Polinomis

RAMON NOLLA
Departament de Matemàtiques
Ins Pons d'Icart

1 Introducció

Anomenem *polinomis de coeficients reals amb la indeterminada* x a les expressions del tipus:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ en què } a_k \in \mathbb{R} \text{ i } n \in \mathbb{N}.$$

No concretem ni aprofondim en el significat de la lletra o *indeterminada* x. En el nostre cas ens conformem a entendre-la com una variable numèrica sense determinar.
Si $a_n \neq 0$, anomenem el valor de n *grau* del polinomi. Els nombres a_k reben el nom de *coeficients* del polinomi, i l'expressió $a_k x^k$ s'anomena *terme de grau* k. Si tots els coeficients són igual a zero diem que el polinomi no té grau.
Dos polinomis són *iguals* quan tenen iguals els coeficients del mateix grau.
Els polinomis es poden *sumar*, sumant els coeficients dels termes de mateix grau.

Exemple 1 *Suma de* $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x - 10$ *i* $q(x) = 5x^3 + x^2 + 2x + 4$.

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3+0)x^4 + (-2+5)x^3 + (0+1)x^2 + (7+2)x + (-10+4) \\ &= 3x^4 + 3x^3 + x^2 + 9x - 6. \end{aligned}$$ □

Els polinomis es poden *multiplicar* considerant tots els productes possibles entre els termes del polinomi i agrupant-los pel seu grau:

Exemple 2 *Producte de* $p(x) = 5x^3 - 2x + 10$ *i* $q(x) = 2x^2 + 3x - 4$.

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= \big(5 \cdot 2\big)x^5 + \big(5 \cdot 3\big)x^4 + \big(5 \cdot (-4) + (-2) \cdot 2\big)x^3 + \big((-2) \cdot 3 + 10 \cdot 2\big)x^2 \\ &\quad + \big((-2) \cdot (-4) + 10 \cdot 3\big)x + \big(10 \cdot (-4)\big) \\ &= 10x^5 + 15x^4 - 24x^3 + 14x^2 + 38x - 40. \end{aligned}$$

Procediment alternatiu,

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 5x^3 & & -\ 2x & +\ 10 \\ & & 2x^2 & + & 3x & -\ 4 \\ \hline & & -\ 20x^3 & & +\ 8x & -\ 40 \\ & 15x^4 & & -\ 6x^2 & +\ 30x & \\ 10x^5 & & -\ 4x^3 & +\ 20x^2 & & \\ \hline 10x^5 & +\ 15x^4 & -\ 24x^3 & +\ 14x^2 & +\ 38x & -\ 40 \end{array}$$

□

Relacionat amb la multiplicació tenim el concepte de *factor*. Si tenim els polinomis $h(x)$, $p(x)$ i $q(x)$, tals que $h(x) = p(x) \cdot q(x)$, direm que $p(x)$ és un factor de $h(x)$, de la mateixa manera que ho és $q(x)$.

Exemple 3 $x + 1$ *i* $x - 4$ *són factors de* $x^2 - 3x - 4$ *perquè* $x^2 - 3x - 4 = (x + 1) \cdot (x - 4)$. □

2 Valors d'un polinomi. Regla de Ruffini

Donat un polinomi $p(x)$, el nombre real $p(a)$ rep el nom de *valor del polinomi quan* $x = a$.

Exemple 4 *El valor de* $p(x) = 3x^4 - 2x + 7$ *quan* $x = 2$ *és* $p(2) = 3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2 + 7 = 51.$ □

Es tracta de trobar mètodes alternatius per calcular valors d'un polinomi que redueixin el nombre d'operacions. Proposem de treballar en un cas concret, el del polinomi

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6.$$

Cercarem el valor d'aquest polinomi per al valor concret $x = 4$. Si tenim en compte que el polinomi $p(x)$ es pot presentar com

$$p(x) = \big((2x+3)x - 11)x - 6\big), \tag{1}$$

podem considerar dues maneres d'actuar:

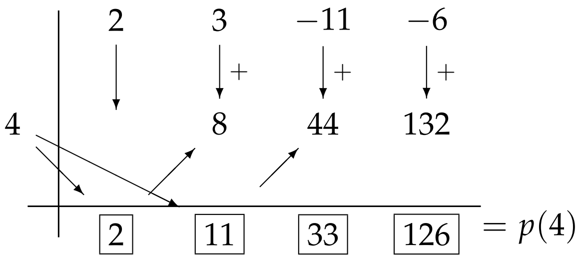
a) Càlcul directe sobre l'expressió inicial:

$$p(4) = 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 - 11 \cdot 4 - 6 = 128 + 48 - 44 - 6 = 123, \text{ (9 operacions).}$$

b) Càlcul sobre l'expressió (1):

$$p(4) = \Big(\Big(\boxed{2} \cdot 4 + 3\Big) \cdot 4 - 11\Big) \cdot 4 - 6 = \Big(\boxed{11} \cdot 4 - 11\Big) \cdot 4 - 6 = \boxed{33} \cdot 4 - 6 = \boxed{126},$$
(6 operacions).

En la segona opció els càlculs es disposen de la manera següent i en resulta l'algoritme conegut amb el nom de **regla de Ruffini**:[1]



	2	3	−115	−6	
4		8	44	132	
	2	11	33	126	$= p(4)$

[1]Es pot trobar en diversos escrits de l'italià Paolo Ruffini (1765-1822), tot i que la trobem inicialment en la matemàtica xinesa (s. XII).

Vegeu `http://rnollas.wordpress.com/2012/02/04/la-regla-de-ruffini-i-el-metode-tianyuan/`.

Recompte d'operacions per al grau n en què s'observa l'economia d'operacions de l'opció de Ruffini:

a) En el càlcul directe sobre l'expressió inicial de $p(x)$, el nombre màxim d'operacions és
$$n + n + \big(1 + 2 + \cdots (n-1)\big) = 2n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}.$$

b) Quan apliquem la regla de Ruffini el nombre màxim d'operacions és $n + n = 2n$.

c) El estalvi d'operacions és considerable i pot arribar a ser de $\dfrac{n^2+3n}{2} - 2n = \dfrac{n^2 - n}{2} = \dbinom{n}{2}$ operacions.

Per exemple, si el polinomi és de grau 10, es poden estalviat fins a $\dbinom{10}{2} = 45$ operacions.

3 Arrels d'un polinomi. Regla de Ruffini aplicada al seu càlcul i a la seva descomposició factorial

Donat un polinomi $p(x)$, el nombre $a \in \mathbb{R}$ tal que $p(a) = 0$ rep el nom d'*arrel del polinomi* $p(x)$. Evidentment, un polinomi pot tenir més d'una arrel o no tenir-ne cap.

Exemple 5 *El polinomi* $p(x) = 3x - 5$ *té una única arrel que és* $x = 5/3$.
El polinomi $p(x) = x^2 + x + 1$ *no té cap arrel real, perquè* $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$.
El polinomi $p(x) = x^3 - 4x^2 - 21x$ *té les arrels* $x = 0$, $x = 7$ *i* $x = -3$. □

A continuació cercarem les arrels del polinomi presentat a la secció anterior, $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$, és a dir buscarem les solucions de l'equació $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0$. Ho farem utilitzant la regla de Ruffini.
– Es tracta de trobar un nombre $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que l'últim coeficient que s'obté de l'aplicació de la regla sigui igual a 0. Primerament buscarem entre els nombres enters, els quals forçosament hauran de ser divisors del coeficient de grau 0 del polinomi. En el nostre cas, els candidats són els divisors enters de -6. Provem amb $x_0 = 2$,

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -11 & -6 \\ 2 & & 4 & 14 & 6 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & \boxed{0} = p(2) \end{array} \tag{2}$$

Hem trobat l'arrel $x = 2$. Si volem trobar una altra arrel, tindríem que provar amb altres divisors del coeficient -6, aplicant la regla de Ruffini sobre els coeficients del polinomi inicial. Però tenim un alternativa si observem que, en ser $p(2) = 0$, $x - 2$ és candidat a ser factor del polinomi inicial $p(x)$. Comprovem que realment és un factor, tenint en compte que en ser $p(x)$ de grau 3 l'altre factor haurà de ser de grau 2, (del tipus $ax^2 + bx + c$).

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = (x-2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} a &= 2 \\ b - 2a &= 3 \\ c - 2b &= -11 \\ -2c &= -6 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 7 \\ c &= 3. \end{aligned}$$

Així podem afirmar que $p(x) = (x-2)(2x^2 + 7x + 3)$ i, que per trobar una altra arrel, només cal resoldre $(x-2)(2x^2 + 7x + 3) = 0$, és a dir $2x^2 + 7x + 3 = 0$.
Ara bé, ens adonem d'un **fet clau**. Els coeficients d'aquesta última equació coincideixen amb els coeficients resultants de la primera aplicació de la regla de Ruffini. Això passa, (no ho demostrem), per a qualsevol polinomi inicial que haguèssim considerat. Llavors podem seguir amb l'aplicació de la regla sobre els coeficients resultants tantes vegades com calgui fins arribar a un polinomi que no tingui arrels o que sigui de grau 1. D'aquesta manera el procés complet seria

$$\left.\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -11 & -6 \\ 2 & & 4 & 14 & 6 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & 0 \\ -3 & & -6 & -3 & \\ \hline & 2 & 1 & 0 & \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} p(x) &= (x-2)(2x^2 + 7x + 3) \\ &= (x-2)(x+3)(2x+1) \\ &\text{Arrels: } x = 2,\ x = -3,\ x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'alta banda cal tenir present que, de vegades, no hi ha arrels enteres i cal trobar o aproximar arrels racionals o irracionals per altres mètodes. Fem notar també que podem escriure,

$$p(x) = 2(x-2)(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Observem que el resultat final és una descomposició factorial en polinomis de grau 1, un per a cada arrel. En alguns casos, en la descomposició, apareix algun polinomi de grau 2 que no admet descomposició i això passa perquè no té arrels. Els polinomis de grau 2 que no admeten arrels i els de grau 1 reben el nom d'*irreductibles* o *primers*.
El teorema que estableix l'existència de descomposició factorial en polinomis irreductibles rep el nom de *teorema fonamental de l'àlgebra* i una primera versió afirma el següent,[2]

> *Si un polinomi $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_x + a_0$ de grau n té n arrels reals, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, llavors*
>
> $$p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$
>
> *En el cas que el nombre d'arrels reals sigui $p < n$, $n-p$ serà parell i la descomposició tindrà p factors de grau 1 i $\frac{n-p}{2}$ factors irreductibles de grau 2.*

Exemple 6 *Descomposició factorial de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$.*
Apliquem la regla de Ruffini, per trobar el primer factor. Recordem que els candidats enters a ser arrels de $p(x)$ són els divisors del terme independent -12.

$$\left.\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -3 & 4 & -12 \\ 3 & & 3 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Una primera descomposició del polinomi és

$$p(x) = (x-3)(x^2+4).$$

Es compleix $p(x) = x^2 + 4 \geq 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ i llavors $p(x)$ no admet més descomposició.

□

Exemple 7 *Donat el polinomi $p(x) = 2x^6 - 4x^5 + 12x^4 - 20x^3 + 18x^2 - 16x + 8$, comproveu que la seva descomposició factorial és*

$$p(x) = 2(x-1)^2(x^2+4)(x^2+1)$$

□

[2] Aquest resultat és una de les possibles formulacions del *teorema fonamental de l'àlgebra*. La seva primera formulació va ser feta per Albert Girard (1629) i els primers intents de demostració es produïren en el s. XVIII, de la mà, entre d'altres, de d'Alembert (1746) i Euler (1749). La primera prova satisfactòria l'aconseguí Gauss (1799). Hi va haver intents de negar la veritat del teorema com el que va protagotnizar Leibniz l'any 1702 amb el polinomi $x^4 + a^4$ o Bernoulli (1742) amb el polinomi $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$. És bastant immediat trobar la descomposició, $\left(x^2 + \sqrt{2}ax + a^2\right)\left(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2\right)$, del primer polinomi completant quadrats. Per al segon polinomi la qüestió és més complexa. Euler va obtenir la factorització,

$$\left(x^2 - \left(2 + \sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x + 1 + \sqrt{7} + \sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)\left(x^2 - \left(2 - \sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x + 1 + \sqrt{7} - \sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)$$

4 Exercicis d'estudi de signes d'un polinomi

Una de les qüestions que haurem de resoldre sovint és la d'estudiar el signe d'un polinomi. És a dir per a quins nombres $x \in \mathbb{R}$ els valors $p(x)$ del polinomi són positius, negatius o nuls. L'estratègia que seguirem serà la de factoritzar el polinomi i estudiar el signe de cada factor mitjançant el seu gràfic que serà una recta o una paràbola.

PS1. Sigui el polinomi $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.
b) Resoleu la inequació $p(x) \geq 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.
c) Representeu un esquema gràfic de $p(x)$.

PS2. Sigui el polinomi $p(x) = x^5 + 3x^3 - 4x$.

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.
b) Resoleu la inequació $p(x) \leq 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.
c) Representeu un esquema gràfic de $p(x)$.

PS3. Considereu el polinomi $p(x) = x^4 + 5x^2 - 36$,

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.
b) Resoleu la inequació $p(x) \leq 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.
c) Representeu un esquema gràfic de $p(x)$.

PS4. Considereu el polinomi $\quad p(x) = x^4 - 23x^3 + 160x^2 - 300x$.
Trobeu les seves arrels, estudieu-ne el signe i feu-ne un esquema gràfic.

4.1 Resolució dels exercicis

PS1. a) Apliquem la regla de Ruffini, per trobar una arrel i els primers factors. Recordem que els candidats enters a ser arrels de $p(x)$ són els divisors del terme independent -6 d'aquest polinomi.

	1	2	-5	-6
-1		-1	-1	6
	1	1	-6	0

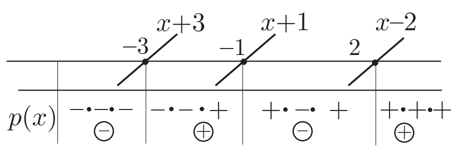
Una arrel del polinomi és $x = -1$ i una primera descomposició és
$$p(x) = (x+1)(x^2 + x - 6).$$

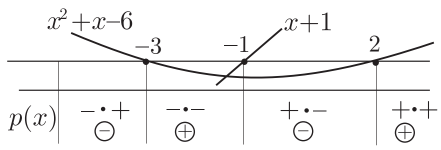
Cerquem les arrels del segon factor, la qual cosa permetrà donar la descomposició final:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array} \right\} \Longrightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

Consegüentment, $\boxed{\text{Arrels: } -3, -1, 2}$ i $\boxed{p(x) = (x+1)(x-2)(x+3)}$.

b) Presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi dels tres factors per separat i, alternativament, dels dos factors de la primera descomposició:





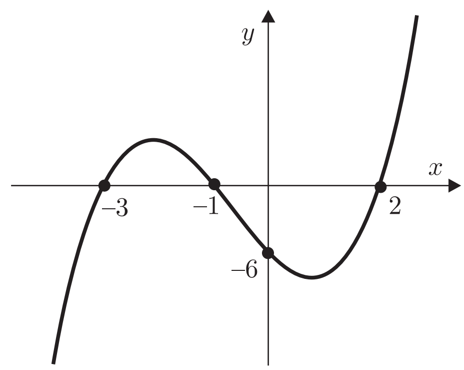
D'aquí en resulta $\qquad p(x) \geq 0 \Longleftrightarrow -3 \leq x \leq -1 \quad \text{o} \quad x \geq 2$, és a dir

$$\boxed{x \in [\,-3,-1\,] \cup [\,2,+\infty\,)}\,.$$

c) Les arrels del polinomi proporcionen els talls amb l'eix OX. En ser $p(0) = -6$, tenim el tall $(0,6)$ amb l'eix OY. Observem, també, els resultats de l'estudi del signe del polinomi que situaran el gràfic sobre o sota l'eix OX. A més, el comportament de $p(x)$ quan x pren valors arbitràriament grans en valor absolut és

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty.$$

De tot això en resulta l'esquema adjunt en què, de moment, no aprofondim en l'estudi dels màxims o mínims i de la concavitat.



PS2. a) Una primera descomposició és

$$p(x) = x(x^4 + 3x^2 - 4).$$

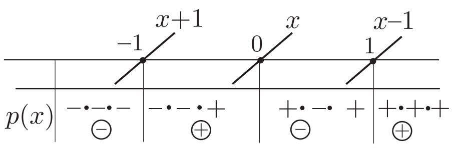
Cerquem les arrels del segon factor, resolent l'equació biquadrada que resulta:

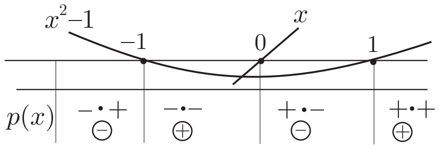
$$x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases} \Bigg\} \Longrightarrow p(x) = x(x^4+3x^2-4) = x(x^2-1)(x^2+4).$$

En ser $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \quad$ i $\quad x^2 + 4 > 0$, obtenim

$$\boxed{p(x) = x(x-1)(x+1)(x^2+4)} \quad \text{i} \quad \boxed{\text{Arrels: } 0, 1, -1}\,.$$

b) Sabem que $x^2 + 4 > 0$. Per tant, presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi dels altres factors per separat i, alternativament, dels altres dos factors de la primera descomposició:





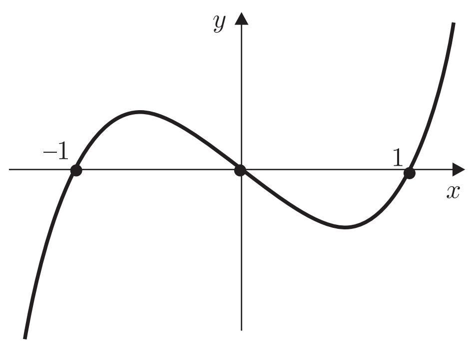
D'aquí en resulta $\qquad p(x) \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq -1 \quad \text{o} \quad 0 \leq x \leq 1$, és a dir

$$\boxed{x \in (\,-\infty,-1\,] \cup [\,0,1\,]}\,.$$

c) Les arrels del polinomi proporcionen els talls amb l'eix OX. En ser $p(0) = 0$, tenim el tall $(0,0)$ amb l'eix OY. Observem el signe i el comportament de $p(x)$ quan x pren valors arbitràriament grans en valor absolut és

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty.$$

De tot això en resulta l'esquema adjunt.



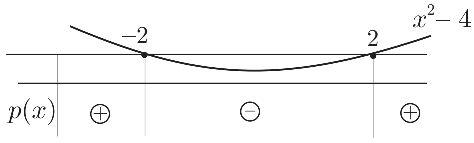
PS3. a) Cerquem les arrels de $p(x)$, resolent l'equació biquadrada $p(x) = 0$:

$$x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2} = \begin{matrix} \nearrow & 4 \\ \searrow & -9 \end{matrix} \Bigg\} \Longrightarrow p(x) = (x^2-4)(x^2+9).$$

En ser $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ i $x^2 + 9 > 0$, obtenim

$$\boxed{p(x) = (x-2)(x+2)(x^2+9)} \quad \text{i} \quad \boxed{\text{Arrels: } 2, -2}\,.$$

b) En ser $x^2 + 9 > 0$, només cal efectuar l'estudi de $x^2 - 4 \leq 0$:

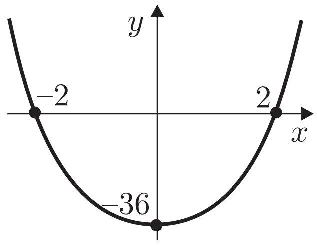


D'aquí en resulta $\quad p(x) \leq 0 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 2$, és a dir $\boxed{x \in [-2, 2]}$.

c) Els talls amb els eixos són $(2,0)$, $(-2,0)$ i $(0,-36)$. A partir de l'estudi del signe i que

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty,$$

en resulta l'esquema adjunt.



(Queda oberta la qüestió de si hi ha algun canvi de concavitat.)[3]

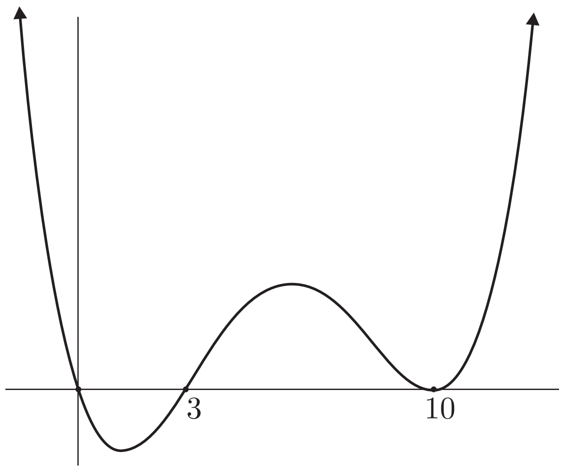
PS4. $p(x) = x^4 - 23x^3 + 160x^2 - 300x = x(x^3 - 23x^2 + 160x - 300)$. Per estudiar el signe trobem la descomposició factorial del segon factor amb l'ajut de la regla de Ruffini, la qual cosa també ens proporcionarà les arrels:

	1	-23	160	-300
10		10	-130	300
	1	-13	30	0
3		3	-30	
	1	-10	0	

$$p(x) = x(x-10)^2(x-3).$$

Consegüentment, les arrels de $p(x)$ són $\boxed{x = 0,\ x = 10,\ x = 3}$. No detallem l'estudi del signe que resulta ser

$$\boxed{\begin{array}{l} p(x) > 0 \Longleftrightarrow (-\infty, 0) \cup (3, 10) \cup (10, +\infty) \\ p(x) < 0 \Longleftrightarrow (0, 3)\,. \end{array}}$$



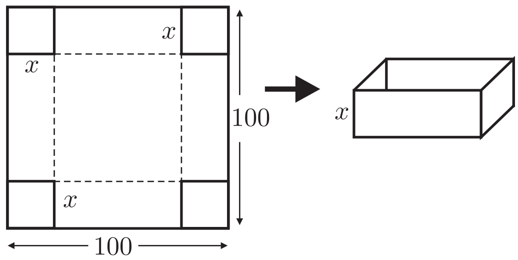
És immediat que quan x tendeix a $\pm\infty$, $p(x)$ tendeix a $+\infty$. De tota la informació recollida en resulta el gràfic adjunt.

[3]**Ampliació.** Es pot raonar l'existència de canvis de concavitat a partir de la imposició d'existència de solucions triples de l'equació $p(x) - mx - b = 0$. Més endavant, tots aquests aspectes s'estudiaran amb tècniques de *càlcul diferencial o de derivades*.

5 Introducció als problemes d'optimització

Introduirem els problemes d'optimització a partir d'un problema concret. Aquest serà el de construcció d'una caixa, —ortoedre—, de volum màxim a partir d'una cartolina quadrada. El tipus de tractament que farem serà totalment algèbric i estarà relacionat amb la recerca d'*arrels dobles* d'un polinomi. Aquestes són arrels que apareixen repetides i es manifesten en forma de dos factors de primer grau iguals.

> Disposem d'una cartolina quadrada de costat 100. Es tracta de construir un ortoedre sense tapa, retallant quadrats de costat x dels seus cantons i plegant per les línies de punts tal com indica la figura, de manera que aquest tingui el volum màxim.



El primer que farem serà trobar una expressió algèbrica per al volum de la caixa en funció de la variable x. Notem que els costats de la base de la caixa mesuren $10 - 2x$ i la seva alçada mesura x. Per tant, si representem amb la notació $V(x)$ el volum de la caixa, obtenim

$$V(x) = (100 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 400x^2 + 10000x\,, \text{ en què } 0 < x < 50.$$

A continuació, farem l'estudi en tres etapes,

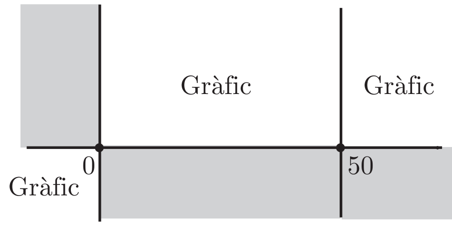
- E1. Cercarem una aproximació del valor màxim de la funció polinòmica que descriu el volum $V(x)$ en funció de x, mitjançant una taula de valors i un esquema gràfic d'aquesta funció.
- E2. Per trobar la solució exacta del problema, conjecturarem que el valor màxim ve determinat per un punt del gràfic de la funció $V(x)$ que toca tangencialment a una recta horitzontal. Això ho traduirem, en el llenguatge de l'àlgebra, com trobar l'arrel doble d'un polinomi que resultarà del sistema d'equacions que representa la recta horitzontal i la funció.
- E3. Finalment, provarem algèbricament que el valor trobat és màxim.

• **E1. Aproximació del valor màxim.** Abans de construir la taula de valors, cerquem les regions del pla que ocuparà el gràfic a partir de l'estudi del signe de $V(x)$.

$$\text{— } V(x) = 0 \iff (100 - 2x)^2 \cdot x = 0$$

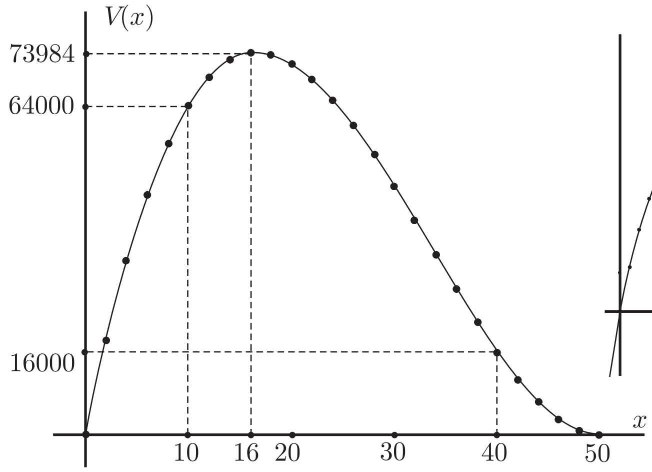
$$\iff \left\{ \begin{array}{c} (100-2x)^2 = 0 \\ \text{o} \\ x = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = 50 \\ \text{o} \\ x = 0 \end{array} \right.$$

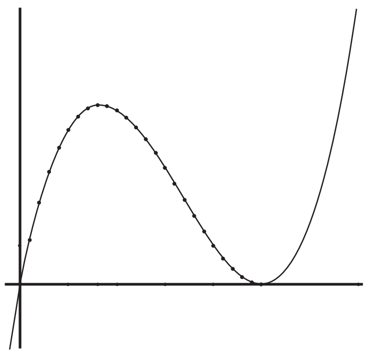
$$\left. \begin{array}{l} \text{— } V(x) > 0 \iff x > 0 \text{ i } x \neq 50 \\ \text{— } V(x) < 0 \iff x < 0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{l} \text{perquè} \\ (100-2x)^2 \geq 0 \end{array} \right)$$



Calculem els valors de $V(x)$ per als valors enters de la variable x. En resulta una primera taula i una primera aproximació del gràfic.

x	$V(x)$
0	0
2	18432
4	33856
6	46464
8	56448
10	64000
12	69312
14	**72576**
16	**73984**
18	**73728**
20	72000
22	68992
24	64896
26	59904
28	54208
30	48000
32	41472
34	34816
36	28224
38	21888
40	16000
42	10752
44	6336
46	2944
48	768
50	0





A la taula de l'esquerra i al gràfic superior, observem que el **valor màxim s'obté probablement quan x pertany a l'interval $(\mathbf{14}, \mathbf{18})$**.

Es podria comprovar que, si cerquem valors de $V(x)$ tals que x sigui exterior a l'interval $[0, 50]$, —els quals no són admissibles en el nostre problema—, i estudiem la tendència de $V(x)$ quan $x \to \pm\infty$ llavors, el gràfic té una forma com el de damunt a la dreta.

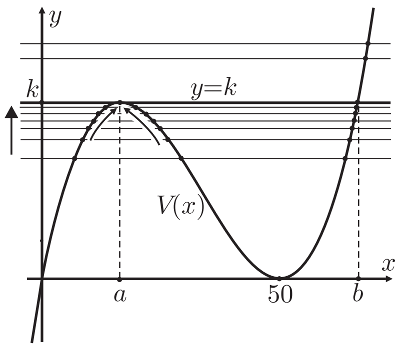
A la taula de la dreta hem "afinat" les aproximacions, i si el gràfic de $V(x)$ conserva el seu comportament regular, el **volum màxim s'obtindria per a algun x $\in$ $(\mathbf{16.4}\,,\ \mathbf{16.8})$**

x	$V(x)$
14	72576
14.4	72999.94
14.8	73351.17
15.2	73631.23
15.6	73841.66
16	73984
16.2	74030.11
16.4	**74059.78**
16.6	**74073.18**
16.8	**74070.53**
17	74052
17.2	7401.78
17.6	7390.31
18	73728

- **E2. Recerca algèbrica exacta del valor màxim.** En aquesta etapa utilitzarem una conjectura que relacionarà la tangència geomètrica amb una condició algèbrica sobre un polinomi. Això implicarà la necessitat de demostrar en una etapa posterior que el resultat trobat és correcte.

Per començar observem l'esquema gràfic que tenim de $V(x)$ i afegim-hi les rectes paral·leles $y = k$ a l'eix OX d'abscisses. Apareixen un, dos o tres punts d'intersecció.

Més concretament, si considerem el cas de la recta $y = k$ que toca el gràfic de $V(x)$ en el punt màxim que volem trobar, aquesta recta i el gràfic de $V(x)$ només tenen dos punts en comú. A més, entre aquests dos, el punt de contacte que es troba en el màxim té la característica de ser un punt de tangència entre els dos gràfics.



El fet clau es troba en pensar aquest punt com un "punt doble" generat pels dos punts de tall de la corba amb les rectes "inferiors", quan aquestes es desplacen paral·lelament en la direcció positiva de l'eix OY d'ordenades. Si ho traduïm al llenguatge de l'àlgebra, tenim que la resolució del sistema d'equacions determinat per aquesta recta i la funció polinòmica $V(x)$ tindrà dues solucions i la que ens interessa, —la del punt de tangència—, haurà de ser doble. En definitiva, hem d'imposar que hi hagi solució doble en el sistema

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x^3 - 400x^2 + 10000x \\ y = k \end{array}\right\}$$

És a cal imposar l'existència d'arrel doble per al polinomi

$$p(x) = 4x^3 - 400x^2 + 10000x - k. \tag{3}$$

	4	-400	10000	$-k$
a		$4a$	$4a^2 - 400a$	$4a^3 - 400a^2 + 10000a$
	4	$4a - 400$	$4a^2 - 400a + 10000$	$\boxed{4a^3 - 400a^2 + 10000a - k = 0}$
a		$4a$	$8a^2 - 400a$	
	4	$8a - 400$	$\boxed{12a^2 - 800a + 10000 = 0}$	

$$\begin{aligned}
12a^2 - 800a + 10000 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 3a^2 - 200a + 2500 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 7500}}{3} = \frac{100 \pm 50}{3} = \left\langle \begin{array}{l} 50 \\ \boxed{\dfrac{50}{3} \approx 16.667} \end{array}\right. \\
&\Longrightarrow \quad b = 100 - 2\frac{50}{3} = \frac{200}{3} \\
&\Longrightarrow \quad k = 4\left(\frac{50}{3}\right)^2 \cdot \frac{200}{3} = \boxed{\frac{2000000}{27} \approx 74074.074}.
\end{aligned}$$

Hem obtingut els valors exactes del volum màxim i del retall que hem de fer a la cartolina inicial.[4]

• **E3. Demostració algèbrica de la certesa del resultat obtingut.** De l'observació del gràfic aproximat que hem fet a l'inici es desprèn que el valor màxim de $V(x)$ en l'interval $(0, 50)$ s'assoleix en $x = \frac{50}{3}$. Ara bé, si no disposem d'aquest gràfic i volem estar segurs del resultat, el fet de fonamentar els nostres càlculs sobre conjectures obliga a demostrar la seva certesa. Per fer-ho, n'hi haurà prou amb demostrar que

$$V\left(\frac{50}{3}\right) > V(x), \text{ quan } 0 < x < 50, \text{ i si fem } x = \frac{50}{3} + h,$$

$$\boxed{V\left(\frac{50}{3}\right) > V\left(\frac{50}{3} + h\right), \text{ quan } 0 < \frac{50}{3} + h < 50} \tag{4}$$

[4] Fem notar que la solució $a = 50$ també correspon a un punt doble. No la tenim en compte perquè, com s'aprecia a l'esquema gràfic, és un punt que proporciona el volum mínim de valor 0, el qual correspon a un retall de la cartolina de longitud 50.

Passem al càlcul de les expressions implicades.[5]

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{50}{3}+h\right) &= 4\left(\frac{50}{3}+h\right)^3 - 400\left(\frac{50}{3}+h\right)^2 + 10000\left(\frac{50}{3}+h\right) \\
&= \underbrace{\left[4\left(\frac{50}{3}\right)^3 - 400\left(\frac{50}{3}\right)^2 + 10000\left(\frac{50}{3}\right)\right]}_{V(50/3)} + 4\left(\frac{50^2}{3}h + 50h^2 + h^3\right) - \\
&\quad -400\left(\frac{100}{3}h + h^2\right) + 10000h\,.
\end{aligned}
$$

Llavors, calculem

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{50}{3}+h\right) - V\left(\frac{50}{3}\right) &= \frac{10000}{3}h + 200h^2 + 4h^3 - \frac{40000}{3}h - 400h^2 + 10000h \\
&= 4h^3 - 200h^2 = 4h^2(h-50) < 0, \quad \forall h < 50.
\end{aligned}
$$

És a dir,

$$
V\left(\frac{50}{3}\right) > V\left(\frac{50}{3}+h\right), \quad \text{quan } \frac{50}{3}+h < \frac{50}{3}+50.
$$

Notem que la restricció obtinguda sobre h inclou els valors de h per als quals s'havia de fer la demostració de l'expressió (4).

- **Observacions finals.**

a) Si es considera el polinomi en tot el seu domini, el valor obtingut s'anomena *màxim local*, és dir *màxim relatiu al seu entorn*. Més concretament, en el nostre exemple, diríem que *el polinomi $V(x)$ presenta o té un màxim relatiu o local en $x = 50/3$ i el seu valor és $V(50/3)$*.

b) La mateixa nomenclatura s'utilitza per als mínims. Així diríem que *el polinomi $V(x)$ presenta o té un mínim relatiu o local en $x = 50$ i el seu valor és $V(50)$*.

c) Al màxim i al mínim locals se'ls anomena indistintament *extrems locals o relatius*.

d) De la lectura atenta de les equacions que resulten d'aplicar el mètode de l'arrel doble utilitzant la regla de Ruffini, en resulta una altra regla que podeu cercar i que proporciona una condició necessària que han de complir els extrems locals. Si la descobriu podreu estalviar-vos una mica de feina.

e) El tractament que s'ha fet es basa en un tractament descobert al Japó de l'època EDO (s. XVII-XIX). A la mateixa època a Europa, Fermat, Newton i Leibniz utilitzaren mètodes infinitessimals per introduir un càlcul anomenat *diferencial* o de *derivades*. Aquest últim arribava als mateixos resultats i era generalitzable a tipus més complexos de funcions que les polinòmiques i les racionals.

[5] S'han obviat algunes etapes del càlcul, per la qual cosa és convenient refer els càlculs amb més detall si no s'entenen. Una de les identitats que s'han utilitzat és la que proporciona el desenvolupament del cub d'un binomi,

$$
(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
$$

5.1 Tres problemes d'optimització

PO1. Considereu el polinomi $p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 52x + 51$.

a) Factoritzeu-lo i estudieu-ne el signe.

b) Trobeu els seus extrems locals o relatius.

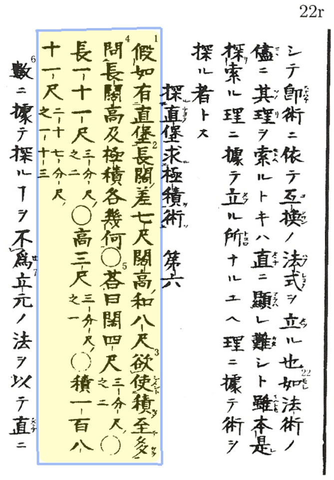
Solució: Màxim local en $x = 2$ i mínim local en $x = -\dfrac{13}{9}$.

PO2. Takebe Katahiro en el *Tetsujutsu sankei* (1722) planteja el problema següent del qual es proposa la seva resolució.

> Sigui un paral·lelepípede en què la diferència entre la llargada i l'amplada és de 7 *shaku* i la suma de l'amplada i l'alçada és de 8 *shaku*.[a] Es vol que el volum sigui el més gran possible. Es demana la llargada, l'amplada, l'altura i el volum màxim.

Solució: Amplada 4 i 2/3 *shaku*, llargada 11 i 2/3 *shaku*, alçada 3 i 1/3 *shaku*, volum 181 i 13/27 *shaku*.

[a] El *shaku* equival a 30.3 cm.



PO3. Es vol tancar un camp rectangular al costat d'un canal, posant tanca metàl·lica als tres costats que no donen al canal. Si la superfície a tancar és de 460 m^2, calculeu la longitud mínima que pot tenir la tanca.

Solució: $4\sqrt{230} \approx 60.66$ m.

6 Divisió entera de polinomis

Hem observat mètodes per obtenir la descomposició en factors d'un polinomi. Sabem des de l'aritmètica que els termes factor i divisor són de significat equivalent. Això ens porta a la qüestió de si podem parlar de divisors en el camp de polinomis, és a dir de si podem parlar de la *divisió de polinomis*. Si pensem en l'exemple de descomposició estudiat a l'exemple 6, podíem escriure

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = (x-3)(x^2+4).$$

Si a aquest polinomi li sumem un nombre, per exemple el 5, obtenim un altre polinomi

$$p_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 7 = (x-3)(x^2+4) + 5.$$

Això ens porta a imaginar l'esquema d'una divisió,

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 4x - 7 & \;\; x - 3 \\ \cline{2-2} \ddots \quad & \; x^2 + 4 \\ \ddots & \\ 5 & \end{array}$$

En general, donats els polinomis $p(x)$ i $d(x)$ es pot demostrar que existeixen dos polinomis $q(x)$ i $r(x)$ tals que:

$$\begin{array}{ll} 1) & p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \\ 2) & \text{O bé } \ r(x) = 0 \ \text{ o bé } \ \text{grau}(r(x)) < \text{grau}(d(x)) \end{array}$$

L'operació d'obtenir els dos polinomis $q(x)$ i $r(x)$ a partir dels polinomis inicials s'anomena *divisió entera* dels polinomis $p(x)$ i $d(x)$. Els polinomis $q(x)$ i $r(x)$ reben, respectivament, els noms de *quocient* i *residu* de la divisió.

Exemple 8 *Divisió entera de* $p(x) = x^4 - 8x^2 + x + 7$ *entre* $d(x) = x^2 - 2x$.
- *Càlcul mitjançant la definició:*

Observem que el grau del quocient ha de ser $4 - 2 = 2$ *i el del residu ha de ser menor que 2. A més, en el quocient el coeficient de grau 2 ha de ser* $\frac{1}{1} = 1$. *Llavors,*

$$x^4 - 8x^2 + x + 7 = (x^2 - 2x)(x^2 + bx + c) + (mx + s) = x^4 + (b-2)x^3 + (c-2b)x^2 + (m-2c)x + s.$$

Per tant, si igualem els coeficients dels termes de mateix grau, obtenim

$$\left.\begin{array}{l} b - 2 = 0 \\ c - 2b = -8 \\ m - 2c = 1 \\ s = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} b = 2 \\ c = -8 + 2b = -4 \\ m = 1 + 2c = -7 \\ s = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} q(x) = x^2 + 2x - 4 \\ r(x) = -7x + 7 \end{array}}.$$

- *Càlcul mitjançant l'algoritme clàssic:*

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l} x^4 & & - & 8x^2 & + & x & + & 7 & x^2 - 2x \\ \cline{9-9} -x^4 & + 2x^3 & & & & & & & x^2 + 2x - 4 \\ \cline{1-4} & 2x^3 & - & 8x^2 & & & & & \\ & -\ 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & \\ \cline{2-6} & & - & 4x^2 & + & x & & & \\ & & & 4x^2 & - & 8x & & & \\ \cline{3-8} & & & & - & 7x & + & 7 & \end{array}$$

□

6.1 La divisió i la regla de Ruffini

Hem vist que la regla de Ruffini simplificava el càlcul de valors d'un polinomi i que jugava un paper important en la factorització. És natural preguntar-nos quin paper juga en la divisió. Si observem l'algoritme clàssic de divisió notem que allò que importa quan dividim, són les diferents operacions a les quals sotmetem els coeficients. En el cas particular en què el divisor és del tipus $x - a$ podem aconseguir simplificar la manera de portar els càlculs per efectuar la divisió, mitjançant l'ús d'aquesta regla. Observem-ho amb un exemple.

Exemple 9 *Divisió entre* $p(x) = 2x^3 + x^2 - 15x - 10$ *entre* $d(x) = x - 3$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 + & x^2 - & 15x - & 10 & x - 3 \\
\cline{5-5}
-2x^3 + & \boxed{6}\,x^2 & & & 2x^2 + 7x + 6 \\
\cline{1-2}
 & 7x^2 - & 15x & & \\
 & -\;7x^2 + & \boxed{21}\,x & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x - & 10 & \\
 & & -\;6x + & \boxed{18} & \\
\cline{3-4}
 & & & \boxed{8} &
\end{array}
\iff
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & -15 & -10 \\
3 & & \boxed{6} & \boxed{21} & \boxed{18} \\
\hline
 & 2 & 7 & 6 & \boxed{8}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & -15 & -10 \\
 & & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + \\
3 & & 6 & 21 & 18 \\
\hline
 & 2 & 7 & 6 & 8
\end{array}
$$

Notem que el valor $p(3) = 8$ del polinomi $p(x)$ coincideix amb el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x - 3$. I el quocient s'obté dels coeficients de l'última fila obtinguda en l'aplicació de la regla.

$\square$

6.2 Teorema del residu

Aquest teorema estableix el que hem fet notar a l'exemple anterior. Concretament,

> *El residu r de la divisió del polinomi $p(x)$ entre el polinomi $x - a$ és igual al valor numèric $p(a)$ del polinomi $p(x)$ quan $x = a$.*

En el cas particular en què $a \in \mathbb{R}$ és una arrel del polinomi $p(x)$, llavors el residu és $r = p(a) = 0$ i, per tant, aconseguim una primera descomposició en factors del polinomi $p(x)$. Una justificació d'aquestes afirmacions seria,

$$
\begin{gathered}
p(x) = q(x) \cdot (x - a) + r \Longrightarrow p(a) = q(a) \cdot 0 + r \Longrightarrow \boxed{p(a) = r} \\
a \text{ arrel de } p(x) \Longrightarrow r = p(a) = 0 \Longrightarrow \boxed{p(x) = q(x) \cdot (x - a)}.
\end{gathered}
$$

D'aquesta manera per a cada arrel $a \in \mathbb{R}$ aconseguim un factor $x - a$ i, com hem enunciat en el teorema fonamental de l'àlgebra de polinomis, es pot demostrar que qualsevol polinomi de coeficients reals es pot descompondre en factors de grau 1 o 2.

Exemple 10 *El residu de la divisió entre $p(x) = x^4 + 2x^2 - 8x + 10$ i $x + 2$ és*

$$p(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^2 - 8(-2) + 10 = 16 + 8 + 16 + 10 = \boxed{50}.$$

O podem comprovar aplicant la regla de Ruffini o fent la divisió entera,

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & 2 & -8 & 10 \\
-2 & & -2 & 4 & -12 & 40 \\
\hline
 & 1 & -2 & 6 & -20 & \boxed{50}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & +\;2x^2 - & 8x + & 10 & x + 2 \\
\cline{6-6}
-x^4 - & 2x^3 & & & & x^3 - 2x^2 + 6x - 20 \\
\cline{1-3}
 & -\;2x^3 + & 2x^2 & & & \\
 & +\;2x^3 + & 4x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x^2 - & 8x & & \\
 & & -\;6x^2 - & 12x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -\;20x + & 10 & \\
 & & & 20x + & 40 & \\
\cline{4-5}
 & & & & \boxed{50} &
\end{array}
$$

També hem obtingut el quocient $x^3 - 2x^2 + 6x - 20$.

$\square$

6.3 Aplicació de la divisió a la resolució de dos problemes

PD1. Trobeu els nombres enters positius x tals que $\dfrac{x^2+25x}{x-7}$ és enter positiu. (Dificultat alta).

Si fem la divisió dels dos polinomis obtindrem una part entera i una part fraccionària. Veurem que en aquesta última és més fàcil esbrinar els valors enters.

$$\begin{array}{rr|l} x^2 + 25x & & x - 7 \\ \cline{3-3} -x^2 + 7x & & x + 32 \\ \cline{1-1} 32x & & \\ -32x + 224 & & \\ \cline{1-2} & 224 & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2+25x}{x-7} = \frac{(x-7)(x+32)+224}{x-7} = x+32+\frac{224}{x-7}.$$

A fi d'assolir el nostre propòsit, per tal que $x>0$, caldrà trobar els divisors de $224 = 2^5 \cdot 7$ majors que -7.

	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5
1	± 1	± 2	± 4	8	16	32
7	7	14	28	56	112	224

$\longleftarrow$ divisors de 224 majors que -7.

Llavors tots els valors de x s'obtenen d'igualar $x-7$ a cadascun dels divisors. Presentem tots aquests valors i els de $\dfrac{x^2+25x}{x-7}$ a la taula següent,

$x-7$	x	$\dfrac{x^2+25x}{x-7} = x+32+\dfrac{224}{x-7}$
1	8	$40 + 224 = 264$
2	9	$41 + 112 = 153$
4	11	$43 + 56 = 99$
7	14	$46 + 32 = 78$
8	15	$47 + 28 = 75$
14	21	$53 + 16 = 69$
16	23	$55 + 14 = 69$
28	35	$67 + 8 = 75$
32	39	$71 + 7 = 78$
56	63	$95 + 4 = 99$
112	119	$151 + 2 = 153$
224	231	$263 + 1 = 264$
	$\uparrow$ Solucions	

És immediat comprovar que per als valors -1, -2 i -4 de $x-7$, el valor de x és positiu però no ho és el valor de la fracció $\dfrac{x^2+25x}{x-7}$.

PD2. Trobeu els rectangles de costats enters tals que el valor numèric de la seva àrea és el triple del valor numèric del seu perímetre.

Siguin x i y els costats del rectangle. Llavors, xy és la seva àrea, $2x+2y$ és el seu perímetre i, per tant,

$$xy = 3(2x+2y) \iff xy = 6x+6y \iff xy-6y = 6x \iff y = \frac{6x}{x-6}.$$

Llavors

$$\begin{array}{r|l} 6x & x\ -\ 6 \\ \cline{2-2} -6x\ +\ 36 & 6 \\ \hline 36 & \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad y = 6+\frac{36}{x-6}$$

Per a que x i y siguin enters positius s'ha de complir que $x-6$ sigui divisor de $36 = 2^2\cdot 3^2$ i $\frac{6x}{x-6} > 0$. L'última condició es tradueix en $x-6>0$. Construïm els divisors de 36 mitjançant la taula adjunta i tenim,

$$\left.\begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 3^2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 18 \\ 2^2 & 4 & 12 & 36 \end{array}\right\} \Longrightarrow x-6 = 1,2,3,4,6,9,12,18,36.$$

Llavors, els valors que resulten per a x i y són

x	7	8	9	10	12	15	18	24	42
y	42	24	18	15	12	10	9	8	7.

Per tant, hi ha cinc rectangles amb les condicions del problema.

Costat x	Costat y	Àrea xy	Perímetre $2x+2y$
7	42	294	98
8	24	192	64
9	18	162	54
10	15	150	50
12	12	144	48