creació d'un càlcul simbòlic no lligat als problemes concrets.

  (3) El recurs a exemples progressius o a enunciats paral·lels o repetitius des dels quals remarca l'analogia dels procediments.

  (4) L'ús de figures i taules per visualitzar procediments.

  Finalment diu que el canvi més evident és l'introduït en l'apartat (2), que té molta influència sobre l'estudi de les equacions i les seves arrels. Els altres apartats es poden considerar com una reactivació de l'estil dels antics tractats xinesos.

[9] Vegeu (HORIUCHI) [1994], 188-195.

[10] És una extensió per al grau 3, del mètode utilitzat en el sistema (1). Vegeu l'annex.

– De cara a la integració del pòsit que deixa l'estudi d'aquestes idees en la nostra tasca docent caldria observar l'interès de plantejar els problemes d'optimització amb el llenguatge de l'àlgebra, previ a la introducció de la derivada. Això ho faríem defugint les parts més pesades dels càlculs que hem presentat. Així la necesitat d'introduir la condició d'arrel doble es podria fer amb raonaments gràfics i el sistema de dos equacions presentat a (2) es resoldria amb les nostres tècniques:

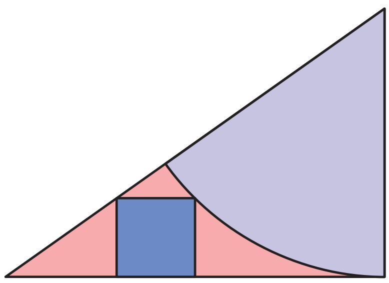
$$3x^2 - 44x + 105 = 0 \implies x = \frac{22 \pm \sqrt{484-315}}{3} = \frac{22 \pm 13}{3} = \begin{cases} 3 \\ 35/3 \approx 11.67 \end{cases}$$

$$\implies V = -\left(\frac{35}{3}\right)^3 + 22\left(\frac{35}{3}\right)^2 - 105\,\frac{35}{3} = \frac{4900}{27} \approx 181.48$$

O també,

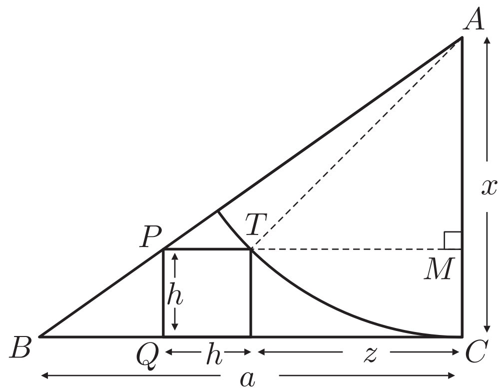
$$\begin{array}{r|cccc} & -1 & 22 & -105 & V \\ 35/3 & & -35/3 & 1085/9 & 4900/27 \\ \hline & -1 & 31/3 & 140/9 & 4900/27 = V \end{array}$$

## Aplicació a la resolució d'un *sangaku*



**Enunciat.** En un triangle rectangle de catet horitzontal $a$ fix i catet vertical $x$ variable tracem un sector amb centre el vèrtex superior i radi $x$, tal com indica la figura. Si inscrivim un quadrat de costat $y$, —que depèn de $x$—, entre el sector i el triangle, trobeu el màxim valor de $y$.
**Solució.** $y = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\,a$.
**Referència.** (Fukagawa–Rothman) [2008], 120.

- Aproximació a una resolució *wasan*.




Del teorema de Pitàgores sobre $\triangle ATM$ s'obté

$$z^2 = x^2 - (x-h)^2 = 2xh - h^2 \qquad (E_1)$$

De la semblança $\triangle PBQ \sim \triangle ABC$ s'obté

$$x(a-h-z) = a \cdot h \iff xz = ax - (a+x)h$$
$$\iff \quad x^2z^2 = a^2x^2 + (a+x)^2h^2 - 2ax(a+x)h \quad (E_2)$$

Intentarem apropar-nos al seu estil que no consistia en presentar $h$ en funció de $x$ d'on sortiria una funció racional. Més aviat mirarien de trobar, mitjançant combinacions lineals de les relacions $E_1$ i $E_2$, una equació sobre la que aplicar els seus procediments i, si s'escaigués, considerar alguna incògnita nova a partir de les antigues que simplifiqués aquesta equació.[11] Per exemple, en primer lloc fem

$$x^2 \cdot E_1 - E_2 = (2x^2 + 2ax + a^2)h^2 - x(2x^2 + 2ax + 2a^2)h + a^2x^2 = 0.$$

En segon lloc, considerem la nova incògnita $\lambda = (2x^2 + 2ax + a^2)h$. Llavors

$$h\lambda - x\lambda - a^2xh + a^2x^2 = 0 \implies h(\lambda - a^2x) - x(\lambda - a^2x) = 0 \implies (h-x)(\lambda - a^2x) = 0.$$

[11] En la tasca docent es pot elegir la via del llenguatge de funcions sense oblidar que no sempre proporciona un desenvolupament més simplificat.

Consegüentment, —desestimem la solució $h = x$—,

$$\lambda = a^2x \Longrightarrow (2x^2 + 2ax + a^2)h = a^2x.$$

Recordem que hem de trobar el valor màxim del costat $h$. Això es tradueix en imposar l'existència de «nombre límit» (solució doble) per l'equació en $x$,

$$(2h)x^2 + (2ah - a^2)x + a^2h = 0.$$

Sabem que s'havia d'anular el rang quadrat (equivalent al valor de la nostra derivada),

$$4hx + 2ah - a^2 = 0. \tag{3}$$

També sabem que d'aquí s'obtenia la condició sobre els coeficients,

$$(2ah - a^2)^2 - 4 \cdot 2h \cdot a^2h = 0 \Longleftrightarrow 4h^2 + 4ah - a^2 = 0.$$

Pel mètode del tianyuan s'obté $\boxed{h \approx 0.207a}$. Efectivament,

$$\begin{array}{r|lrr}
 & 4 & 4a & -a^2 \\
0.2a & & 0.8a & 0.96a^2 \\
\hline
 & 4 & 4.8a & -0.04a^2 \\
0.2a & & 0.8a & \\
\hline
 & 4 & 5.6a &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|lrr}
 & 4 & 5.6a & -0.04a^2 \\
0.007a & & 0.028a & 0.039396a^2 \\
\hline
 & 4 & 5.628a & \boxed{-0.000604a^2}
\end{array}$$

1a aproximació: $h \approx 0.2a$ $\qquad$ $\boxed{\text{2a aproximació: } h \approx 0.2a + 0.007a = 0.207a}$

Amb l'algoritme de resolució per radicals s'obté,

$$h = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4a^2}}{4} = \frac{-2a \pm 2a\sqrt{2}}{4} = \begin{array}{l} \nearrow \boxed{\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} \cdot a \approx 0.207107a} \\ \searrow \text{Negativa} \end{array} \tag{4}$$

Finalment, és de fàcil comprovació a partir de (3) i (4) que $\boxed{x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot a}$.

## Referències

# Referències


FUKAGAWA, H. i ROTHMAN, T. [2008]. *Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

HORIUCHI, Annick [1994]. *Les mathématiques japonaises a l'époque d'Edo*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris.

## Annex. Combinacions lineals emprades per resoldre el sistema (2) de la pàgina 8

- Sistema inicial

$$\begin{cases} x_0^3 - 22x_0^2 + 105x_0 + V = 0 & (E_1) \\ \boxed{3x_0^2 - 44x_0 + 105 = 0} & (E_2) \end{cases}$$

- Primera combinació.

$$\begin{aligned} & -22x^2 \cdot E_2 - 3x^2 \cdot E_1 + x^3 \cdot E_2 = 0 \\ & \Longrightarrow -44x^4 + 758x^3 - (2310 + 3V)x^2 = 0 \qquad (E_3) \\ & \Longrightarrow \boxed{44x^2 - 758x + 2310 + 3V = 0} \qquad (E_4) \end{aligned}$$

- Segona combinació.

$$\begin{aligned} & 105x \cdot E_2 - (-44x) \cdot E_1 + E_3 = 0 \\ & \Longrightarrow 105x^3 - (2310 + 3V)x^2 + (11025 + 44V)x = 0 \\ & \Longrightarrow \boxed{105x^2 - (2310 + 3V)x + 11025 + 44V = 0} \qquad (E_5) \end{aligned}$$

D'on resulta el sistema de les equacions $E_2$, $E_4$ i $E_5$, és a dir,

$$\begin{cases} 3x^2 - 44x + 105 = 0 \\ 44x^2 - 758x + 2310 + 3V = 0 \\ 105x^2 - (2310 + 3V)x + (11025 + 44V) = 0. \end{cases}$$