

*M'agradaria agrair la dedicació i l'esforç del meu
tutor, Ramon Nolla, sense ell aquest treball no
s'hauria pogut dur a terme. Gràcies al seu interès
i a la seva voluntat m'ha ajudat a confeccionar un
treball i, el que és més important, m'ha fet gaudir
d'una tasca ben feta.*



ÍNDEX

1	Introducció	03
2	Els arcs. Introducció	04
	2.1 Elements dels arcs	
	2.2 Tipus d'arcs	
3	Arcs objecte de recerca	07
4	Arc ogival amb una circumferència inscrita	08
	4.1 Arc ogival equilàter	
	4.1.1 Estudi algèbric	
	4.1.2 Estudi geomètric	
	4.2 Arc ogival rebaixat	
	4.2.1 Estudi algèbric	
	4.3 Arc ogival rebaixat amb circumferències inscrites	
	4.3.1 Estudi algèbric	
5	Arc carpanell	019
	5.1 Estudi algèbric	
	5.2 Estudi geomètric	
	5.3 Variant del mètode de construcció de l'arc carpanell	
6	Rosassa	028
	6.1 Estudi algèbric	
	6.2 Estudi geomètric	
7	Arc lobulat (cinc lòbuls)	035
	7.1 Estudi algèbric del cas simple de l'arc lobulat	
	7.2 Estudi algèbric de l'arc de cinc lòbuls	
8	Conclusió	046
9	Bibliografia	047
10	Fotografies i figures adjuntes	047



1 INTRODUCCIÓ

L'objectiu d'aquest treball és la recerca, mitjançant l'àlgebra, de construccions per poder traçar les diferents formes dels arcs i fer-ne la comparació amb les construccions geomètriques les quals són, en la seva majoria, estudiades a les classes de dibuix tècnic.

L'aplicació de l'àlgebra sempre ha estat una part de les matemàtiques que no s'ha ensenyat amb profunditat als instituts i a les escoles; per aquest motiu, entre d'altres, he escollit fer aquest treball. Trobo interessant les aplicacions de l'àlgebra a la vida real, i he trobat adient aplicant-la a uns elements que predominen a la nostra ciutat, els arcs. Des d'un bon principi el treball estava encaminat a estudiar algèbricament diferents tipus d'elements arquitectònics de Tarragona, concretament de la Part Alta; però a poc a poc va anar prenent forma i es va acabar centrant només en els arcs, però amb una excepció, també s'estudia una rosassa.

El treball inclou sis arcs i un rosetó, per cadascun he fet una petita introducció i els seus estudis pertinents. Les figures adjuntes a cada apartat les he construït mitjançant una sèrie de programes d'ordinador, anomenats Corel Draw i Geogebra, les fotografies han estat realitzades a la Part Alta de la ciutat de Tarragona. El treball també conté un CD que inclou:

- > La visió electrònica en PDF del treball.
- > Una carpeta WEB_AG que conté un conjunt de fitxers htm. els quals s'accedeix des del fitxer index.htm. Des d'aquest fitxer es té accés a cadascuna de les construccions del treball que es troben en els fitxers de nom fitxer_num.htm.
- > Les construccions dels fitxers resultants també es poden trobar dins de la carpeta CABRI, aquests s'han de visualitzar mitjançant el programa Cabri Geometre II.

Vaig fer l'elecció d'aquest treball a partir d'una proposta del meu tutor, Ramon Nolla, la idea de complementar i unir l'art amb les matemàtiques em va agradar. Personalment sempre he estat una persona a qui li han agradat aquestes dues grans matèries i, a més, creia que podria treure un profit en el futur, ja que els estudis que m'agradaria realitzar són els d'arquitectura.

Aquest treball és l'inici a una recerca que agafa els elements essencials dels arcs i els estudia, em refereixo a què s'estudia la primera idea geomètrica que arriba a la ment. Per falta de temps i de coneixements, els estudis podrien haver arribat a ser molt més complexos, així doncs aquesta recerca queda oberta a futurs desenvolupaments.



2 ELS ARCS. INTRODUCCIÓ

2.1 Elements dels arcs

Els arcs han estat des de sempre uns elements arquitectònics molt utilitzats, ja que han tingut un fi estètic i alhora un fi de suport. Els seus orígens es troben en les primeres construccions mesopotàmiques on els materials utilitzats eren les canyes i el fang. Aquests materials han anat evolucionant al llarg dels anys, al mateix temps que les formes que han anat rebent.

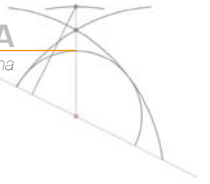
Els arcs tenen diferents parts i és important tenir una idea d'elles per poder entendre alguns conceptes anomenats al llarg del treball.



Fotografia d'un arc de mig
punt situat al pla de la Seu.

Dovella: Són les peces utilitzades per la construcció dels arcs, aquestes tenen forma de tascó i distribueixen les forces dels murs.

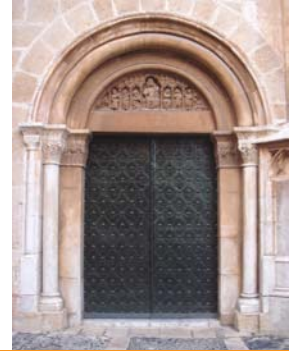
1. Línia d'arrencada, també anomenada corda o llum. És l'amplada de l'arc.
2. Fletxa, que és l'alçada de l'arc.
3. Clau, que és la dovella central i la més important.
4. Contraclau, que és la dovella següent a la clau.
5. Coixí o dovelles d'arrencada, aquestes estan als extrems de l'arc.
6. Directriu, és la línia descrita per l'arc.



2.2 Tipus d'arcs

Arc de mig punt o rodó: Aquest està format per una semicircumferència, és a dir només té un centre.

Segons on està situat aquest existeixen uns arcs derivats, aquests són: l'arc rebaixat, l'arc peraltat i l'arc parabòlic. (fotografia d'una de les portes de la Catedral).



Arc ogival o apuntat: Està format per dos arcs de circumferència, els centres d'aquests estan situats sobre la línia d'arrencada. Existeixen tres derivats: l'equilàter, el rebaixat i l'apuntat. El primer té els centres als extrems de la llum, i els dos següents tenen els centres situats a l'interior o a l'exterior de la llum. (fotografia del carrer Sant Pau).



Arc carpanell: Els arcs carpanells estan formats per tres o més arcs de circumferència tangents entre si. El cas de l'arc carpanell que està format per tres circumferències, dos centres d'aquestes estan situats damunt de la línia d'arrencada, i el tercer centre damunt de la prolongació de la fletxa. (fotografia d'una porta al Pla de la Seu).



Arc lobulat: Aquests arcs estan formats de lòbuls i són tangents a un arc ogival exterior. En la fotografia adjunta es pot veure un arc lobulat de cinc lòbuls. (fotografia realitzada a l'entrada del claustre de la catedral).





Arc rampant o arc coix: Aquest arc està format per tres o més cercles els quals estan a diferents nivells i són tangents entre si. (fotografia del pati de la Casa Castellarnau).



Arc trevolat: Aquests estan formats per lòbuls i per arcs de circumferència. Generalment estan compostos de lòbuls imparells. (fotografia del Pla de la Seu).



Rosassa 1¹ : Aquesta rosassa està formada per una circumferència exterior i setze sectors els quals tenen un detall als extrems. (Fotografia d'una rosassa de la catedral) .



Rosassa 2: Aquesta rosassa està dividida en vuit sectors iguals, els quals tenen circumferències tangents als extrems. (fotografia de la façana de l'església de Sant Llorenç).



¹ Una rosassa és una figura acotada tal que existeixen girs que la deixen invariant a la percepció (també pot tenir simetries axials).



3 ARCS OBJECTE DE RECERCA

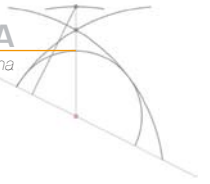
Arc ogival equilàter i rebaixat amb una circumferència inscrita: Aquest és un arc format per un ogival de centres en els extrems de la llum o en l'interior d'aquesta i una circumferència interior. Cerquem el centre de la circumferència inscrita. Els elements inicials per l'estudi són: els radis de les circumferències que formen l'ogival i els seus centres. El que estudiem es troba en el carrer de Sant Pau número 4.

Arc ogival rebaixat amb tres circumferències inscrites: Aquest arc està format per un arc ogival rebaixat, una circumferència i dues semicircumferències interiors, aquestes últimes tres tenen el mateix radi. En aquest cas cerquem els centres dels dos arcs que formen l'ogival. Els elements inicials són els radis de les tres circumferències interiors, que són iguals. L'arc que estudiem es pot trobar en el carrer Pla de Palau número 5.

Arc carpanell: Aquest arc està format per tres circumferències tangents entre elles. En aquest cas cerquem el centre de la circumferència de radi més gran, que està situat en la prolongació de la fletxa. Els elements de sortida són: la fletxa, la línia d'arrencada i les dues circumferències on els seus centres estan situats damunt de la llum. L'arc que estudiem es pot trobar en el Pla de la Seu número 2, en el carrer de Santes Creus número 3, en la porta de l'Ajuntament...

Rosassa: Aquest rosetó està format per vuit sectors iguals, els quals tenen una circumferència situada a l'extrem, tangent a les dos rectes que limiten el sector i a les dues circumferències contigües. Cerquem els centre de les circumferències interiors. Els elements inicials per l'estudi són: el radi de la circumferència exterior i els angles de cada sector circular. La rosassa que estudiarem es troba a la façana de l'església de Sant Llorenç.

Arc lobulat: Aquest arc està format per cinc lòbuls tangents a un arc vesica piscis (àrea resultant de traçar tres circumferències, amb radis iguals a la separació entre els centres). Per fer l'estudi, primer estudiarem un arc més senzill, format per tres lòbuls. En el primer estudi cerquem els radis i on estan situades les tres circumferències interiors, els objectes inicials són: el radi de les tres circumferències formants de la vesica piscis. El segon estudi que realitzarem també es cerca on estan situades les cinc circumferències interiors. En aquest cas també partim del radi de les tres circumferències exteriors.



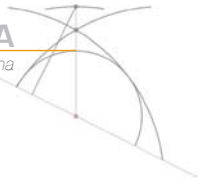
4 ARC OGIVAL

L'arc ogival és típic de l'estil gòtic i va ser el substitut de l'arc de mig punt. N'hi ha de diversos tipus: l'equilàter, el rebaixat i l'apuntat. En aquest apartat estudiarem una petita variació de l'arc ogival equilàter i de l'arc ogival rebaixat. Es tracta d'inscriure una circumferència interior, tangent als dos arcs de circumferència i a la línia d'arrencada.

- > L'arc ogival equilàter és aquell que està format per dos arcs de circumferència, els quals tenen els centres en l'exterior de la línia d'arrencada, així podem dir que el radi dels dos arcs és igual a la distància que hi ha entre els dos centres.
- > L'arc ogival rebaixat té la peculiaritat que els centres dels dos arcs no estan a l'interior de la llum, així la distància entre els dos centres és menor que el radi.

En la figura adjunta es pot veure la fotografia d'un arc ogival trobat en el carrer Sant Pau número 4, del casc antic de la ciutat de Tarragona.





4.1 ARC OGIVAL EQUILÀTER

L'arc ogival equilàter és un arc que es pot trobar en molts llocs de la ciutat de Tarragona, com per exemple en el carrer Sant Pau número 4, del casc antic de la ciutat de Tarragona, com es pot veure en la fotografia adjunta. Com ja hem dit abans, l'arc ogival equilàter està format per dos arcs de circumferència, amb centres situats sobre els extrems de la línia d'arrencada. Aquests dos centres els anomenem (X,Y) . El problema que aquest arc planteja és el lloc on està situat el centre de la circumferència interior (M) tangent a l'arc ogival i a la línia d'arrencada.



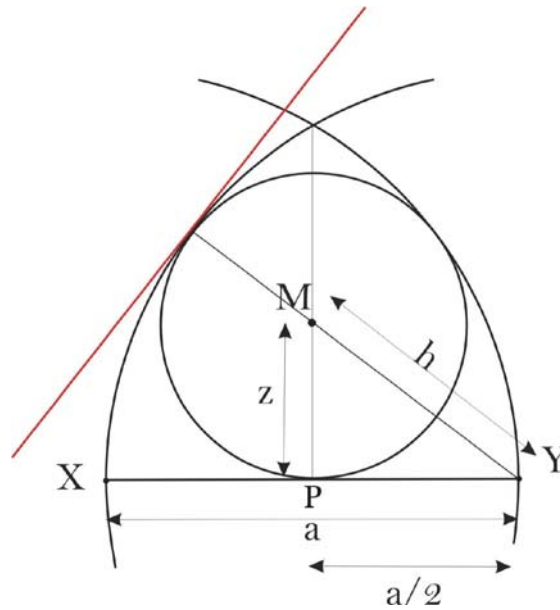
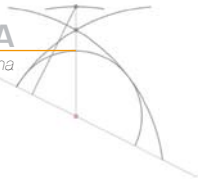
4.1.1 Estudi al·gèbric ²

Per trobar el centre (M) ens basarem en un estudi realitzat a TICÓ [2004] Pàg. 46, 47.

Anomenarem:

- > M el centre de la circumferència interior.
- > r el radi de la circumferència interior.
- > X,Y els dos centres dels arcs exteriors.
- > a el radi dels arcs exteriors.
- > h la distància des del punt M fins a Y .
- > P el punt mig del segment a .

² Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 1.



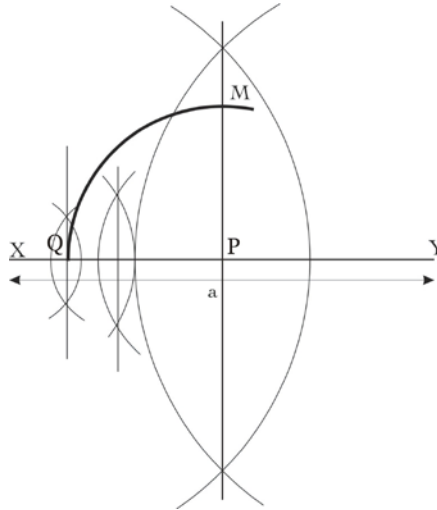
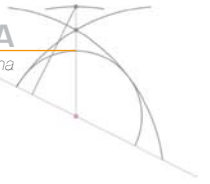
Com es pot veure en la figura adjunta, els punts M, Y, P formen un triangle rectangle, consegüentment podem aplicar el Teorema de Pitàgores: i en resulta,

$$h^2 = z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow (a - z)^2 = z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 - 2az + z^2 = z^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$2az = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow 8az = 3a^2 \Rightarrow z = \frac{3a}{8}$$

En representar aquest resultat trobarem el centre M , el qual sabem que està sobre la mediatriu. El procediment que hem deduït de l'última igualtat consisteix en la divisió del segment a en 8 parts iguals i en transportar tres d'aquestes parts sobre la mediatriu, a partir de P :

- > Tracem la mediatriu del segment a .
- > Dividim el segment $\overline{XP}$ en quatre parts iguals, utilitzant el procediment de traçar la mediatriu dues vegades consecutivament.
- > Transportem la longitud $\overline{QP} = \frac{3}{8}$ sobre la mediatriu de $\overline{XY}$. I aconseguim el centre M , centre de la circumferència interior.

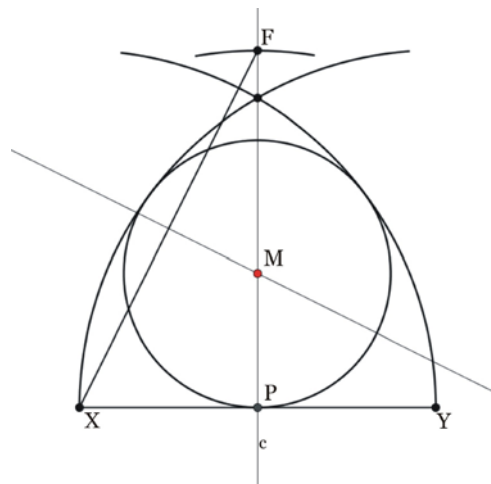


4.1.2 Estudi geomètric ³

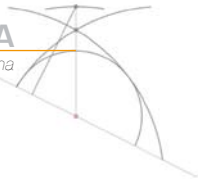
El procediment geomètric per dibuixar una circumferència a un ogival equilàter és un dels processos habituals del dibuix tècnic. En la meua opinió, crec que pot ser interessant comparar els dos mètodes, l'algèbric i el geomètric. El centre M es troba mitjançant la propietat de les tangències d'aquesta circumferència amb les dades del problema que són, la circumferència, la recta i el punt P .

Tracem:

- > Tracem la mediatriu de $\overline{XY}$, que dona lloc a la recta c .
- > Traslladem la distància $\overline{XY}$ sobre la recta c a partir de P , aquest pas dona lloc al punt F .
- > Unim els punts F i X .
- > Tracem la mediatriu del segment $\overline{XF}$.
- > Finalment la intersecció de la mediatriu de $\overline{XF}$ i de la recta c dona lloc a M .



³ Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 2.



4.1.3 Comparació dels dos mètodes

Comparant el mètode algebàric amb el mètode geomètric, podríem dir a primer cop d'ull, que el primer mètode és més ràpid de construir que el segon. Però si només s'utilitza regla i compàs, el segon mètode és més ràpid. La construcció a partir de l'àlgebra té deu passos i la construcció a partir de la geometria en té vuit. En aquest cas utilitzant la geometria directament aconseguim una construcció més ràpida.

4.2 ARC OGIVAL REBAIXAT

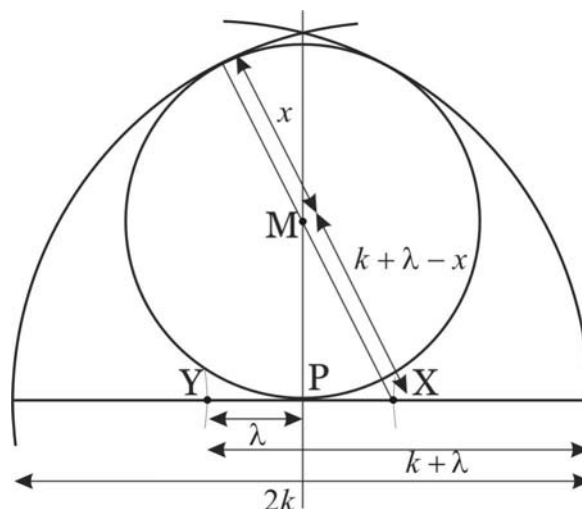
4.2.1 Estudi algebàric ⁴

En l'arc ogival rebaixat, ens trobem que els centres dels arcs estan situats a la línia d'arrencada. Però a diferència de l'arc ogival equilàter, aquests no estan en els extrems de la llum, sinó que estan en qualsevol lloc de l'interior de la línia d'arrencada.

El procediment de construcció que resultarà de l'anàlisi algebàrica següent serà general, és a dir, servirà tant per a l'arc rebaixat com per a l'equilàter.

Per traduir el problema al llenguatge algebàric, anomenem:

- > M el centre de la circumferència interior.
- > x el radi de la circumferència interior.
- > Y, X els centres dels arcs que conformen l'ogival.
- > λ la longitud de $\overline{PY} = \overline{PX}$.
- > $2k$ el radi dels arcs que conformen l'ogival.



⁴ Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 3.



Si considerem el triangle MPX , en què els seus costats són $\overline{PM}$, $\overline{MX}$, $\overline{PX}$ hi podem aplicar el teorema de Pitàgores:

$$\overline{PM} = x$$

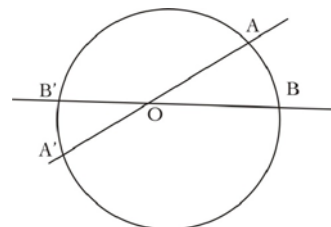
$$\overline{MX} = k + \lambda - x$$

$$\overline{PX} = \lambda$$

$$\left[(k + \lambda) - x\right]^2 = x^2 + \lambda^2 \Rightarrow x(2k + 2\lambda) = k^2 + 2k\lambda \Rightarrow x = \frac{2k\lambda + k^2}{2k + 2\lambda} (1)$$

Per representar la solució a aquest problema el que fem servir és el concepte de la potència d'un punt respecte d'una circumferència ⁵, que permet escriure el teorema següent, a partir dels punts O, A, B, A', B' del gràfic adjunt,

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$$



Per representar la solució d'aquest arc només cal portar la igualtat (1) al format del teorema anterior.

$$x = \frac{2k\lambda + k^2}{2k + 2\lambda} \Leftrightarrow x \cdot (2k + 2\lambda) = (2\lambda + k) \cdot k$$

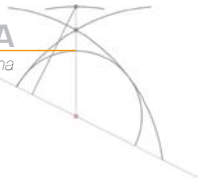
L'última igualtat juntament amb la figura inspira la construcció següent.

Respecte el punt P i aprofitant la mediatriu de la llum de l'arc tracem:

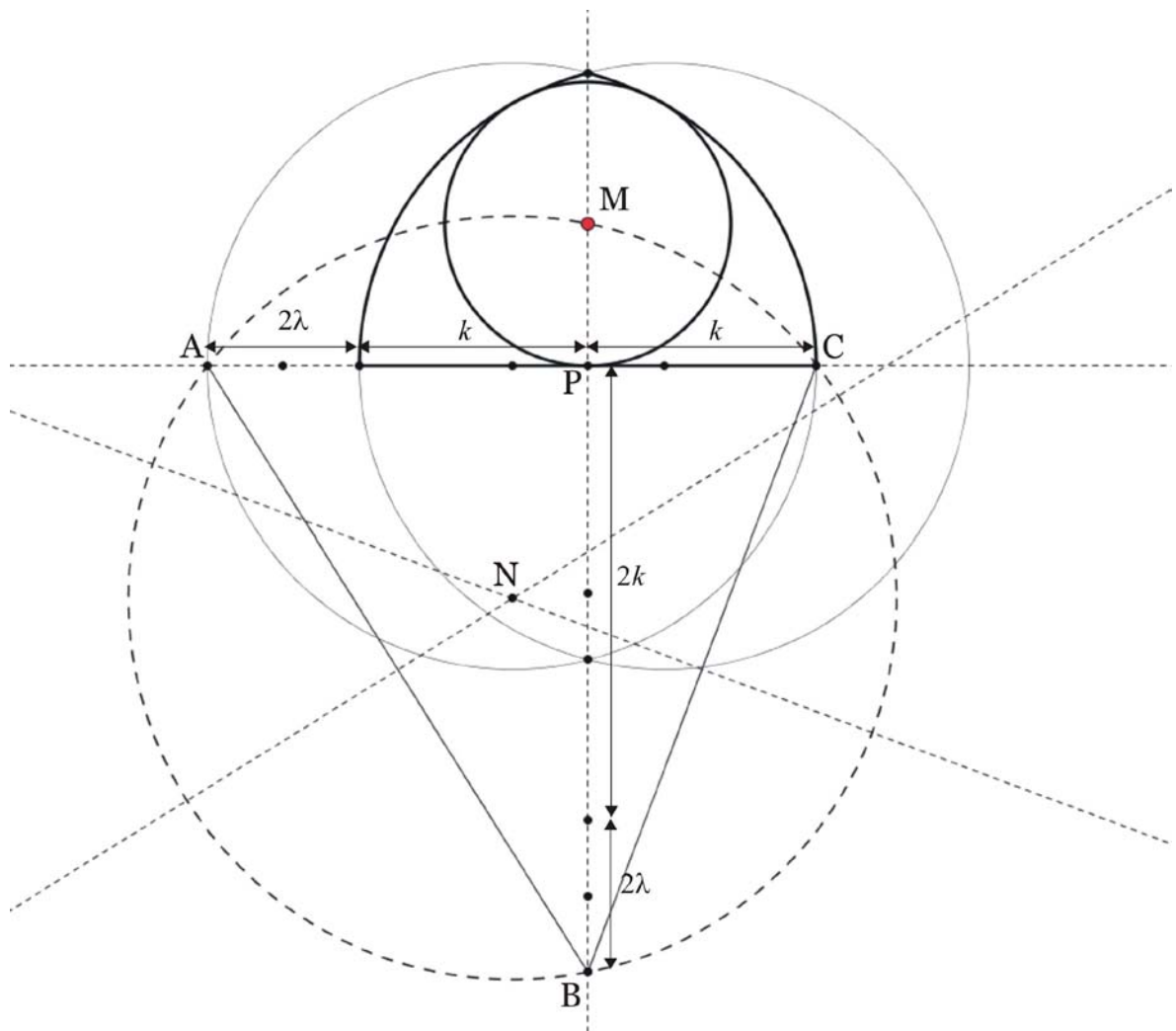
- > Tracem el segment $\overline{PC} = k$.
- > Tracem el segment $\overline{AP} = k + 2\lambda$.
- > Tracem el segment $\overline{PB} = 2k + 2\lambda$.
- > Unim $\overline{AB}$.
- > Unim $\overline{BC}$.

⁵ El teorema que permet introduir la definició d'un punt respecte d'una circumferència és el següent: Donada una circumferència φ , un punt P , i dues rectes que passin per P i tallin la circumferència en els punts A, A', B, B' respectivament compleix que $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$.

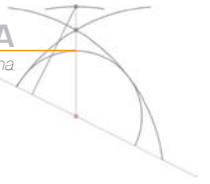
Definició: Anomenem potència del punt P respecte de la circumferència φ al valor d'aquest producte invariant.



- > Tracem les mediatrises dels segments $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$.
- > La intersecció de les dues mediatrises dóna lloc al punt N , aquest punt és el centre de la circumferència de radi $\overline{NB} = \overline{NA} = \overline{NC}$.
- > La intersecció de la circumferència de centre N i la mediatriu de la línia d'arrencada dóna lloc el punt M , que és el centre de la circumferència interior de l'arc.



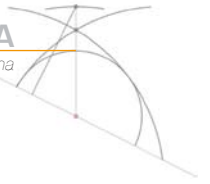
Efectivament sabem que $\overline{PM} \cdot \overline{PM} = \overline{PA} \cdot \overline{PC}$, i això equival a la igualtat (1).



4.3 ARC OGIVAL AMB TRES CIRCUMFERÈNCIES INSCRITES

En el següent arc ens limitarem a estudiar la primera intuïció geomètrica obtinguda de la observació de l'arc. Concretament, ens plantegem la construcció de tres circumferències i un arc ogival. Aquestes tres tenen els seus radis iguals i alhora també són tangents a dues circumferències exteriors. Les dues mitges circumferències formen la línia d'arrencada. A simple vista podem dir que els centres de les dues circumferències exteriors estan en els extrems de la corda, però mitjançant una operació podem veure que no és cert, sempre que vulguem mantenir que els radis de les circumferències interiors són iguals. Aquests arcs es poden trobar en el carrer Pla de Palau número 5.

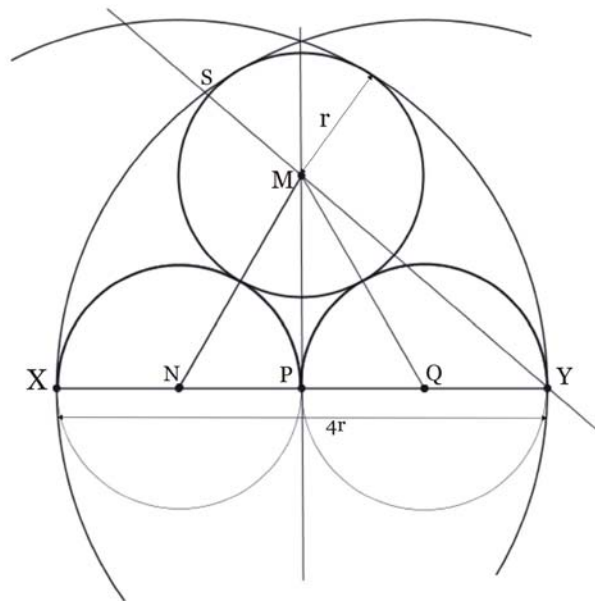




4.3.1 Estudi al·gèbric ⁶

Anomenem:

- > X, Y els centres de les dues circumferències exteriors.
- > N, Q, M els centres de les circumferències interiors.
- > r el radi de les circumferències interiors.



Fem la suposició que els centres de les dues circumferències exteriors són X, Y i que aquests estan en els extrems de la corda. També suposem que els radis de les circumferències interiors són iguals. Amb això diem:

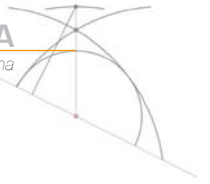
> $\overline{MQ} = 2r$

> $\overline{XY} = \overline{SY} = 4r$

> $\overline{PQ} = r$

> $\overline{MP} = ?$

⁶ Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 4.



Calculem MP mitjançant el teorema de Pitàgores utilitzant el triangle PMQ :

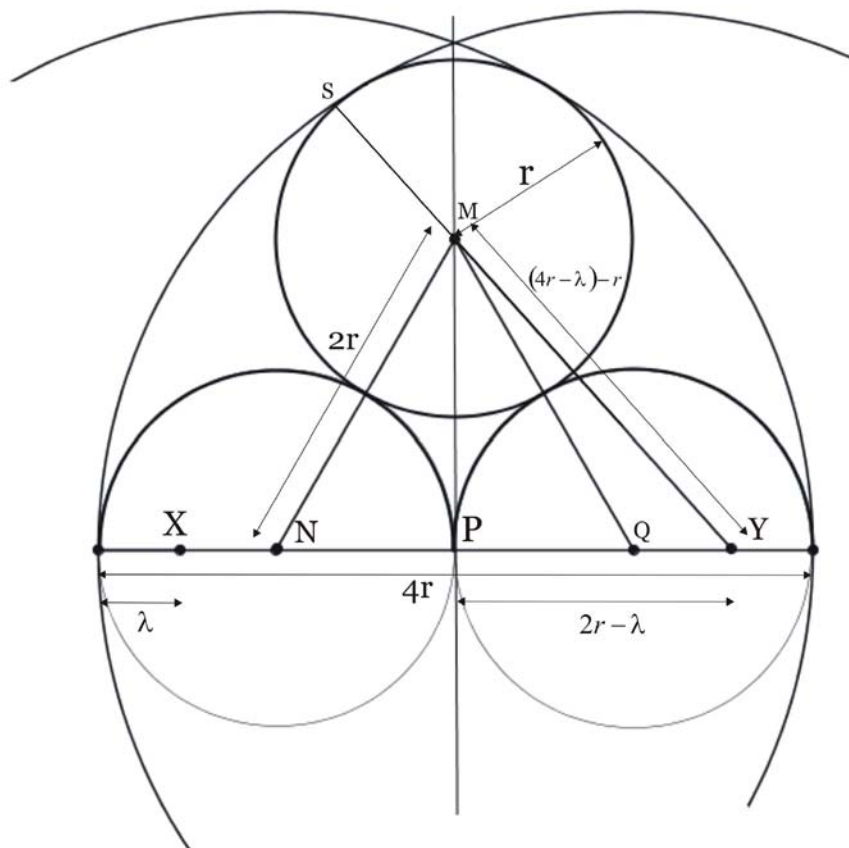
$$\overline{MQ}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PQ}^2 \Rightarrow \overline{MP} = \sqrt{\overline{MQ}^2 - \overline{PQ}^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$$

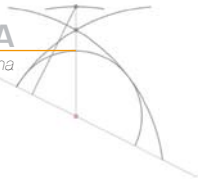
Comprovem que el resultat anterior és cert mitjançant el teorema de Pitàgores utilitzant el triangle PMY .

$$\overline{MY}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PY}^2$$

$$9r^2 = 3r^2 + 4r^2 \Rightarrow 9r^2 \neq 7r^2$$

Aquest últim resultat és una contradicció, per això diem que si els radis de les circumferències interiors són iguals, llavors els centres de les circumferències exteriors no poden estar en els extrems de la línia d'arrencada, sinó que estan una distància λ d'aquests, com es pot veure en la figura adjunta.





Observem:

$$> \overline{QY} = 2r - \lambda$$

$$> \overline{MY} = \overline{YX} - r = (4r - \lambda) - r$$

$$> \overline{QM} = 2r$$

Per trobar la distància λ utilitzem el teorema de Pitàgores, aplicat al triangle QMP i al triangle YMP :

$$\overline{MP}^2 = \overline{QM}^2 + \overline{QP}^2 \Rightarrow \overline{QM} = \sqrt{\overline{MP}^2 - \overline{QP}^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$$

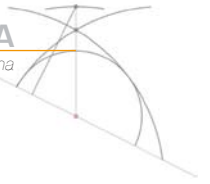
$$\overline{MY}^2 = \overline{QY}^2 + \overline{QM}^2$$

$$[(4r - \lambda) - r]^2 = (2r - \lambda)^2 + (r\sqrt{3})^2 \Rightarrow 9r^2 - 6r\lambda + \lambda^2 = 4r^2 - 4r\lambda + \lambda^2 + 3r^2$$

$$2r^2 - 2r\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2r^2}{2r} = r$$

Observant el resultat diem que els centres de les dues circumferències exteriors, estan a una distància dels extrems de la línia d'arrencada igual al radi. En la figura adjunta podem observar la construcció aplicada a un arc, en aquest cas la construcció no s'ajusta del tot, ja que el gruix de la forma impedeix veure amb claredat i per tant és difícil que quedi ajustada.



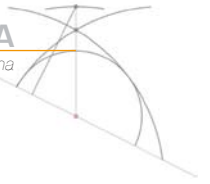


5 ARC CARPANELL

L'arc carpanell o d'ansa-paner és un arc que està format per tres o més arcs de circumferència tangents entre si, això significa que està constituït per 3 o més circumferències. El cas que estudiarem és el de 3 centres, en aquest cas els centres de les dues circumferències petites (E, D) es troben en la línia d'arrencada i el centre de la circumferència P es troba en la prolongació de la fletxa. Com ja he dit abans, n'hi ha de diversos tipus: de 3 centres, de 4, de 5 i fins i tot n'hi pot arribar a haver de 7 centres. L'arc carpanell és un arc molt típic en la ciutat de Tarragona i se'n poden trobar en el pla de la seu número 2, en el carrer de Santa Tecla, en la Plaça dels Àngels número 2, en el número 3 del carrer de Santes Creus, en el carrer Trinquet Vell, en la porta principal de l'Ajuntament de Tarragona i en altres indrets de la Part Alta.



*L'arc localitzat
a la Plaça dels
Àngels, 2*



Anomenem:

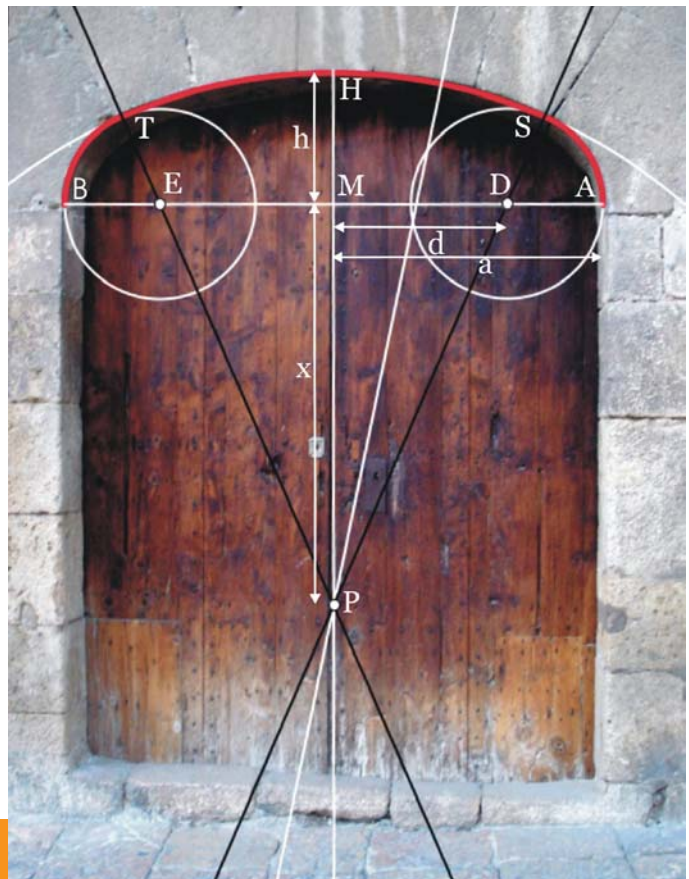
- > E i D els centres de les circumferències interiors.
- > $\overline{HM} = h$ la longitud de la fletxa.
- > $\overline{AM} = a$.
- > A i B els extrems de la llum.
- > P el centre de la circumferència exterior.
- > x el radi de la circumferència exterior.

El problema que planteja aquest arc és un problema de tangències, ja que 2 circumferències de mateix radi han de ser tangents a una de més gran. Tot depèn de les dades conegudes i de les incògnites, en aquest cas hem de trobar P .

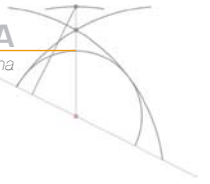
En l'estudi al·gèbric de l'arc carpanell ens plantejem de sortida que coneixem:

- > $\overline{HM} = h$ la fletxa .
- > $\overline{AB} = 2a$ la línia d'arrencada.
- > E i D els centres de les dues circumferències interiors, és a dir la distància $\overline{MD} = d$

Per resoldre el problema hem de trobar la distància $\overline{MP} = x$, i així obtindrem la posició del centre P , de la circumferència exterior.



Arc localitzat al Pla de la Seu, 2.



5.1 Estudi algèbric ⁷

Sabem que:

$$> \overline{PH} = \overline{PS} = \overline{PD} + \overline{DS} = \overline{PD} + \overline{DA}$$

$$> \overline{PH} = x + h$$

$$> \overline{PD}^2 = d^2 + x^2$$

$$> \overline{PD} = \sqrt{d^2 + x^2}$$

$$> \overline{DS} = \overline{DA} = a - d.$$

Tornant a la primera igualtat i amb les dades anteriors escrivim:

$$x + h = \sqrt{d^2 + x^2} + a - d$$

Desenvolupem l'equació i aïllem d :

$$d^2 + x^2 = (x + h - a + d)^2 \Rightarrow d^2 + x^2 = x^2 + (h - a + d)^2 + 2x(h - a + d)$$

$$d^2 = (h - a + d)[(h - a + d) + 2x]$$

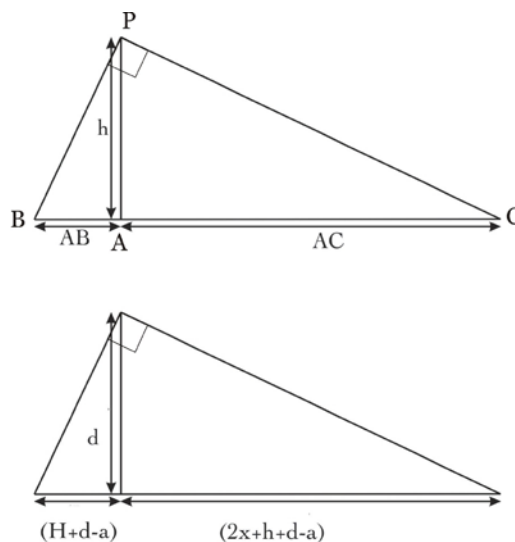
El resultat anterior té una semblança amb la presentació algèbrica del teorema de l'altura, i a partir del teorema de l'altura és fàcil representar la solució gràficament, mitjançant un triangle rectangle.

El teorema de l'altura diu que en un triangle PBC , rectangle en P , si A és la projecció del punt sobre la hipotenusa i $\overline{PA} = h$ llavors:

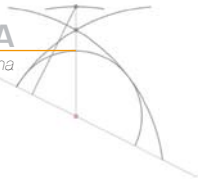
$$h^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

Si comparem aquesta fórmula amb la que hem deduït:

$$d^2 = (h - a + d)[(h - a + d) + 2x]$$



⁷ Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 5.



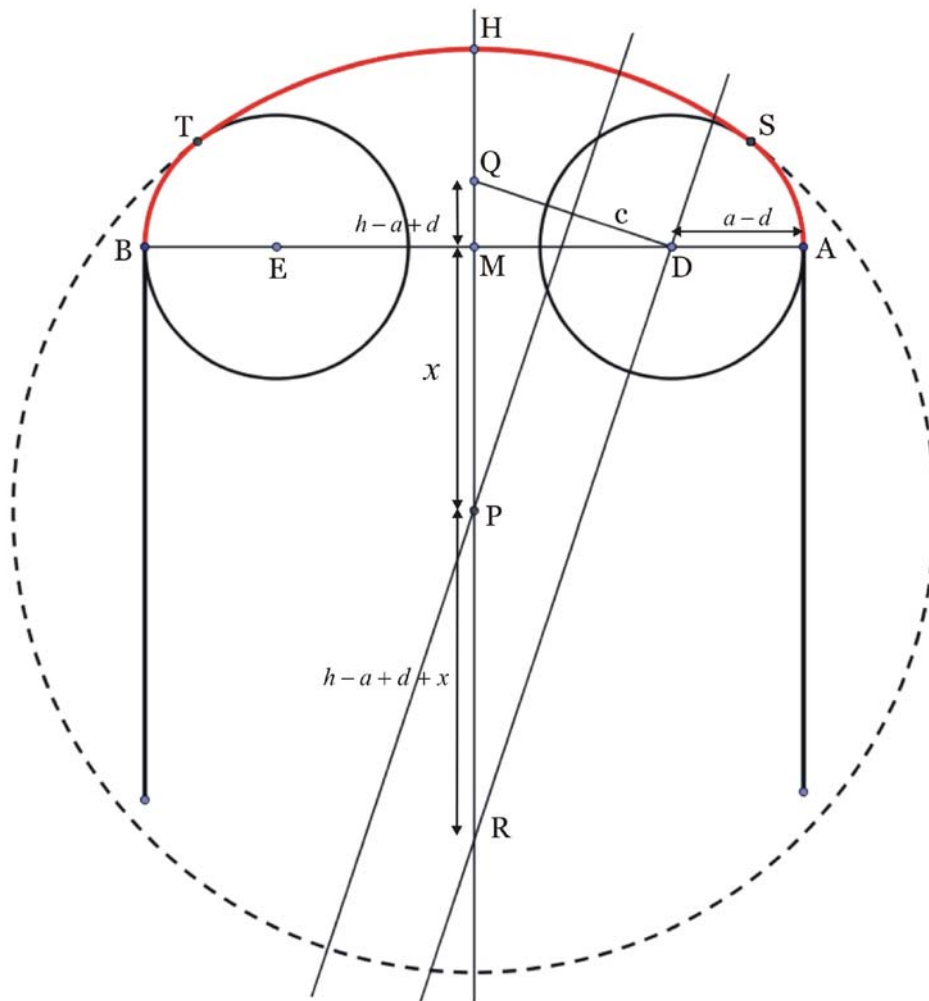
El paral·lelisme és evident i, com es pot comprovar en el dibuix adjunt, es pot dibuixar un triangle amb les dades implicades i trobar el punt P .

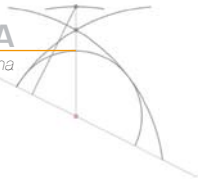
Per representar el resultat de l'equació $d^2 = (h - a + d)[(h - a + d) + 2x]$

dibuixarem un triangle rectangle amb les dades anteriors i, partint del teorema de l'altura, trobarem el punt P .

- > Construïm $\overline{DM} - \overline{HM} = h - a + d$ a partir del punt M , sobre la línia $\overline{HP}$ obtenint $\overline{MQ}$.
- > Unim D amb el punt Q . Aquest segment l'anomenem c .
- > Tracem una perpendicular pel punt D al segment c .
- > Tracem la mediatriu del segment c .
- > La intersecció de la mediatriu amb la prolongació de la fletxa de l'arc dona lloc al punt P , centre de la circumferència exterior, en ser $\overline{MR} = h - a + 2x$.

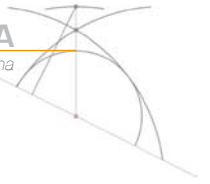
Finalment les rectes $\overline{EP}$ i $\overline{DP}$ proporcionen els punts T i S de tangència.





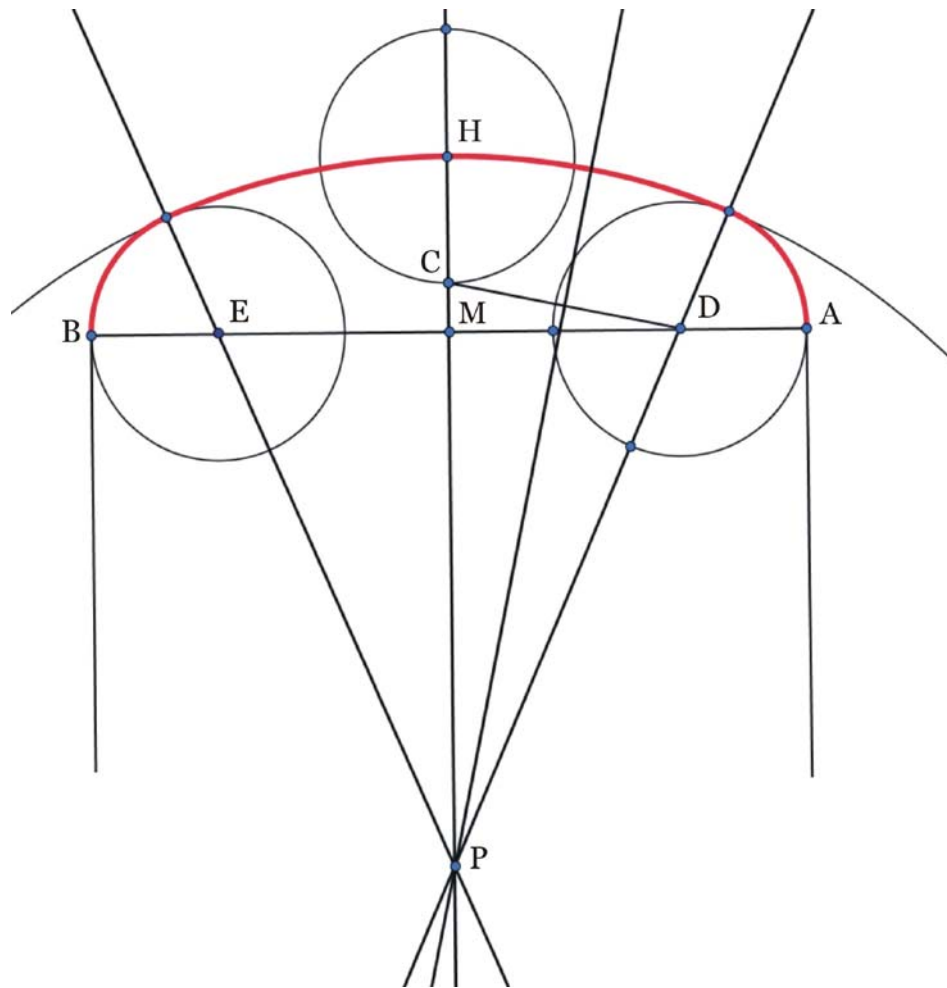
Les següents figures adjuntes són exemples per mostrar que la construcció anterior es vàlida per qualsevol arc carpanell de tres centres. La primera fotografia és de una paret pintada situada al carrer Pla de Palau, al casc antic de Tarragona. La segona fotografia és d'un arc situat a la Plaça dels Àngels, número 2.





5.2 Estudi geomètric ^B

Una altra manera de dibuixar un arc carpanell és per un dels mètodes geomètrics estudiats a dibuix tècnic, on hi ha variacions segons les dades conegudes, en aquest cas coneixem la llum (B,A) , la fletxa (H,M) i les circumferències d'arrencada. El problema de construir la tercera circumferència consisteix en cercar una circumferència amb centre en una recta donada que passa per un punt d'aquesta recta i és tangent a una altra circumferència.



Tracem:

- > Traslladem la distància del radi $\overline{DA}$ mitjançant una circumferència al punt H .
- > La intersecció entre la circumferència anterior i la llum dóna lloc al punt C . Unim els punts C i D .
- > Tracem la mediatriu del segment anterior $\overline{CD}$.

^B Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 6.



- > La intersecció de la mediatriu anterior i la llum dona lloc al punt P , que és el centre de la circumferència de radi gran.
- > Tracem les dues rectes que passen per $\overline{PE}$ i per $\overline{PD}$ trobem els punts de tangència, i així només cal traçar les tres circumferències.

5.3 Conclusió construcció arc carpanell.

Les dues construccions anteriors són molt curioses, ja que fixant-nos-hi podem veure que les dues són pràcticament iguals. Amb aquest enunciat podem concloure que molts cops es pot arribar al mateix final, mitjançant diferents camins, en aquest cas els dos camins han estat l'àlgebra i la geometria.

5.4 Variant del mètode de construcció de l'arc carpanell ⁹

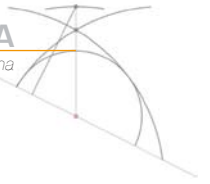
En el cas del arc carpanell, es poden trobar diferents tipus de construccions. En aquest apartat ens basem en una construcció que està al llibre MORENO [1989] pàg. 23, que presenta una construcció en la que només es pot representar un arc carpanell, ja que quan es traça s'afegeixen una sèrie de restriccions. Aquest procés de construcció es comença partint de la llum $(\overline{AB})$ i $(\overline{HM})$ la fletxa.

Tracem:

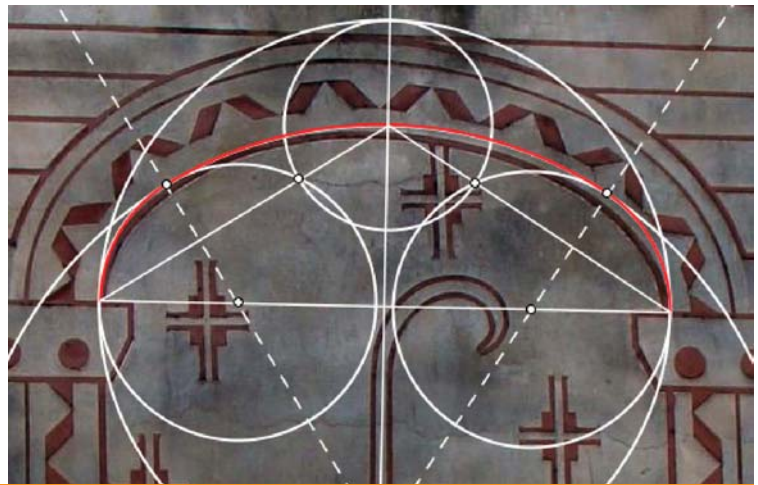
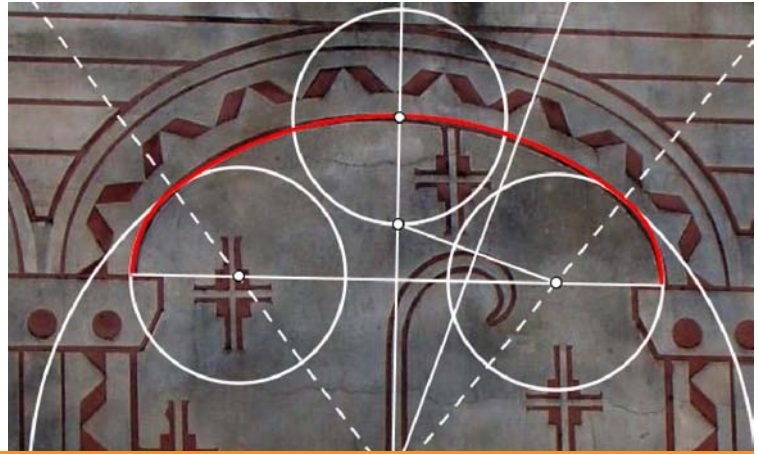
- > Tracem les rectes $\overline{AH}$ i $\overline{BH}$.
- > Amb el centre M i radi $\overline{MB}$ tracem una circumferència.
- > Amb centre H i radi $\overline{HI}$ tracem una circumferència.
- > Aquesta última talla les rectes $\overline{AH}$ i $\overline{BH}$ en dos punts F i G , tracem les mediatris dels segments $\overline{AG}$ i $\overline{BF}$.
- > Aquestes mediatris tallen la línia d'arrencada en dos punts E i D , que són els centres de les circumferències petites.
- > En la intersecció de les dues mediatris es troba P , el centre de la circumferència gran.

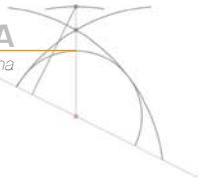
⁹ Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 7.

The diagram illustrates the geometric construction of a dome cross-section. It features a large dashed circle representing the base of the dome. A horizontal line segment AB is drawn across the middle of the circle, with points E and D marked on it. A vertical line segment HI is drawn from the top of the circle down to the center M . A semi-circular arch is drawn above the line AB , with its highest point H on the vertical line HI . The arch is divided into two segments by a point G on the left and F on the right. A red curve is drawn along the top of the arch, passing through points G and F . A dashed circle is drawn below the arch, centered at M , with its radius equal to the distance from M to H . A vertical line segment PM is drawn from the center M down to a point P on the dashed circle. Two vertical lines are drawn from points A and B down to the dashed circle, passing through points J and K respectively. The diagram also shows several other points and lines, including C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , and Z , which define the geometry of the dome and its base.



En les següents fotografies es pot comprovar com el primer mètode s'ajusta més a la curvatura de l'arc que l'última construcció, per això diem que el primer mètode és vàlid per a tots els arcs carpanells i que l'últim només per a uns certs arcs.





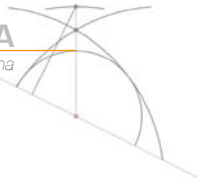
6 ROSSASSA

En aquest apartat, l'objecte d'estudi és una rosassa o també anomenat rosetó. Les rosasses han estat, des de sempre, una eina molt útil en la construcció de catedrals i esglésies, utilitzades per transmetre la llum i el color en l'interior dels edificis. El rosetó que estudiarem està situat en la plaça de la Pagesia, al mig de la façana de l'església de Sant Llorenç del casc antic de la ciutat de Tarragona, com es pot veure en la figura adjunta. En aquest cas, aquesta té les característiques següents:

- > Està dividida en vuit sectors iguals.
- > Té un arc de circumferència tangent a les dues rectes secants que limiten cada sector.

El problema que ens planteja aquesta rosassa és on està situat el centre de la circumferència tangent que conté l'arc. Per aquest motiu proposem l'estudi algebri i geomètric.



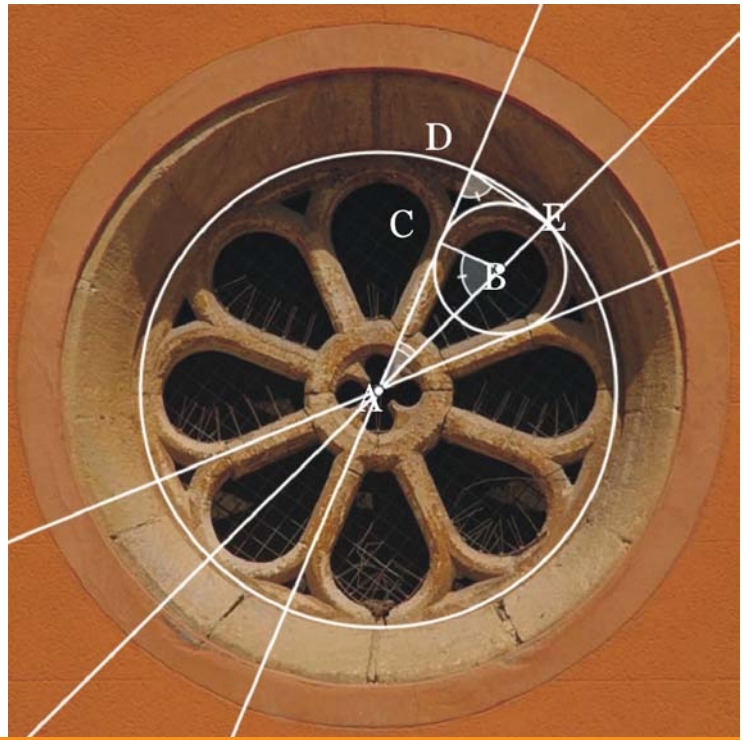


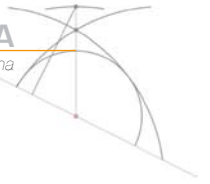
6.1 Estudi algèbric

A primer cop d'ull veiem que la circumferència està dividida en vuit parts, per tant, cada sector mesura $\frac{\pi}{4} rad$. També es pot observar que hi ha vuit circumferències tangents entre si. Aquestes alhora són tangents a una circumferència més gran i a les dues rectes que limiten cada sector.

Anomenem:

- > A el centre de la circumferència exterior.
- > x_0 la longitud d' $\overline{AB}$.
- > r la longitud $\overline{AE} = \overline{AD}$.
- > d els radis $\overline{BE} = \overline{BC}$ de la circumferència interior.
- > B el centre de la circumferència interior.

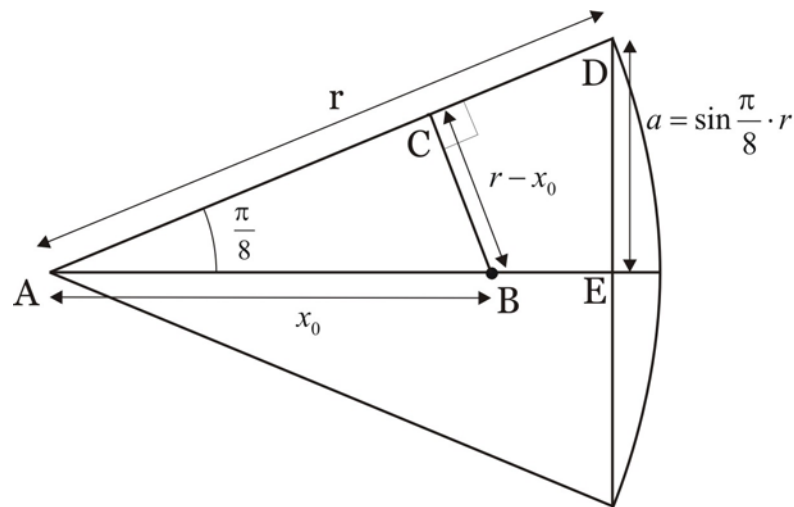




Observant la figura adjunta podem arribar a la conclusió, mitjançant la comparació dels angles, que els triangles ABC i AED són semblants perquè $\overline{BC}$ és perpendicular a $\overline{AD}$ i $\overline{DE}$ és perpendicular a $\overline{AE}$. Amb aquestes dades podem afirmar que:

$$> \overline{CB} = r - x_0 = d$$

$$> a = \sin \frac{\pi}{8} \cdot r$$



Són triangles semblants. Per tant, els seus costats són proporcionals, llavors els podem relacionar mitjançant el teorema de Tales, això permetrà que trobem X_0 . Agafem r com a unitat de mesura, és a dir $r = 1$.

$$\frac{1}{x_0} = \frac{\sin(\pi/8)}{1 - x_0} \Rightarrow 1 - x_0 = \sin(\pi/8) \cdot x_0 \Rightarrow 1 = [\sin(\pi/8) \cdot x_0] + x_0$$

$$1 = x_0 [\sin(\pi/8) + 1] \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\sin(\pi/8) + 1}$$

Aquest resultat es pot representar de dos maneres diferents mitjançant la geometria. El primer mètode és a partir del concepte de la potència d'un punt respecte d'una circumferència i el segon mètode és mitjançant el teorema de Tales.



6.1.1 Mitjançant el concepte de potència d'un punt respecte d'una circumferència¹⁰

$$x_0 = \frac{1}{\sin(\pi/8) + 1} \Leftrightarrow 1 \cdot 1 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1 \right) \cdot x_0$$

- > Tracem la bisectriu de l'arc NC . (figura 1)
- > Tracem la bisectriu de l'arc GC . Amb això hem obtingut l'angle $\frac{\pi}{8}$. (figura 1)
- > Transportem a partir de E la mesura $\sin(\pi/8)$ a la recta horitzontal, obtenim el punt M .
 Llavors $\overline{AM} = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1$. (figura 1)
- > El punt N s'obté mitjançant el radi 1 de la circumferència. (figura 2)
- > El punt P s'obté mitjançant el radi 1 de la circumferència. (figura 2)
- > Tracem les mediatris de $\overline{NM}$ i $\overline{MP}$. La intersecció és el centre F de la circumferència que determinarà B , tal que $\overline{AB} = x_0$. (figura 2)
- > Tracem la circumferència amb centre F i radi $\overline{FM} = \overline{FN} = \overline{FP}$. De la intersecció de la circumferència amb la recta horitzontal en resulta x_0 (figura 2).

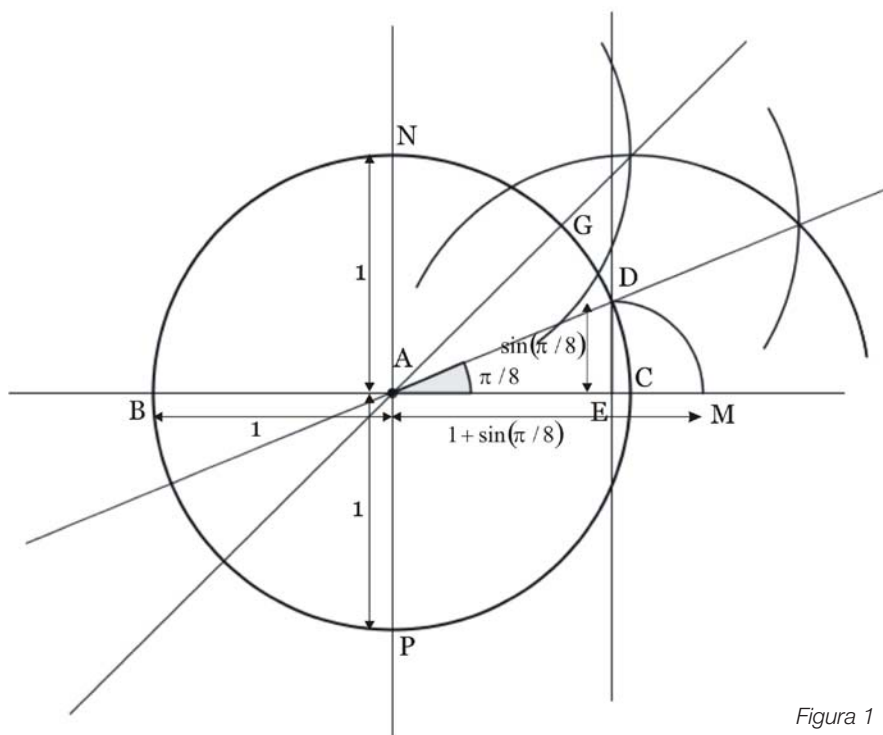


Figura 1

¹⁰ Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 8.

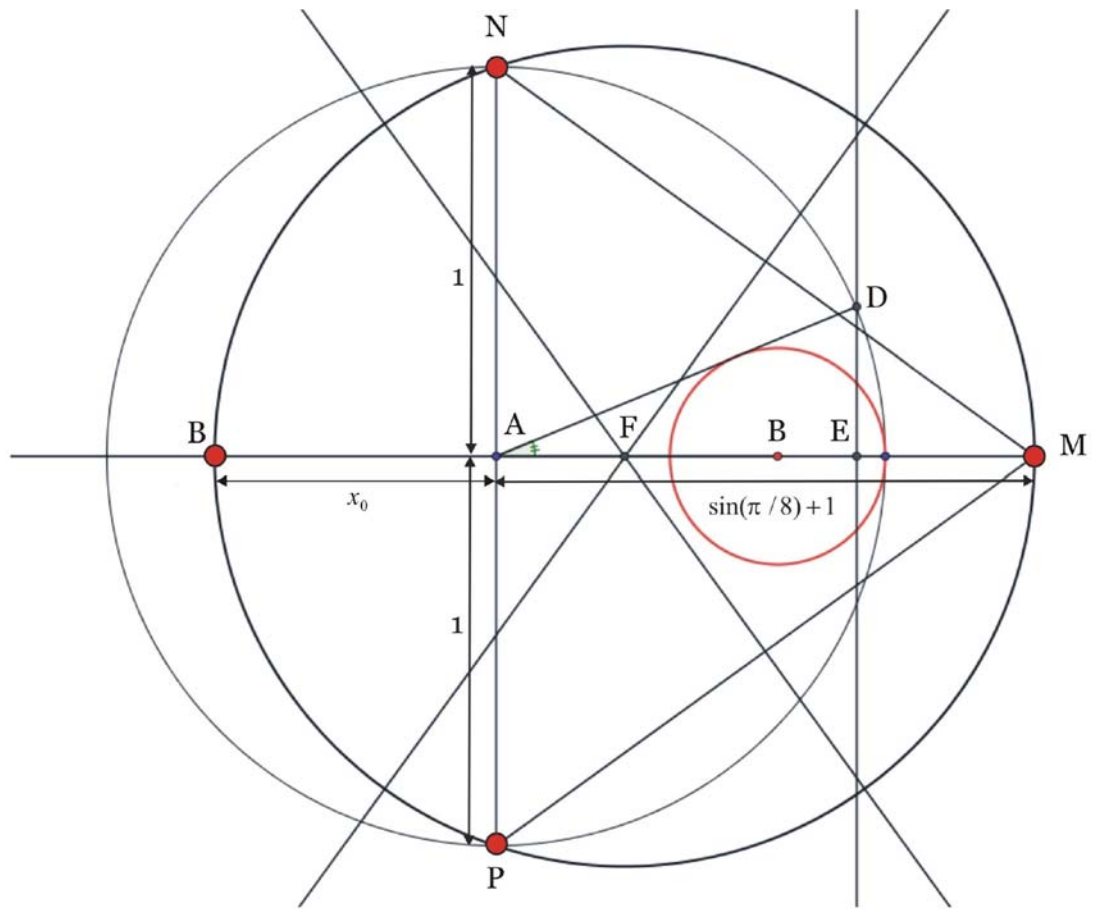
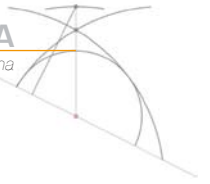
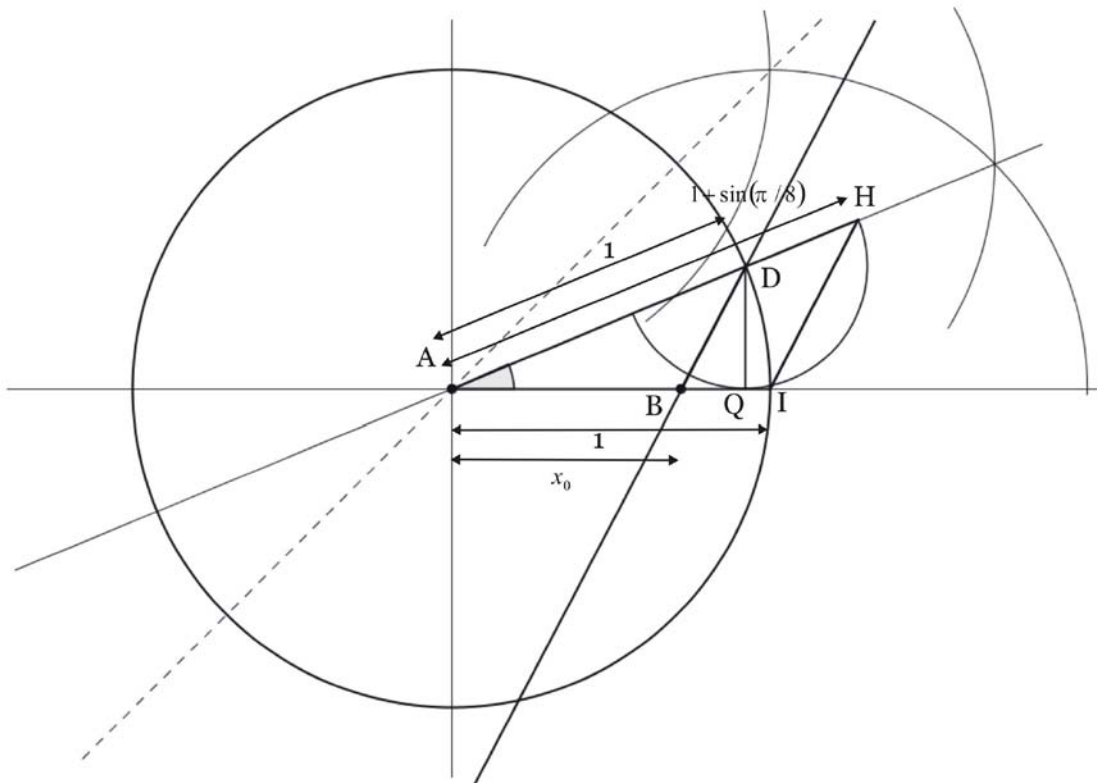


Figura 2



6.1.2 Mitjançant el teorema de Tales ¹¹

- > Tracem dues bisectrius consecutives, com en el problema anterior, obtenint un arc de $\pi/8 \text{ rad}$.
- > Allarguem el segment $\overline{AD}$ que correspon al radi traslladant la mesura $\sin(\pi/8)$, i així obtenir el punt H .
- > Unim els punts H i I .
- > Tracem una paral·lela des del punt D al segment $\overline{HI}$, i així obtenir el punt $B = x_0$.



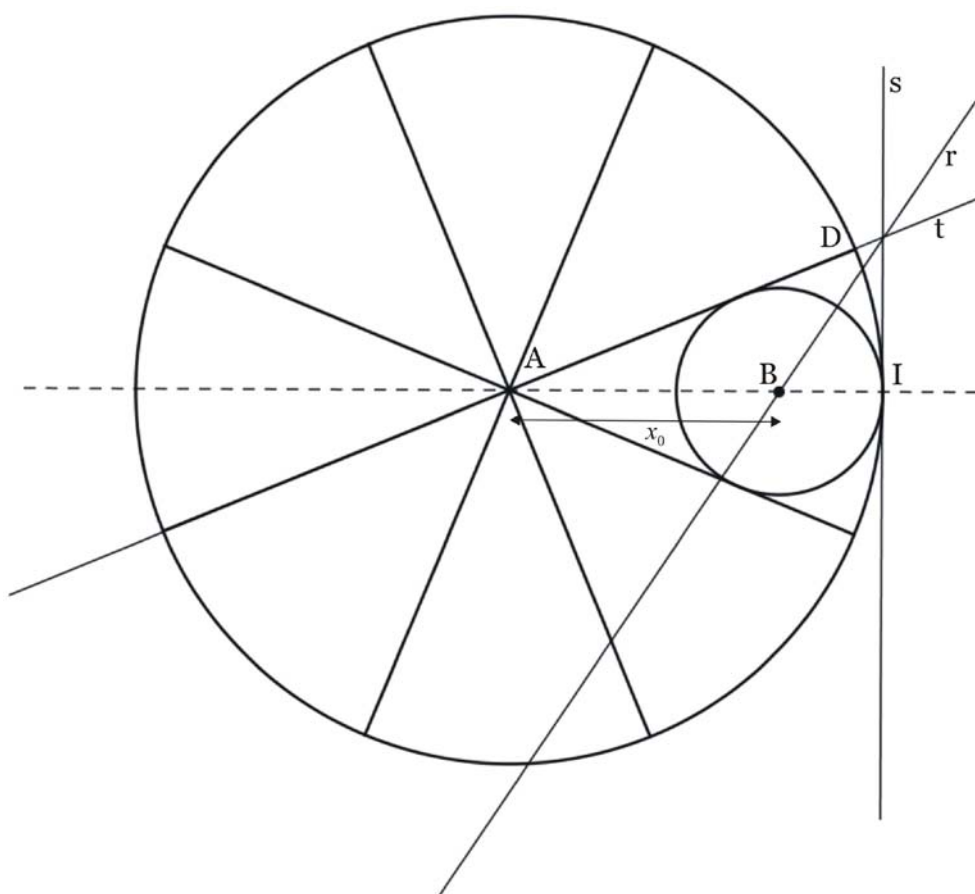
¹¹ Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 9.



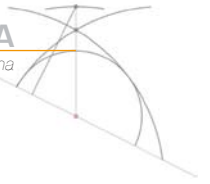
6.2 Estudi geomètric ¹²

Aquesta rosassa també es pot reproduir mitjançant un mètode geomètric estudiat a les classes de dibuix, el qual té en compte que la circumferència interior ha de ser tangent a la recta tangent en el punt de tangència de les dues circumferències (interior i exterior). Per tant el centre de la circumferència interior és l' incentre del triangle determinat per la recta tangent i les rectes dels radis del sector. En aquest cas coneixem el radi de la circumferència exterior i les parts en què està dividida la rosassa.

- > Dividim la circumferència en 8 parts de $\frac{\pi}{4}$ rad cada sector.
- > Tracem la bisectriu de cada sector.
- > Tracem la recta tangent s en el punt I , que aquest està a la intersecció de la bisectriu i la circumferència.
- > Prolonguem la recta t .
- > Tracem la bisectriu r , de l'angle que formen la recta t i la recta tangent s .
- > El resultat de la intersecció de la recta r i el radi de la circumferència dóna lloc al punt $B = x_0$, que és el centre de la circumferència interior.

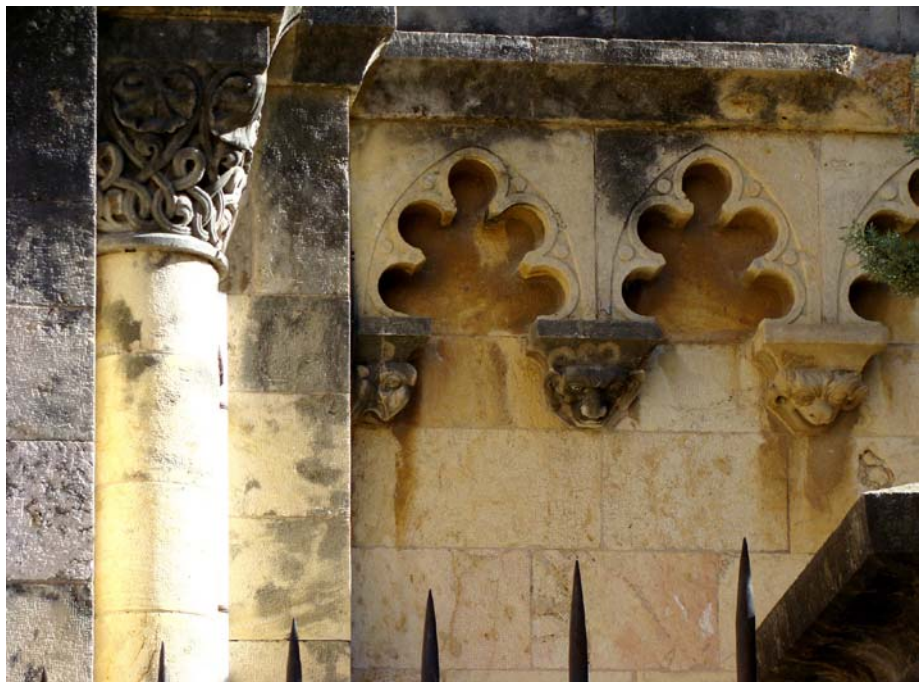


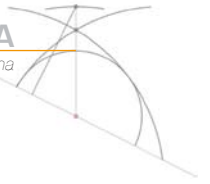
¹² Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 10.



7 ARC LOBULAT (de cinc lòbuls)

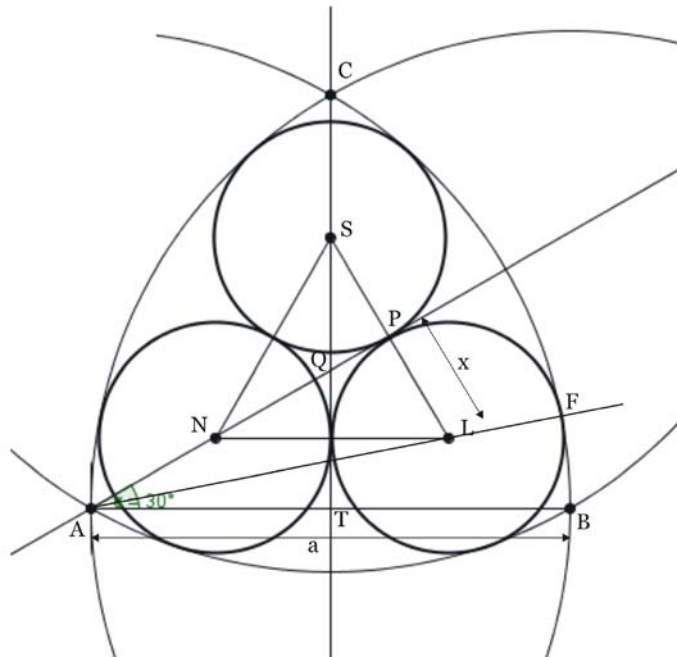
En el següent apartat estudiarem l'arc lobulat que és característic dels estils gòtic i àrab. En aquest cas l'arc està constituït per sis circumferències tangents entre si. És un arc comú en moltes ciutats i en la nostra ciutat es pot trobar a l'entrada del claustre de la catedral, com es pot veure en les fotografies adjuntes.





7.1 Estudi algebàric del cas simple de l'arc lobulat ¹³

Ja que aquest arc és molt complex, primer de tot farem un estudi més simple, simplificant-lo a tres circumferències tangents entre elles i alhora a tres de més grans exteriors, tal com es pot veure en la figura adjunta.



Anomenem:

- > a el radi de les circumferències exteriors és una dada coneguda.
- > x el radi de les circumferències interiors.
- > N, L, S els centres de les circumferències interiors.
- > A, B, C els centres de les circumferències exteriors són dades conegudes.
- > T el punt mitjà del radi a .
- > P el punt de tangència entre dues circumferències interiors.
- > Observant la figura tenim:
 - $\overline{AP} = \overline{AQ} + \overline{QP}$
 - $\overline{AL} = \overline{AF} - \overline{LF} = \overline{AF} - \overline{PL} = \overline{AF} - x$

¹³ Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 11.



$$\text{- L'angle } QSP = 30^\circ$$

$$\text{- L'angle } NAT = 30^\circ$$

Per trobar la longitud x aplicarem el teorema de Pitàgores. Per poder aplicar-lo hem d'expressar en funció de x les longituds $\overline{AP}$ i $\overline{AL}$.

$$\bullet \overline{AP} = \overline{QP} + \overline{AQ}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg}(30^\circ) &= \frac{\overline{QP}}{\overline{PL}} \Rightarrow \overline{QP} = \frac{\overline{PL}}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos(30^\circ) &= \frac{\overline{AT}}{\overline{AQ}} \Rightarrow \overline{AQ} = \frac{\overline{AT}}{\cos(30^\circ)} = \frac{a}{2\cos(30^\circ)} = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{AP} &= \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{x+a}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right.$$

$$\bullet \overline{AL} = \overline{AF} - \overline{LF} = a - x$$

Apliquem el teorema de Pitàgores:

$$\overline{LA}^2 = \overline{PL}^2 + \overline{PA}^2$$

$$(a-x)^2 = x^2 + \left(\frac{x+a}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow (a^2 - 2ax) \cdot 3 = x^2 + 2ax + a^2 \Rightarrow 3a^2 - 6ax = x^2 + 2ax + a^2$$

$$2a^2 - 8ax - x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 + 8a^2}}{-2} = \frac{8a \pm \sqrt{72a^2}}{-2} = \frac{8a \pm 6a\sqrt{2}}{-2}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4a - 3a\sqrt{2} = -a(4 + 3\sqrt{2}) \\ x_2 = -4a + 3a\sqrt{2} = a(-4 + 3\sqrt{2}) \end{cases}$$

La primera solució x_1 no és vàlida perquè és negativa, però la segona sí que ho és.

Per poder traçar la construcció dels centres, partirem de la posició de N amb el càlcul de $\overline{AN}$ en funció de x . Aquesta la calculem de la següent manera:

$$\overline{AN} = \overline{AQ} - \overline{NQ}$$

$$\overline{NQ} = \overline{NP} - \overline{QP}$$



$\overline{NP}$ es pot trobar mitjançant el teorema de Pitàgores.

$$\begin{aligned} & \overline{NL}^2 = \overline{PL}^2 + \overline{NP}^2 \\ & \overline{NP} = \sqrt{\overline{NL}^2 - \overline{PL}^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\overline{NQ} = \overline{NP} - \overline{QP} = x\sqrt{3} - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{3x - x}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{AN} = \overline{AQ} - \overline{NQ} = \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{3x - x}{\sqrt{3}} = \frac{a - 2x}{\sqrt{3}}$$

> En el següent pas es substitueix x pel seu valor en funció de a , per així poder obtenir el resultat en funció d'una sola variable.

$$\overline{AN} = \frac{a - 2a(-4 + 3\sqrt{2})}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot a(3 - 6\sqrt{2})}{3} = \sqrt{3} \cdot a(3 - 2\sqrt{2})$$

Per poder representar aquest arc, primer hem de situar els tres centres interiors, aquests els posicionarem mitjançant la dada $\overline{AN} = \sqrt{3} \cdot (3 - 2\sqrt{2})$, prenem com a unitat de mesura $a = 1$. Aquesta dada la podem construir mitjançant el teorema de Tales, ja que podem transformar l'igualtat obtinguda a la fórmula del teorema. Després de situar els centres podrem saber quin és el radi de les circumferències mitjançant perpendiculars.

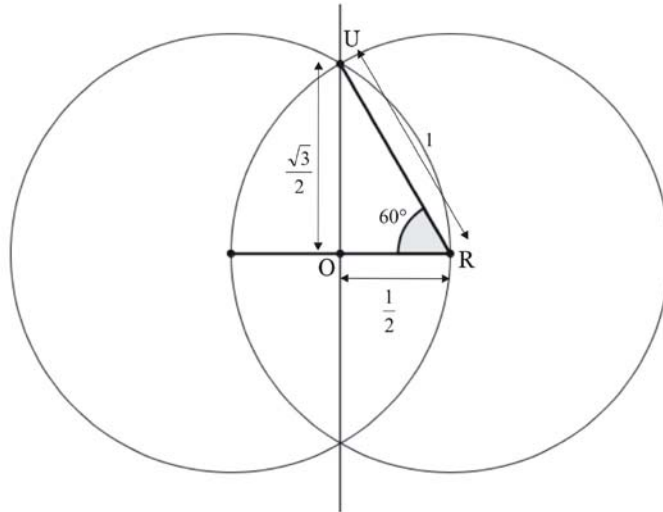
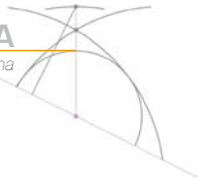
Construïm la longitud $\overline{AN}$:

$$\overline{AN} = \sqrt{3} \cdot (3 - 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{AN}{3 - 2\sqrt{2}}$$

La longitud $\sqrt{3}$ la construïm mitjançant un triangle rectangle UOP , tal com es pot veure en la figura adjunta, ja que:

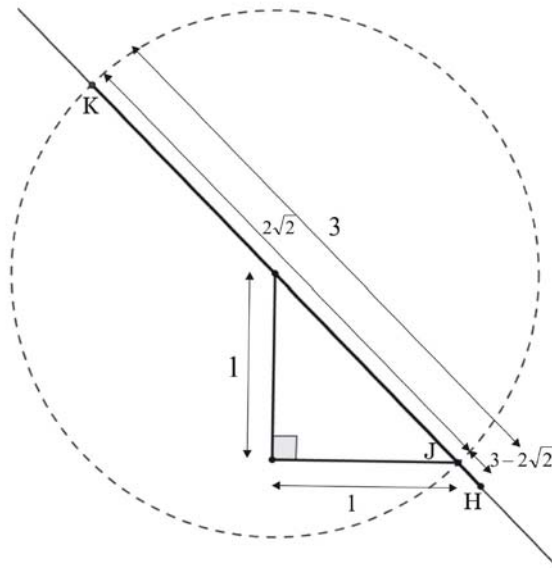
$$\overline{AN} = \sqrt{3} \cdot (3 - 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{AN}{3 - 2\sqrt{2}}$$

només cal multiplicar el resultat per dos per obtenir $\sqrt{3}$.



La longitud $3 - 2\sqrt{2}$ la construïm de la següent manera, tal com es pot veure en la figura conjunta,

- > Multipliquem el segment $\sqrt{2}$ dues vegades obtenint $\overline{JK}$.
- > Restem a $\overline{JK}$ tres vegades la unitat i obtenim $\overline{HJ} = 3 - 2\sqrt{2}$.

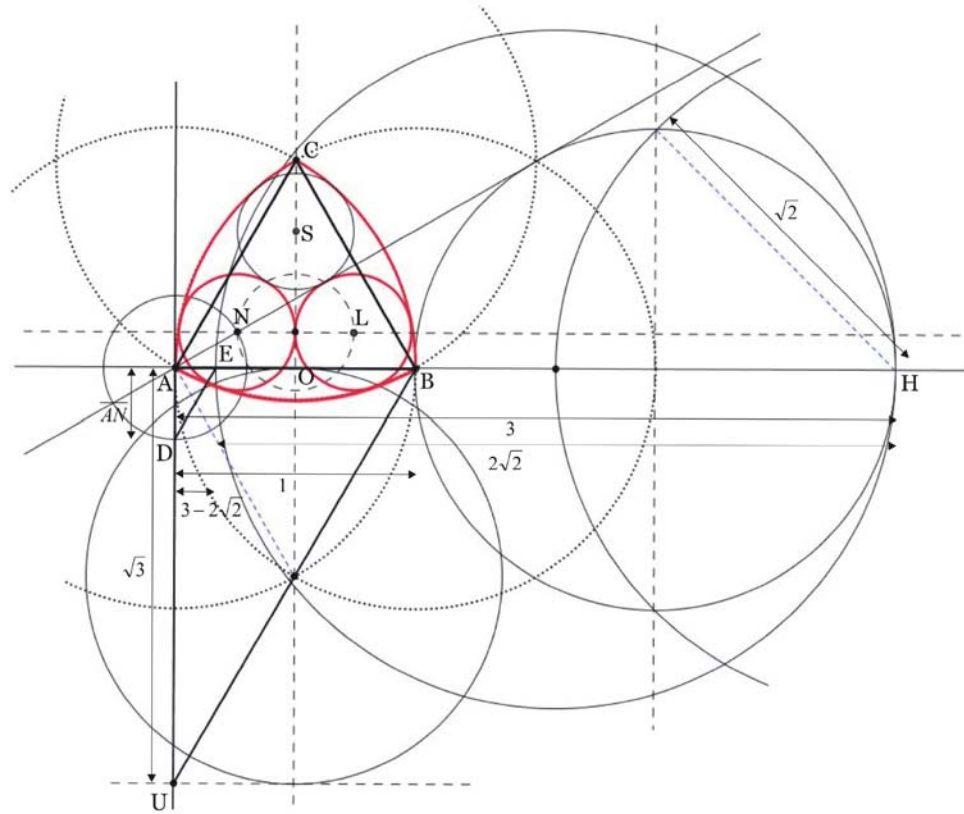
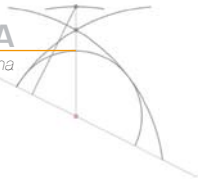


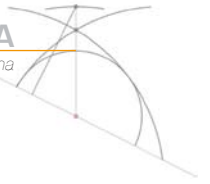
Finalment obtindrem $\overline{AN}$ aplicant el teorema de Tales, tal com es pot veure en la figura conjunta,

- > Transportem les dades: $3 - 2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i a dues rectes secants qualsevol, formant el triangle CBE .

- > Transportem la mesura $\overline{AN}$ a la bisectriu resultant del triangle que formen els tres centres de les circumferències exteriors a partir de A donant lloc al punt N .
- > Tracem una mediatriu al segment $\overline{AB}$.
- > Tracem una perpendicular que passi pel punt N i per la recta anterior, donant lloc al punt P .

040

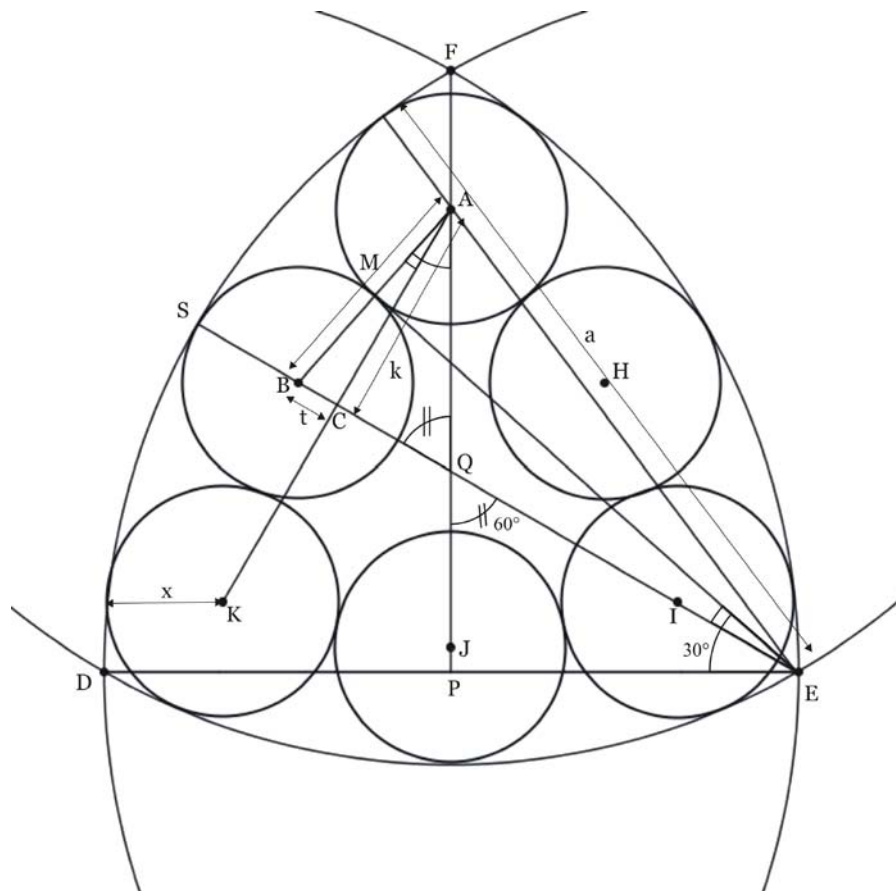




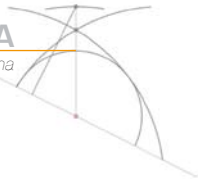
7.2 Estudi algebriac arc de cinc lòbuls ¹⁴

Tot seguit estudiarem l'arc que conté sis circumferències tangents entre si, aquest és el cas complex de l'arc anterior. L'element de sortida és el radi a . Anomenem:

- > a el radi de les tres circumferències exteriors, és una dada coneguda.
- > x el radi de les sis circumferències interiors.
- > A, B, H, K, J, I els centres de les sis circumferències interiors.
- > D, E, F els centres de les tres circumferències exteriors.
- > t la distància $\overline{BC}$.
- > M la distància $\overline{AB}$.
- > k la distància $\overline{AC}$.



¹⁴ Aquesta construcció es pot trobar en el fitxer 12.



Observem:

> Els triangles ABC i BME són semblants, llavors:

$$\frac{2x}{(1-x)} = \frac{t}{x}$$

> La descomposició de a és:

$$a = \overline{ES} = x + t + \overline{CQ} + \overline{QE} \Rightarrow a = x + t + k \cdot \operatorname{tg}(30^\circ) + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\cos(60^\circ)} \Rightarrow a = x + t + \frac{k+a}{\sqrt{3}}$$

$$> \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \Rightarrow (2x)^2 = t^2 + K^2$$

En aquest arc prenem el radi de les circumferències exteriors com a unitat de mesura, és a dir $a = 1$. De les igualtats anteriors hem obtingut un sistema de tres equacions amb tres incògnites, operem:

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{(1-x)} = t \\ (2x)^2 = t^2 + k^2 \\ 1 = x + t + \frac{k}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

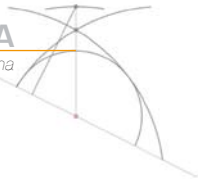
$$(2x)^2 = \left(\frac{2x^2}{1-x} \right)^2 + k^2 \Rightarrow 4x^2 = \frac{4x^4}{(1-x)^2} + k^2$$

$$k = \left(1 - x - t - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{3} \Rightarrow k = \left(1 - x - \left(\frac{2x^2}{1-x} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{3}$$

$$4x^2 = \frac{4x^4}{(1-x)^2} + \left[\left(1 - x - \left(\frac{2x^2}{1-x} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{3} \right]^2 \Rightarrow 4x^2 = \frac{4x^4}{(1-x)^2} + \left[\left(\sqrt{3} - \sqrt{3}x - \frac{(2x^2\sqrt{3})}{(1-x)} - 1 \right) \right]^2$$

$$4x^2 = \frac{4x^4 + \left(\sqrt{3}(1-x) - \sqrt{3}x(1-x) - (2x^2\sqrt{3}) - (1-x) \right)^2}{(1-x)^2}$$

$$4x^2(1-x)^2 = 4x^4 + \left(\sqrt{3}(1-x) - \sqrt{3}x(1-x) - (2x^2\sqrt{3}) - (1-x) \right)^2$$



La igualtat anterior té molta complexitat, per aquest motiu l'hem d'introduir en un programa d'ordinador, com per exemple el Derive. Els resultats són:

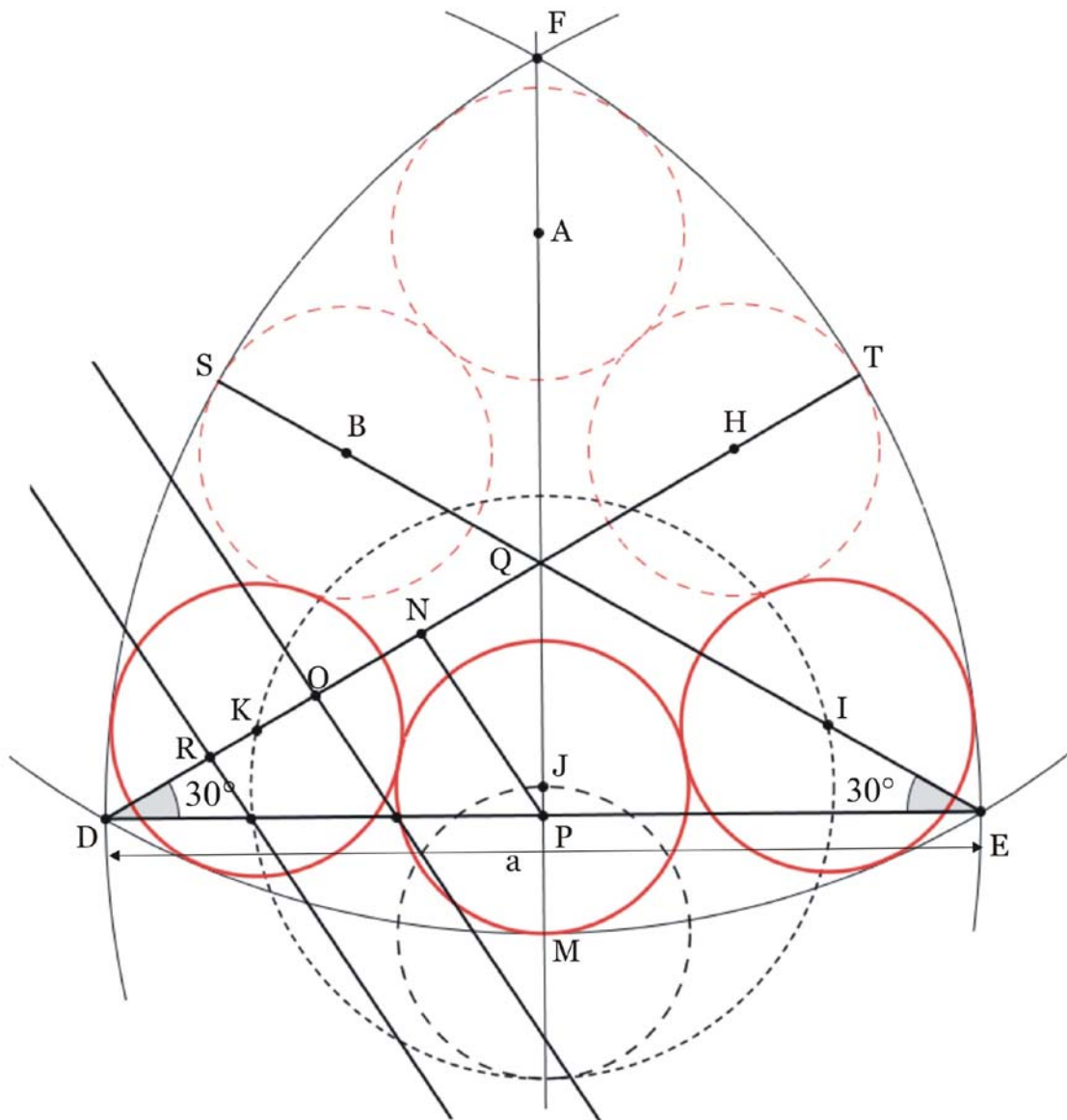
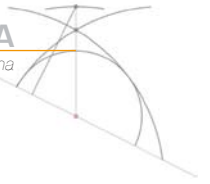
$$\begin{cases} x = 0.3603706291 \\ x = -0.5400004978 \\ x = 0.1669219812 \\ x = -5.499258240 \end{cases}$$

El resultat que millor s'ajusta a l'arc que estem estudiant és $x = 0.1669219812$, que curiosament s'aproxima molt a $\frac{1}{6}$ i l'error és tan mínim que l'ull humà no té la capacitat de detectar-ho, l'error tan sols és de $2,55 \cdot 10^{-4} a$.

Construïm l'arc de la següent manera:

- > Dividim el radi a en 6 parts iguals.
- > Tracem la mediatriu del segment $\overline{DE}$.
- > Tracem una circumferència de radi $\frac{a}{6}$ amb centre M , el punt J que en resulta és un centre d'una circumferència interior.
- > Tracem una circumferència de radi $\frac{a}{3}$ amb centre J .
- > Tracem un segment que formi 30° amb el segment $\overline{DE}$. De la intersecció del segment amb la circumferència anterior en resulta el punt I , centre d'una circumferència interior.

Aquest procés cal repetir-lo tres vegades consecutives per poder dibuixar totes les circumferències interiors, i així aconseguir l'arc de cinc lòbuls.





8 CONCLUSIÓ

La conclusió que puc obtenir després de fer aquest treball de recerca és que, veritablement, es pot aplicar l'àlgebra a la vida real, i que mitjançant aquesta es pot arribar a resultats molt curiosos, com ja hem vist al llarg del treball. L'àlgebra pot ser una eina molt interessant, ja que ajuda a entendre les coses d'una altra manera i a més a més des d'una perspectiva diferent. Al mateix temps, l'àlgebra també ens permet arribar a conclusions que mitjançant la geometria, el procés hagués estat més llarg.

Les parts que considero que han estat més difícils són: la part de cercar les equacions algèbriques per poder fer les construccions, que ho ha estat pel simple fet que no tinc experiència en aquest àmbit; la part de fer les figures visuals, ja que els programes que he utilitzat requereixen temps i la part de la redacció, ja que les matemàtiques són una ciència difícil d'expressar, i molt més per a una persona que no acostuma a escriure treballs d'aquesta mena. Però també s'ha de dir que el que més m'ha agradat ha estat, poder-me introduir una mica més en el món de l'àlgebra i també haver après a utilitzar una col·lecció de programes que mai havia emprat.

En la meva opinió la recerca ha estat difícil, ja que senzillament mai no havia fet cap treball de recerca. A més es tracten temes complicats que requereixen molt de temps i un gran esforç. Les hores dedicades a dibuixar les figures adjuntes han estat llargues i les estones pensant com realitzar els problemes també.

He après a obrir la ment i a veure més enllà de les coses materials. Crec que ha estat una gran tasca amb la que he gaudit.



9 BIBLIOGRAFIA

- > GONZÁLEZ, Mario i PALENCIA, Julián [1989] Dibujo técnico I, Trazado geométrico, Autor editor.
- > TICÓ, Teresa [2004] Passeig Matemàtic per Catalunya, Pagès editors.
- > MORENO, Francisco [1989] Arcos y bóvedas, editorial CEAC.
- > www.artifexbalear.org/diccon.htm
- > www.ca.wikipedia.org/wiki/Arc_%28arquitectura%29

10 FOTOGRAFIES I FIGURES ADJUNTES

Fotografies realitzades per Ramon Nolla i Anna Abelló, situades a la Part Alta de la ciutat de Tarragona.

Figures adjuntes realitzades per Anna Abelló, mitjançant els programes:

- > Geogebra
- > Cabri Geometre II
- > Corel Draw 11

Els fitxers CABRI han estat realitzats per l'autora del treball, Anna Abelló, amb l'ajut de les macros de visualització de traçat de línies, cedides pel tutor, Ramon Nolla.