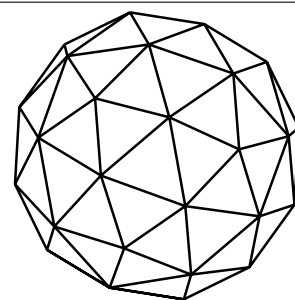


Càlculs per a la construcció d'una cúpula icosaèdrica de freqüència 2

RAMON MASIP & RAMON NOLLA
Departament de Matemàtiques
Institut Pons d'Icart

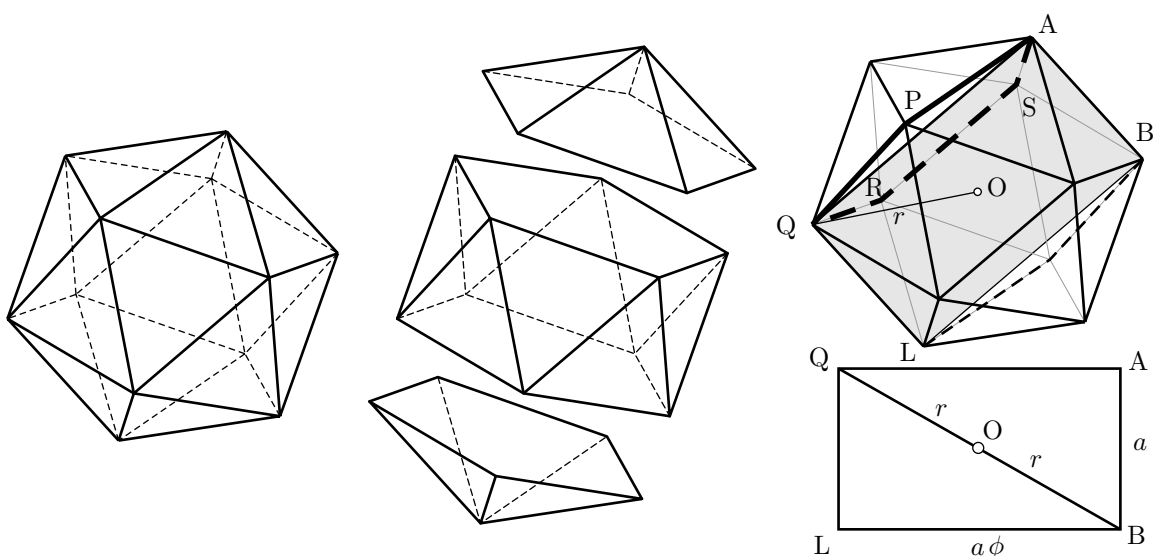
P
R
O
J
E
C
T
E

Construcció d'un poliedre que approximi una superfície esfèrica a partir de la triangulació d'un icosaedre. Anomenarem **cúpula icosaèdrica** aquest poliedre.



1. Sobre l'icosaedre. Definició i algunes propietats que cal tenir presents.

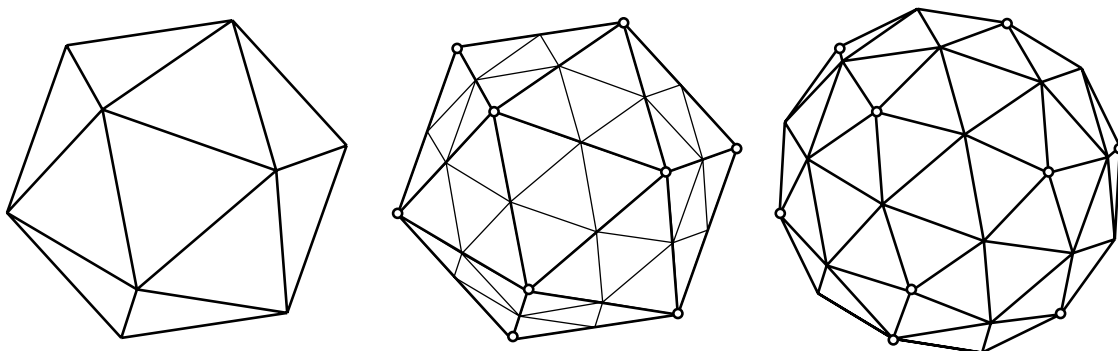
- Un icosaedre és un poliedre que té 20 triangles equilàters com a cares, de manera que en cada vèrtex incideixen cinc d'aquests triangles.
- Els seus vèrtexs es distribueixen sobre una esfera.
- Es pot descompondre en dues piràmides pentagonals regulars i un antiprisma pentagonal regular.
- El rectangle $ABQL$ determinat per dues diagonals paral·leles de les bases de l'antiprisma té el centre en el centre O de l'esfera, la seva diagonal mesura dues vegades el radi r de l'esfera i la relació entre els seus costats és igual al *nombre d'or* $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Qualsevol rectangle amb aquesta propietat rep el nom de *rectangle auri*.¹



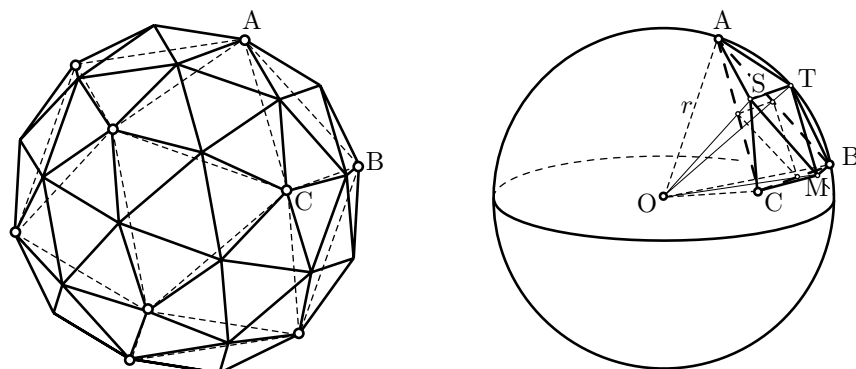
¹Demostrareu aquesta propietat en l'activitat 3.1.

2. Generació de la cúpula icosaèdrica. Etapes que ens conduiran a un procediment de construcció.

- Triangulació: Es parteix cada cara en quatre triangles equilàters iguals determinats pels punts mitjans dels costats de les cares.²
- Projecció: Es projecten, sobre l'esfera que circumscriu l'icosaedre i des del seu centre, els vèrtexs de la triangulació resultant.
- Construcció: La cúpula icosaèdrica s'obté mitjançant la construcció dels triangles determinats pels punts resultants de la projecció dels vèrtexs sobre l'esfera.



Detall de la projecció. S'observa de quina manera la triangulació de la cara ABC es projecta sobre les cares de la cúpula determinades pels punts A, T, S, C, M i B .³



Conclusió

El nostre objectiu ha quedat definit. Perseguim la construcció de la cúpula presentada en el gràfic anterior mitjançant la determinació de les seves arestes. De l'observació atenta dels gràfics es desprèn que n'hi ha de dos tipus. Així només ens resta calcular les seves longituds en funció del radi r , tal com es proposa en les activitats de la secció següent.

²Aquest procés de dividir les arestes de l'icosaedre en dues parts iguals originarà una cúpula anomenada de *freqüència* 2. Si dividíssim les arestes en 3, 4, ..., n parts iguals en resultarien cúpules de *freqüència* 3, 4, ..., n . En aquests casos es generarien 9, 16, ..., n^2 triangles en cada cara. Això ajudaria a aconseguir un efecte visual més arrodonit.

³En l'activitat 3.3 es mostra una ampliació de la figura.

3. Activitats per al càlcul exacte de la longitud de les arestes de la cúpula

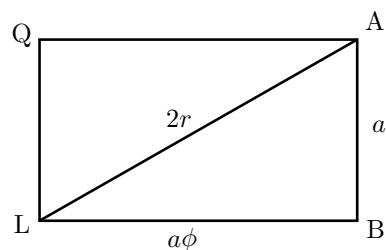


3.1 Demostreu que la relació entre la diagonal i el costat d'un pentàgon regular és igual al *nombre d'or* $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. A partir d'aquest resultat justifiqueu l'última propietat presentada al final de la secció 1.



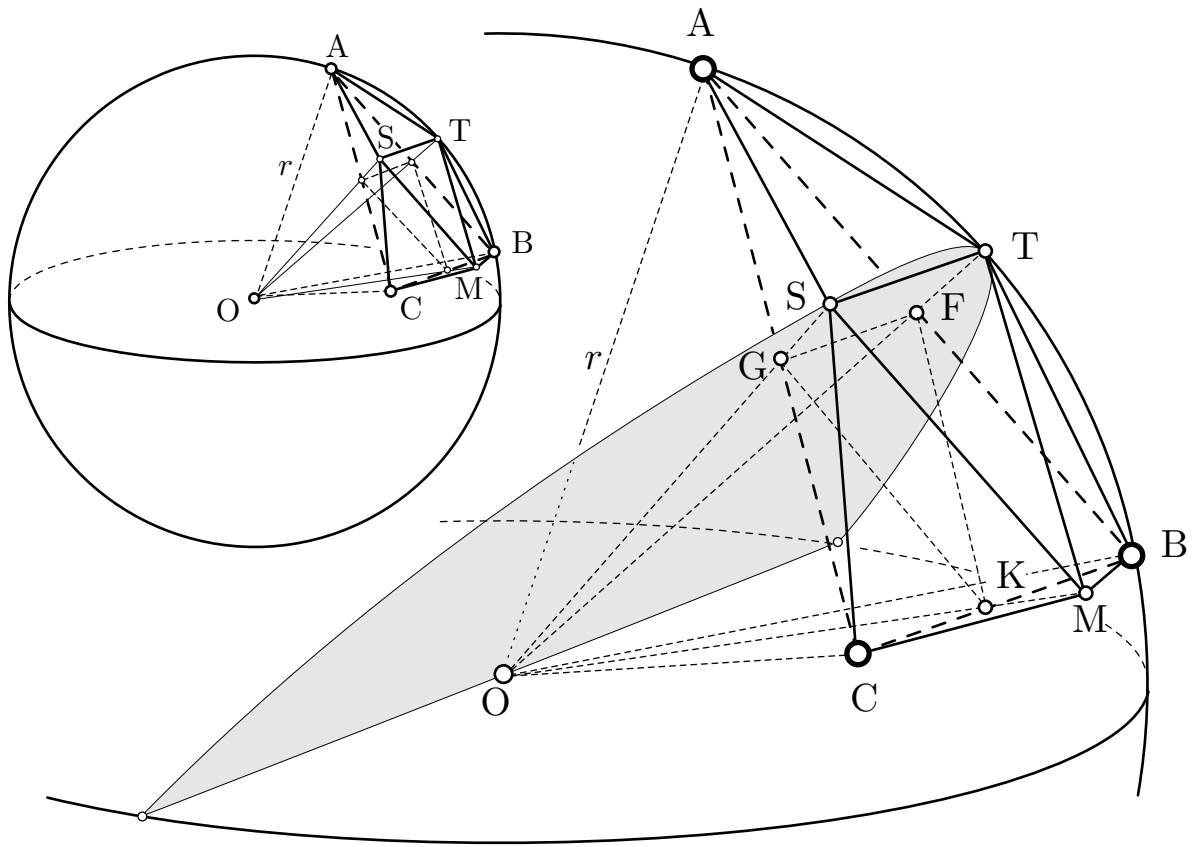
3.2 Relació entre la longitud de l'aresta de l'icosaedre i el radi de l'esfera. Demostreu que la relació entre la longitud de l'aresta a de l'icosaedre i el radi r de l'esfera circumscriu ve donada per

$$a = \frac{2r}{\sqrt{2 + \phi}}, \text{ en què } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$





3.3 Identificació de les arestes de la cúpula. Observeu atentament les figures i indiqueu els dos tipus d'arestes que serviran per construir tota la cúpula.

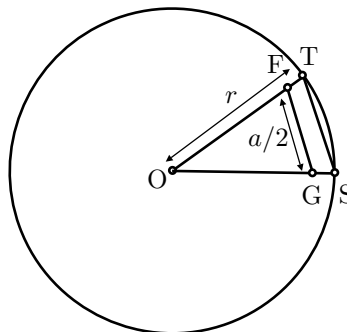
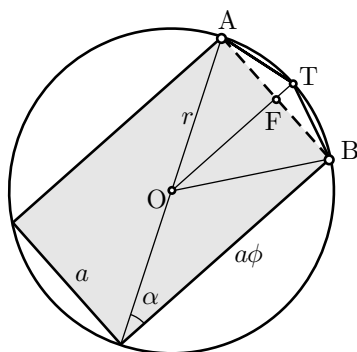


- Arestes curtes.

- Arestes llargues.



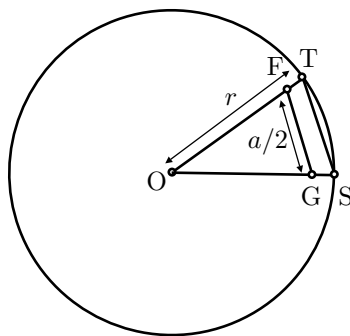
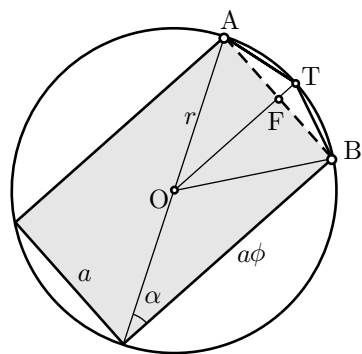
3.4 Càlcul de les arestes de la cúpula. A partir de l'observació dels gràfics de sota i dels de l'activitat anterior, les arestes a calcular són AT i TS . Demostreu que:



- a) $\cos \alpha = \frac{\phi}{\sqrt{2 + \phi}}.$
- b) $AT = r \cdot \sqrt{2 \left(1 - \frac{\phi}{\sqrt{2 + \phi}} \right)} \approx 0.546533 r.$ (Utilitzeu el teorema del cosinus.)
- c) $TS = \frac{r}{\phi} \approx 0.618034 r.$ (Utilitzeu la semblança de triangles.)

4. Activitats per al càlcul alternatiu de la longitud de les arestes de la cúpula mitjançant construccions amb GEOGEBRA. En aquestes activitats, a partir de l'aresta AB de longitud a de l'icosaedre i de la construcció del rectangle auri, es pretén:

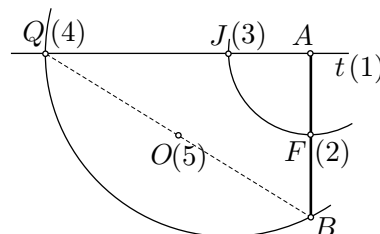
- Construir les projeccions A, T i T, S sobre l'esfera, des del seu centre O , dels extrems dels segments AF i FG de longitud coneguda i igual a $a/2$. Els segments AT i TS seran els representants dels dos tipus d'arestes de la cúpula.
- Calcular, a partir de la construcció i amb les eines de nombre i angle del programa, les longituds d'aquestes arestes en funció del radi.



4.1 Construcció del centre de l'esfera a partir dels vèrtexs del rectangle auri que té l'aresta AB , —de longitud a —, de l'icosaedre com a costat menor.

Recordem que el costat major del rectangle és $a\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$. Les etapes passaran per la construcció d' $a\phi$ i del centre O de rectangle des del qual farem les projeccions. Concretament, traceu:

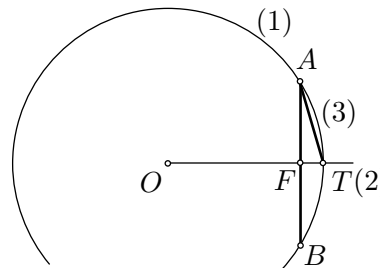
- La recta t perpendicular, per A , a AB .
- El punt mitjà F d' AB .
- El punt d'intersecció J de t i (A, AF) .
- El punt d'intersecció Q de t i (J, JB) . [Heu obtingut AQ de longitud $a\phi$.]
- El punt mitjà O entre Q i B . [Aquest és el centre de projecció.]



4.2 Construcció del segment AT que representa l'aresta curta de la cúpula.

Traceu:

- La circumferència (O, OA) .
- El punt T d'intersecció de la recta OF amb (O, OA) .
- El segment AT . [Heu obtingut l'aresta curta de la cúpula.]

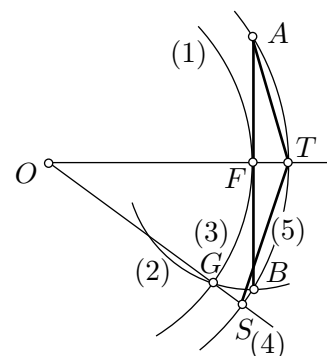




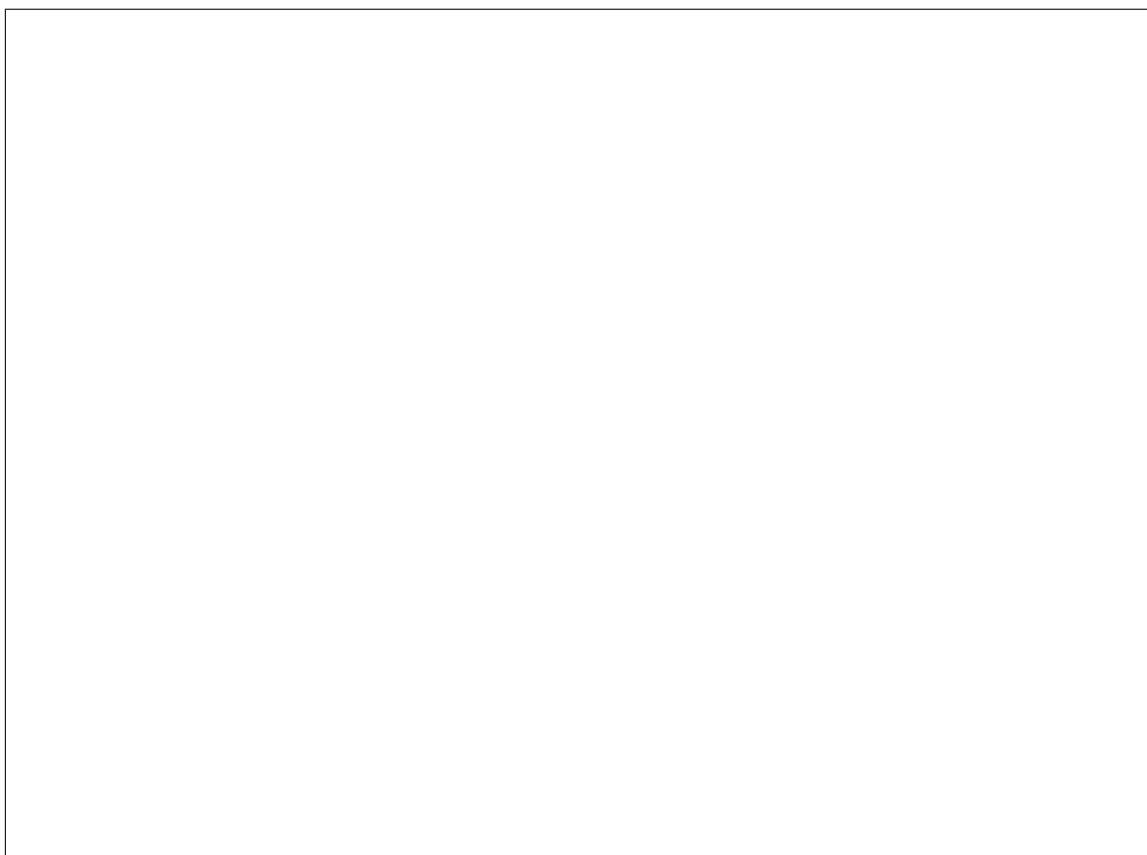
4.3 Construcció del segment TS que representa l'aresta llarga de la cúpula.

Els punts T i S són les projeccions dels punts mitjans F i G de dues arestes de l'icosaedre.⁴ Per tant, equidisten del punt O i es troben sobre una circumferència que té aquest punt per centre. Llavors, si partiu del segment FB , podeu obtenir la construcció. Traceu:

- (1) La circumferència $\mathcal{C}_1(O, OF)$.
- (2) La circumferència $\mathcal{C}_2(F, FB)$.
- (3) El punt d'intersecció G de $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$. [Heu obtingut l'aresta FG de l'icosaedre.]
- (4) El punt d'intersecció S de la recta OG amb (O, OA) .
- (5) El segment TS . [Heu obtingut el segon tipus d'arestes de la cúpula.]



Espai per a proves amb regle i compàs físics:



4.4 Càlcul de la longitud de les arestes de la cúpula en funció del radi.

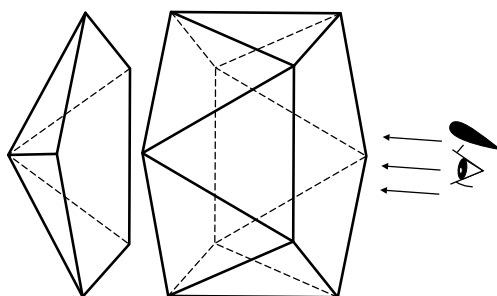
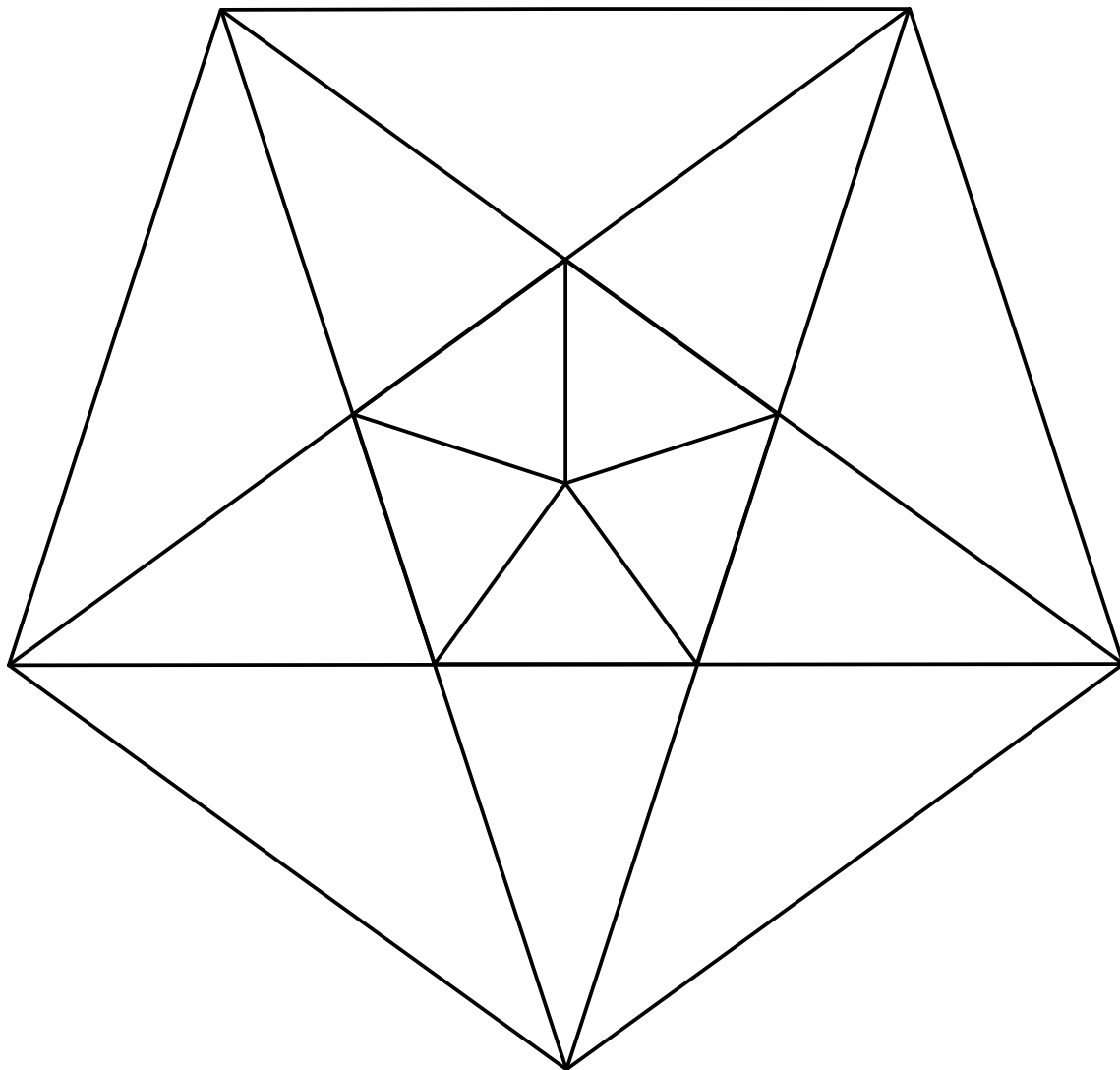
- (1) Amb l'eina Distància del grup Eines de nombre i angle, trobeu les longituds dels segments AT , TS i OA .
- (2) A la Línia d'entrada del peu de finestra del GEOGEBRA introduïu les divisions AT/OA i TS/OA i comproveu que obteniu els resultats de l'activitat 3.4.
- (3) Trameteu el fitxer obtingut amb el nom *nomAlumne.ggb*.

⁴Vegeu la figura de l'activitat 3.3.

5. Instruccions per a la construcció material de la cúpula icosaèdrica.

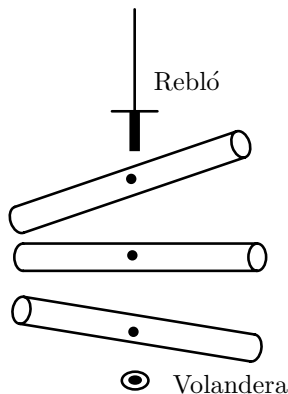


5.1 Identificació dels diferents tipus d'arestes sobre un diagrama. L'esquema dibuixat a continuació correspon al diagrama d'una part de l'icosaedre, (les 15 cares que configuren una piràmide pentagonal i l'antiprisma d'igual base). Heu de fer una divisió de cada triangle de l'esquema en 4 triangles. Després dibuixeu les arestes amb dos colors, de manera que les arestes que corresponen a longituds iguals en la cúpula siguin del mateix color.





5.2 Càlcul del nombre d'arestes i de vèrtexs de la cúpula icosaèdrica i construcció material. La construcció física de la cúpula icosaèdrica la farem amb varetes de fusta de 4mm de diàmetre de les dues longituds calculades a l'apartat anterior. La connexió entre les arestes les farem amb un objecte construït amb tres trossos de tub de goma de reg de també 4mm de diàmetre interior lligats amb un rebló i una volandera.



- Calculeu quantes varetes necessitem de cada tipus i les seves longituds si volem construir una cúpula icosaèdrica de 1.10 metres de diàmetre
- Observeu i recordeu que els vèrtexs són de dos tipus, (els que hi arriben 5 arestes i els que hi arriben 6 arestes). Quants n'hi ha de cada tipus?

Raoneu els càlculs amb l'ajut d'esquemes gràfics.