

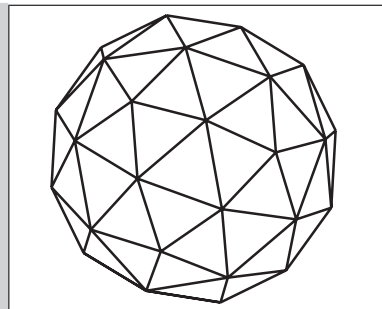
# Càlculs per a la construcció d'una cúpula icosaèdrica de freqüència 2. Indicacions per a freqüència 4

RAMON MASIP & RAMON NOLLA  
 Departament de Matemàtiques  
 Institut Pons d'Icart

P  
R  
O  
J  
E  
C  
T  
E

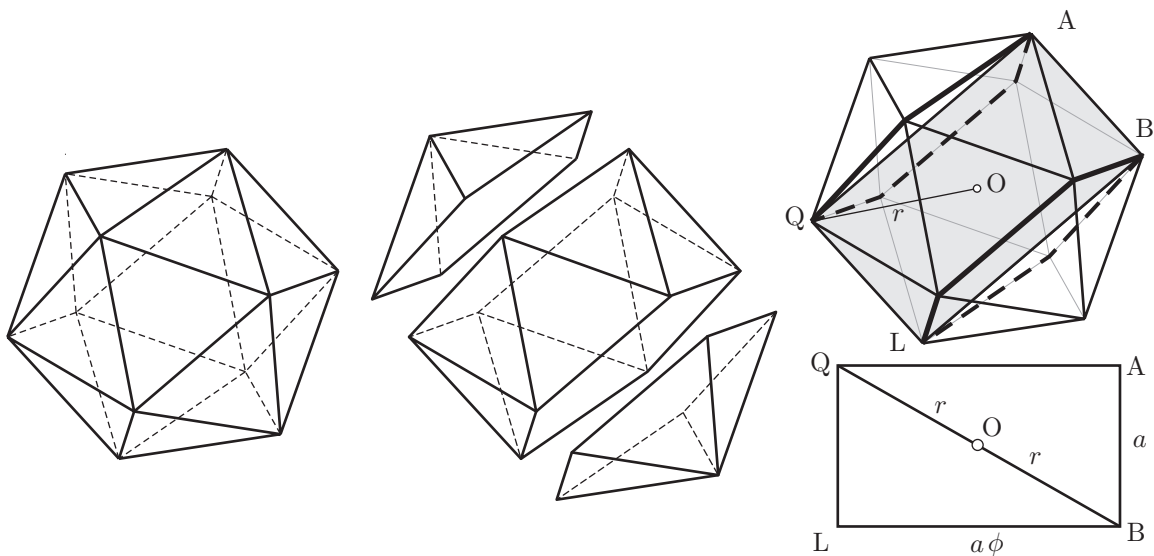
Construcció d'un poliedre que approximi una superfície esfèrica a partir de la triangulació d'un icosaedre. Anomenarem **esfera icosaèdrica** aquest poliedre i **cúpula icosaèdrica** a una part d'aquesta esfera.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Parlarem indistintament de cúpula o esfera



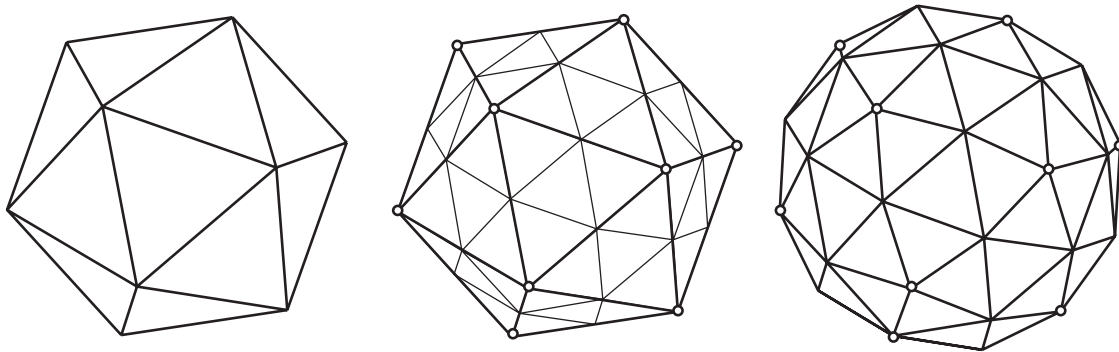
## 1. Sobre l'icosaedre. Definició i algunes propietats que convé tenir presents en aquest projecte.

- Un icosaedre és un poliedre que té 20 triangles equilàters com a cares, de manera que en cada vèrtex incideixen cinc d'aquests triangles.
- Els seus vèrtexs es distribueixen sobre una esfera, la qual circumscriu el poliedre.
- Es pot descompondre en dues piràmides pentagonals regulars i un antiprisma pentagonal regular.
- El rectangle  $ABQL$  determinat per dues diagonals paral·leles de les bases de l'antiprisma té el centre en el centre  $O$  de l'esfera, la seva diagonal mesura dues vegades el radi  $r$  de l'esfera i la relació entre els seus costats és igual al *nombre d'or*  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , la qual cosa demostrareu més endavant. Qualsevol rectangle amb aquesta propietat rep el nom de *rectangle auri*.

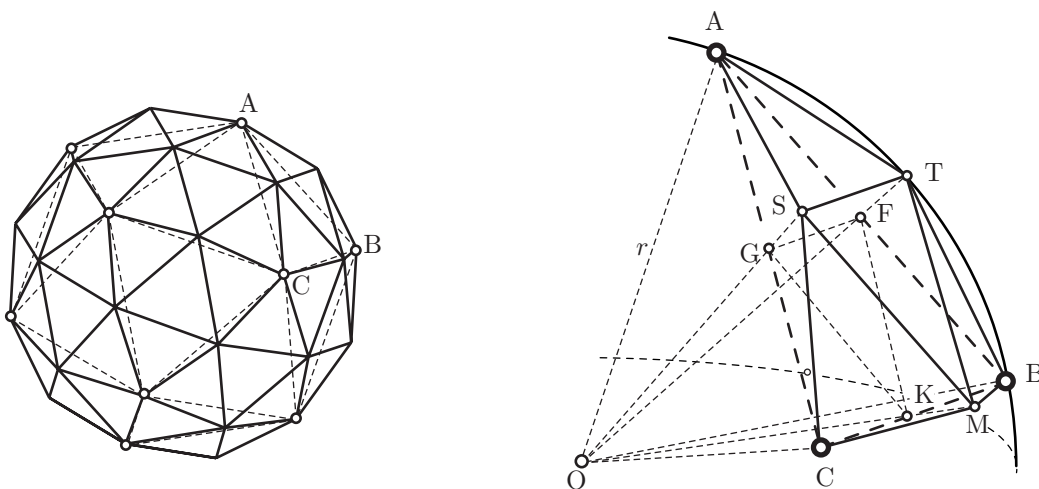


**2. Generació de la cúpula icosaèdrica de freqüència 2.** Etapes que ens conduiran a un procediment de construcció.

- Triangulació: Es parteix cada cara en quatre triangles equilàters iguals determinats pels punts mitjans dels costats de les cares.
- Projecció: Es projecten, sobre l'esfera que circumscriu l'icosaedre i des del seu centre, els vèrtexs de la triangulació resultant.
- Construcció: La cúpula icosaèdrica s'obté mitjançant la construcció dels triangles determinats pels punts resultants de la projecció dels vèrtexs sobre l'esfera.



• **Detall de la projecció.** S'observa de quina manera els vèrtexs de la triangulació d'una cara qualsevol,  $\triangle ABC$ , es projecten sobre l'esfera i determinen les cares determinades pels punts  $A, T, S, C, M$  i  $B$ .



• **Conclusió i objectiu**

L'objectiu ha quedat definit. Es persegueix la construcció de la cúpula presentada en el gràfic anterior mitjançant la determinació de les seves arestes. De l'observació atenta dels gràfics es desprèn que n'hi ha de dos tipus:

**Arestes llargues.**  $MT, TS$  i  $SM$

**Arestes curtes.**  $AS, SC, CM, MB, BT, BT, TA$ .

Així només resta calcular les seves longituds en funció del radi  $r$ , tal com es proposa en les activitats de la secció següent.

### 3. Activitats per al càlcul exacte de la longitud de les arestes de la cúpula

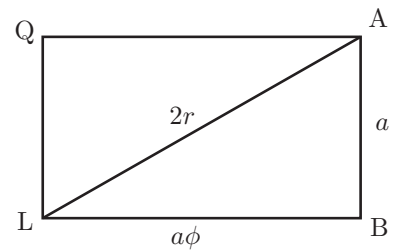


**3.1 Relació entre els costats del rectangle determinat per dues diagonals paral·leles de l'antiprisma central de l'icosaedre.** Demostreu que la relació entre la diagonal i el costat d'un pentàgon regular és igual al nombre d'or  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . A partir d'aquest resultat justifiqueu que la relació mencionada en la capçalera d'aquesta activitat és igual al nombre d'or  $\phi$ .

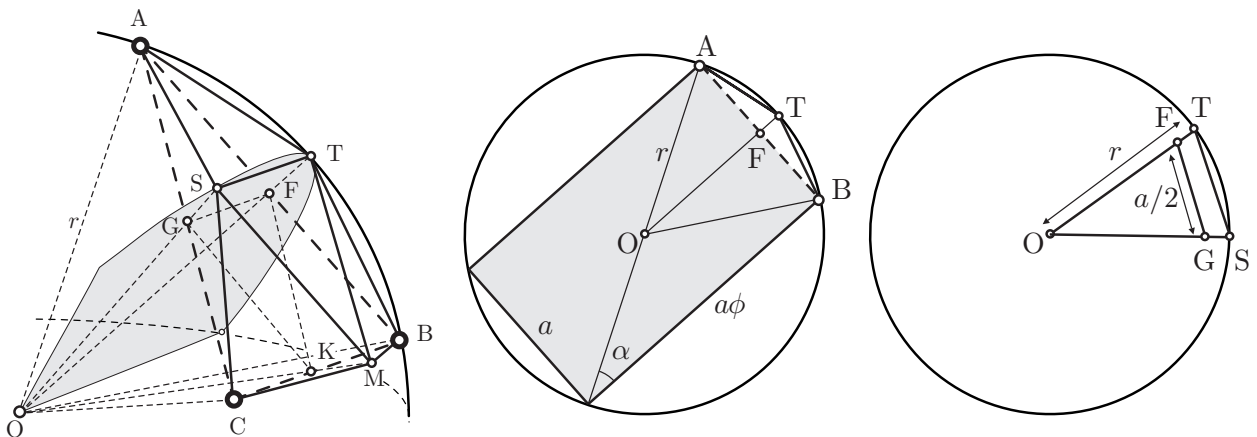


**3.2 Relació entre la longitud de l'aresta de l'icosaedre i el radi de l'esfera.** Demostreu que la relació entre la longitud de l'aresta  $a$  de l'icosaedre i el radi  $r$  de l'esfera circumscriu ve donada per

$$a = \frac{2r}{\sqrt{2 + \phi}}, \text{ en què } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$



**3.3 Càlcul de les arestes de la cúpula.** A partir de l'observació dels gràfics de sota, les arestes a calcular són  $AT$  i  $TS$ . Demostreu que:



a)  $\cos \alpha = \frac{\phi}{\sqrt{2 + \phi}}$ .

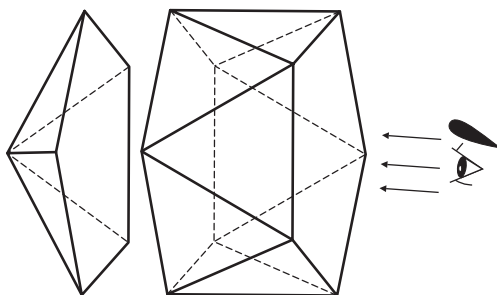
b)  $AT = r \cdot \sqrt{2 \left( 1 - \frac{\phi}{\sqrt{2 + \phi}} \right)} \approx 0.546533 r$ . (Utilitzeu el teorema del cosinus.)

c)  $TS = \frac{r}{\phi} \approx 0.618034 r$ . (Utilitzeu la semblança de triangles.)

#### 4. Activitats per a la construcció material de la cúpula icosaèdrica.



**4.1 Identificació dels diferents tipus d'arestes sobre un diagrama.** Imagineu que prescindiu d'una de les piràmides pentagonals que formen l'icosaedre. Observeu la part interior de la figura que resta a través de la base de l'antiprisma central.



- Elaboreu un diagrama pla de les línies que observeu.
- Per dissenyar un diagrama d'una cúpula de freqüència 2, dividiu les arestes del diagrama anterior en dues parts i dibuixeu les arestes que resulten d'unir aquests punts. Feu aquesta última part amb dos colors diferents de manera que les arestes que representen longitud iguals tinguin el mateix color. (També podeu dissenyar com quedaria el diagrama si volguéssiu representar l'esfera sencera.)



**4.2 Càlcul del nombre d'arestes i de vèrtexs de la cúpula icosaèdrica i construcció material.** La construcció física de la cúpula icosaèdrica es pot fer de diverses maneres.

- Si volem fer-ne una de petita de freqüència 2, d'entre 20 i 50 cm de diàmetre, per construir les arestes podem utilitzar cilindres fets amb paper enrotllat i empegat amb cola, foradats pels seus extrems i units mitjançant cargols seguint les indicacions del diagrama dissenyat en l'apartat 4.1(b). Una alternativa menys difícil és la de construir-ne el desplegament pla amb cartolina a partir del diagrama.
- Per a una de gran tamany, és interessant augmentar el nombre de triangles de cada cara de l'icosaedre, dividint cada aresta d'aquest en 3, 4, 5, ..., parts.<sup>1</sup> En aquest cas els càlculs són més complexos. Si considerem la freqüència 4, trobareu els resultats dels càlculs i el diagrama en el plafó penjat a la paret del passadís del Departament de Matemàtiques o en les pàgines finals d'aquests apunts. Es poden utilitzar tubs de PVC, (clorur de polivinil), dels qual haureu de doblegar els extrems sota l'acció de calor per afavorir la curvatura de l'esfera. Posteriorment caldrà foradar els extrems amb un trepant i unir els tubs amb cargols prèvia consulta del diagrama.

Calculeu,

- Quantes arestes de cada classe tindria una esfera de freqüència 2.
- El radi d'una esfera de freqüència 2 si construïm arestes llargues de 13.5 cm de longitud.

<sup>1</sup>En aquests casos s'anomenen cúpules o esferes icosaèdriques de freqüència 3, 4, 5, ...

# Annex

## 1. Càlculs per a les cúpules icosaèdriques de freqüències 2 i 4 amb GeoGebra

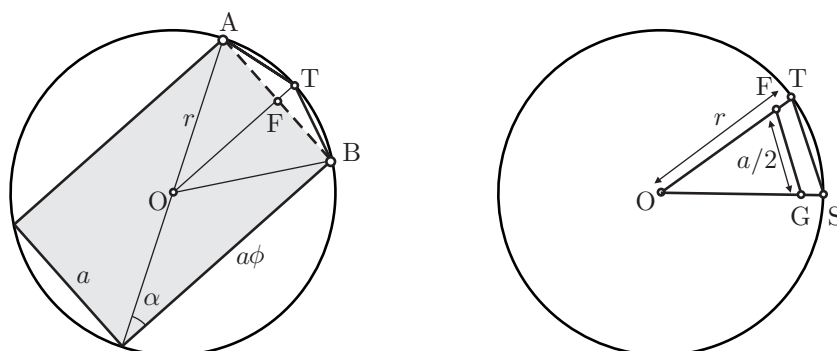
Les activitats anteriors han proporcionat la informació per construir una cúpula de freqüència 2. En els cas de la cúpula de freqüència 4, les estratègies són les mateixes però amb un augment important de complexitat en els càlculs. En tots dos casos es pot optar per seguir estratègies constructives geomètriques, amb l'ajut del programari GeoGebra.<sup>2</sup>

Per a les longituds dels diferents tipus d'arestes necessàries per construir una cúpula de freqüència 4 i diàmetre igual a 6 m, trobareu la informació numèrica necessària en les pàgines finals d'aquests apunts.

## 2. Activitats per al càlcul de la longitud de les arestes de la cúpula de freqüència 2 mitjançant construccions amb GeoGebra.

En aquestes activitats, a partir de l'aresta  $AB$  de longitud  $a$  de l'icosaedre i de la construcció del rectangle auri, es pretén:

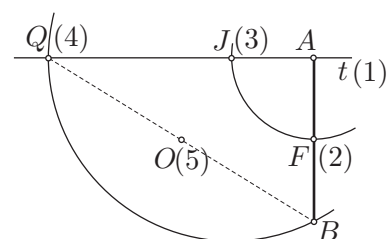
- Construir les projeccions  $A, T$  i  $T, S$  sobre l'esfera, des del seu centre  $O$ , dels extrems dels segments  $AF$  i  $FG$  de longitud coneguda i igual a  $a/2$ . Els segments  $AT$  i  $TS$  seran els representants dels dos tipus d'arestes de la cúpula.
- Calcular, a partir de la construcció i amb les eines de nombre i angle del programa, les longituds d'aquestes arestes en funció del radi.



### 2.1 Construcció del centre de l'esfera a partir dels vèrtexs del rectangle auri que té l'aresta $AB$ , —de longitud $a$ —, de l'icosaedre com a costat menor. Recordem que el costat major del rectangle és $a\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a$ . Les etapes passaran per la construcció d' $a\phi$ i del centre $O$ de rectangle des del qual farem les projeccions. Concretament, traceu:

costat major del rectangle és  $a\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a$ . Les etapes passaran per la construcció d' $a\phi$  i del centre  $O$  de rectangle des del qual farem les projeccions. Concretament, traceu:

- La recta  $t$  perpendicular, per  $A$ , a  $AB$ .
- El punt mitjà  $F$  d' $AB$ .
- El punt d'intersecció  $J$  de  $t$  i  $(A, AF)$ .
- El punt d'intersecció  $Q$  de  $t$  i  $(J, JB)$ . [Heu obtingut  $AQ$  de longitud  $a\phi$ .]
- El punt mitjà  $O$  entre  $Q$  i  $B$ . [Aquest és el centre de projecció.]

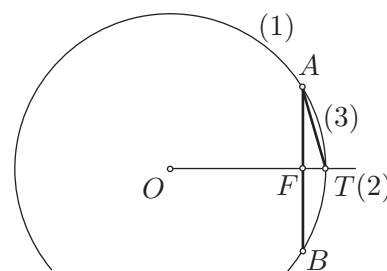


<sup>2</sup>Es poden trobar documents GeoGebra creats amb aquesta intenció en <https://ggbm.at/kkbyqum9>.



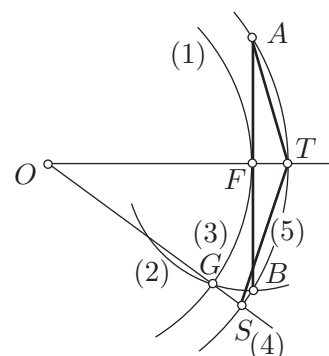
**2.2 Construcció del segment  $AT$  que representa l'aresta curta de la cúpula.** Traceu:

- (1) La circumferència  $(O, OA)$ .
- (2) El punt  $T$  d'intersecció de la recta  $OF$  amb  $(O, OA)$ .
- (3) El segment  $AT$ . [Heu obtingut l'aresta curta de la cúpula.]



**2.3 Construcció del segment  $TS$  que representa l'aresta llarga de la cúpula.** Els punts  $T$  i  $S$  són les projeccions dels punts mitjans  $F$  i  $G$  de dues arestes de l'icosaedre.<sup>3</sup> Per tant, equidisten del punt  $O$  i es troben sobre una circumferència que té aquest punt per centre. Llavors, si partiu del segment  $FB$ , podeu obtenir la construcció. Traceu:

- (1) La circumferència  $C_1(O, OF)$ .
- (2) La circumferència  $C_2(F, FB)$ .
- (3) El punt d'intersecció  $G$  de  $C_1$  i  $C_2$ . [Heu obtingut l'aresta  $FG$  de l'icosaedre.]
- (4) El punt d'intersecció  $S$  de la recta  $OG$  amb  $(O, OA)$ .
- (5) El segment  $TS$ . [Heu obtingut el segon tipus d'arestes de la cúpula.]

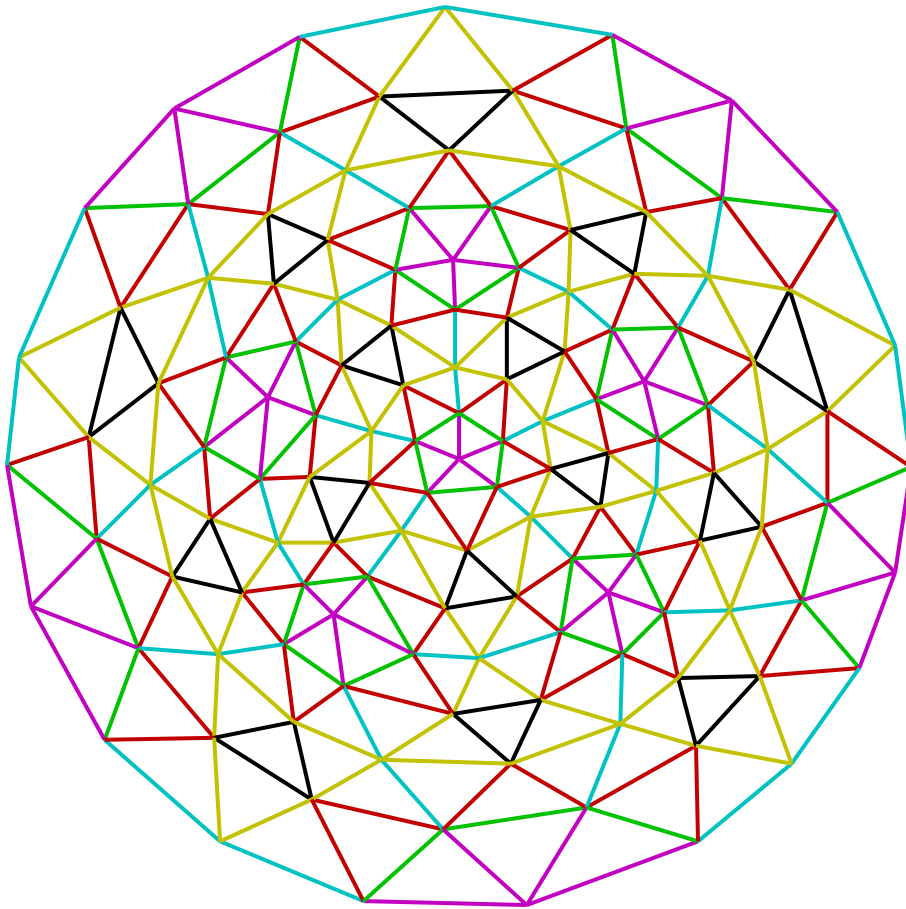


**2.4 Càlcul de la longitud de les arestes de la cúpula en funció del radi.**

- (1) Amb l'eina Distància del grup Eines de nombre i angle, trobeu les longituds dels segments  $AT$ ,  $TS$  i  $OA$ .
- (2) A la Línia d'entrada del peu de finestra del GeoGebra introduïu les divisions  $AT/OA$  i  $TS/OA$ , aquestes seran les longituds de les arestes en funció del radi.

<sup>3</sup>Vegeu la figura de l'activitat 3.3.

# Esquema pla de la cúpula icosaèdrica de freqüència 4 (75% de l'esfera)



Cada color correspon a una longitud diferent.  
Longitud de les arestes en funció del radi  $r$  de  
l'esfera circumscrita:

— 0,2408· $r$

— 0,2801· $r$

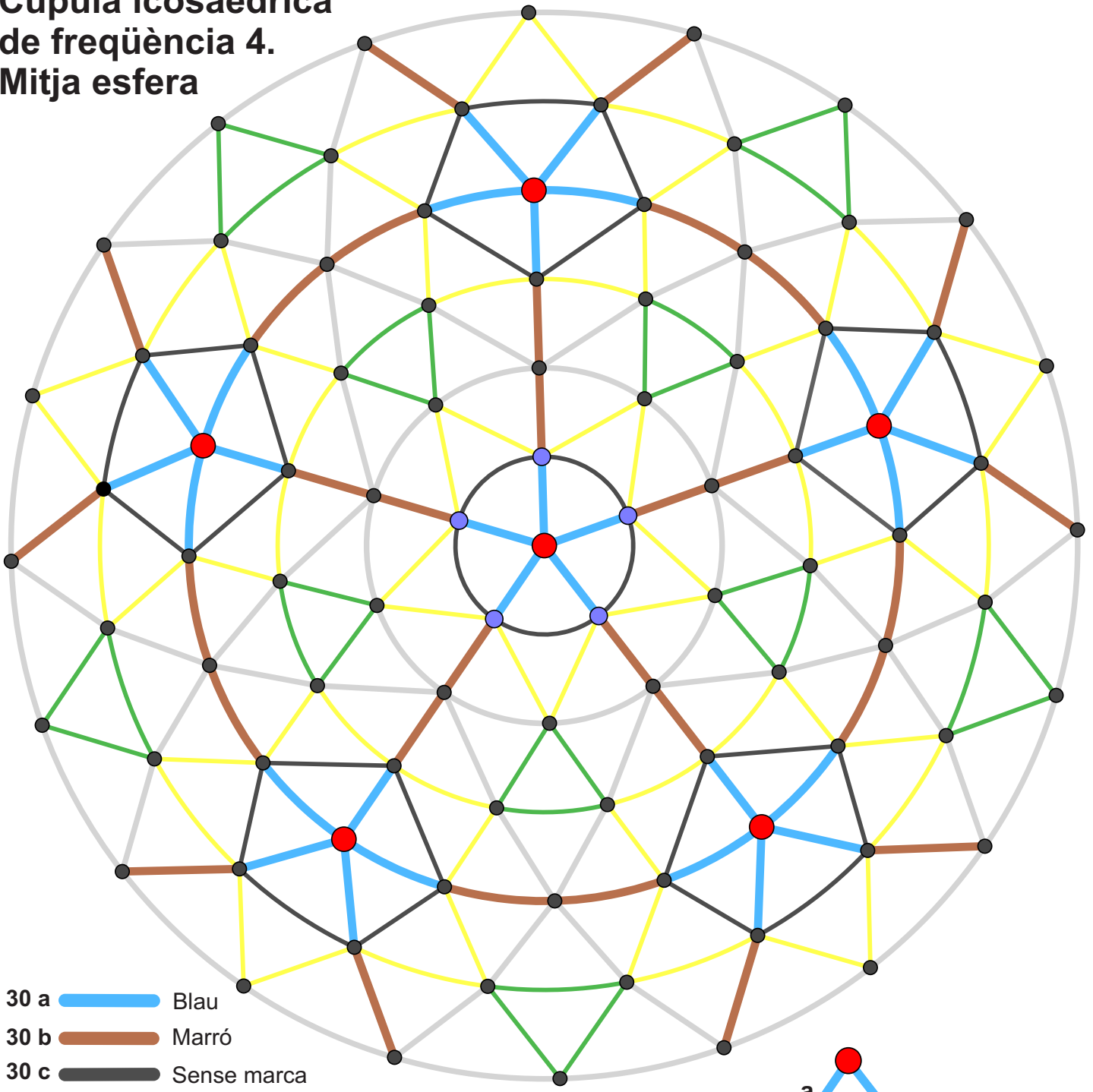
— 0,2808· $r$

— 0,2840· $r$

— 0,2976· $r$

— 0,3090· $r$

# Cúpula icosaèdrica de freqüència 4. Mitja esfera



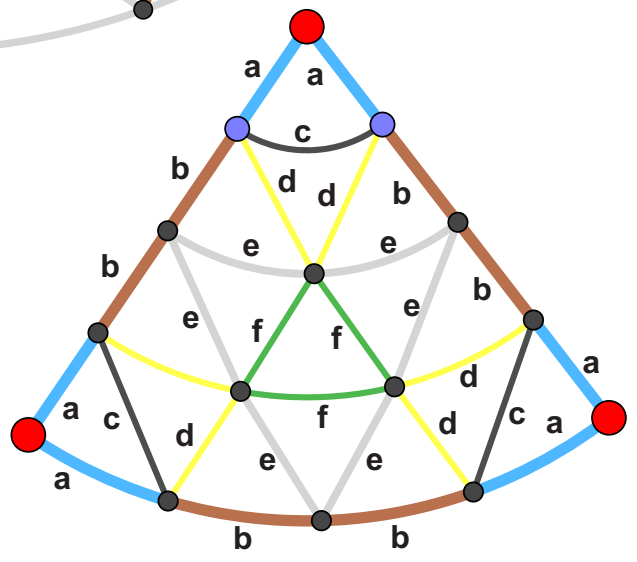
- 30 a — Blau
- 30 b — Marró
- 30 c — Sense marca
- 60 d — Blanc
- 70 e — Gris
- 30 f — Verd i ratlles

## Horizontals

- Pis 1:  $5 = 5 c$
- Pis 2:  $10 = 10 e$
- Pis 3:  $15 = 5 f + 10 d$
- Pis 4:  $20 = 10 a + 10 b$
- Pis 5:  $20 = 5 c + 5 f + 10 d$
- Pis 6:  $20 = 20 e$
- Total 90**

## Verticals

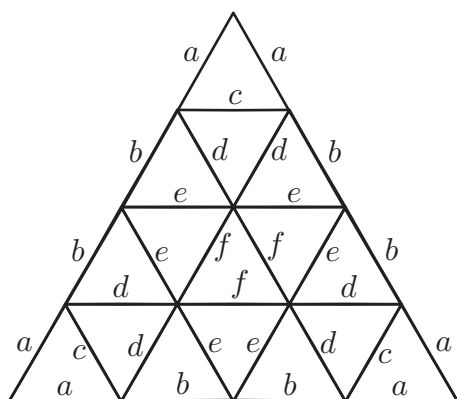
- Pis 1:  $5 = 5 a$
- Pis 2:  $15 = 5 b + 10 d$
- Pis 3:  $25 = 10 f + 10 e + 5 b$
- Pis 4:  $35 = 5 a + 10 c + 10 d + 10 e$
- Pis 5:  $40 = 10 a + 10 c + 10 d + 10 e$
- Pis 6:  $40 = 10 f + 10 e + 10 b + 10 d$
- Total 160**



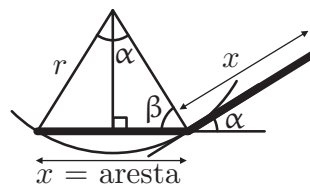


# Cúpula icosaèdrica de freqüència 4

Distribució de les seccions sobre tubs de 4.999 m



Cara de l'icosaedre triangulada i projectada



diàmetre = 6.448 m radi = 3.224 m $\alpha = \arcsin\left(\frac{x/2}{r}\right)$
--

$\alpha$ : angle de l'extrem de l'aresta

- Tipus d'arestes i mesures en metres**

Nombre	Tipus			$\alpha$
30	a	0.816	0.846	7.27°
30	b	0.963	0.993	8.59°
30	c	0.952	0.982	8.49°
60	d	0.950	0.980	8.47°
70	e	1.009	1.039	9.00°
30	f	1.048	1.078	9.35°

Els forats s'han de fer a 15mm de l'extrem.

El diàmetre dels cargols és de 4mm.

- Distribució dels talls a fer sobre els tubs de 2.020 m i 2.979 m**

tubs inicials	primers talls	segons talls*
50 → 2.020 m	$\left\{ \begin{array}{l} 40 \rightarrow d + e = 2.019 \\ 10 \rightarrow d + d = 1.960 \end{array} \right.$	$\rightarrow 40d + 40e$ $\rightarrow 20d$
50 → 2.979 m	$\left\{ \begin{array}{l} 30 \rightarrow a + e + f = 2.903 \\ 10 \rightarrow b + b + b = 2.889 \\ 10 \rightarrow c + c + c = 2.946 \end{array} \right.$	$\rightarrow 30a + 30e + 30f$ $\rightarrow 30b$ $\rightarrow 30c$

(\*) Per als segons talls cal consultar el quadre "tipus d'arestes i mesures en metres".