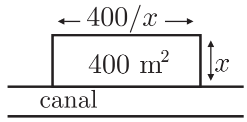
Tres problemes d'introducció a l'àlgebra de polinomis, les equacions i les funcions

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

Plantejarem tres problemes de tres camps diferents en què es mostrarà de quina manera es pot utilitzar el llenguatge de l'àlgebra per a la seva resolució. En aquests problemes es proposa, una qüestió d'optimització d'un recurs material, la construcció d'un disseny geomètric ornamental o arquitectònic i, finalment, una qüestió en el camp més abstracte de l'aritmètica dels nombres enters.

Problema 1 . Es vol tancar un petit ramat en un recinte rectangular limitat per un canal d'aigua en un dels seus costats i una tanca metàl·lica en els altres tres costats. Sabem que l'àrea del recinte ha de ser de 400 m^2. Es demana demana de calcular la longitud mínima que ha de tenir la tanca.

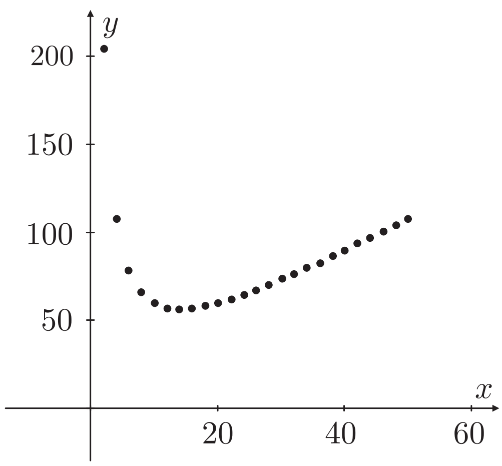
Anomenem x un dels dos trams iguals de la tanca. Llavors, en ser l'àrea del rectangle igual a 400 m^2, el costat desigual de la tanca mesurarà $400/x$. Conseqüentment el problema que se'ns presenta és el de,



$$\text{trobar el valor mínim del perímetre } P(x) = 2x + \frac{400}{x} = \frac{2x^2+400}{x}\,, \text{ on } x > 0.$$

- **Tractament numèric.** Una manera d'actuar consisteix en cercar una solució aproximada a partir d'una tabulació de valors que podem visualitzar gràficament. Per exemple,

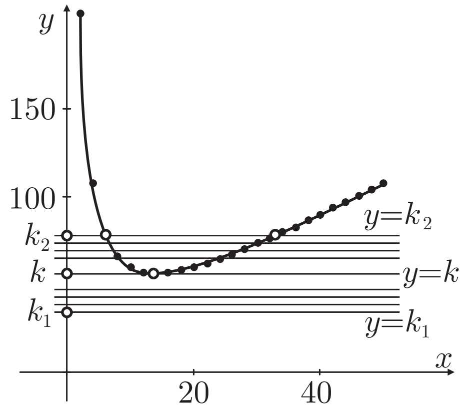
x	$P(x)$	x	$P(x)$
2	204.00	26	67.38
4	108.00	28	70.29
6	78.67	30	73.33
8	66.00	32	76.50
10	60.00	34	79.76
12	57.33	36	83.11
14	56.57	38	86.53
16	57.00	40	90.00
18	58.22	42	93.52
20	60.00	44	97.09
22	62.18	46	100.70
24	64.67	48	104.33



Observem que el perímetre mínim de la tanca es troba al voltants del valor 56 m, i esdevé quan els costats iguals de la tanca mesuren al voltant dels 14 m.

• **Tractament algèbric.** Es pot fer un tractament algèbric que proporcionarà la solució exacta a partir d'una conjectura establerta des dels valors obtinguts de la funció $P(x)$.

De l'observació del gràfic de punts anterior, "*conjecturem*" que el seu comportament, en tractar-se d'una funció algèbrica, serà prou regular com perquè el gràfic per a la totalitat dels seus punts tingui un aspecte continu i sense "sobresalts" tal i com representem a la dreta. Llavors, si considerem la família de rectes paral·leles a l'eix OX, les podem classificar en tres tipus:



- $y = k_1 \longleftrightarrow$ No tallen el gràfic de $P(x)$ en cap punt.
- $y = k \longleftrightarrow$ Toca el gràfic de $P(x)$ en un sol punt.
- $y = k_2 \longleftrightarrow$ Tallen el gràfic de $P(x)$ en dos punts.

Observem que el valor mínim del perímetre vindrà donat pel valor k de la recta $y = k$ que toca en un sol punt el gràfic. Aquesta és una condició que es pot traduir al llenguatge algèbric al nostre abast. **Es tracta d'imposar que el sistema d'equacions format per la funció i la recta tingui solució única.**

1) Càlcul de l'abscissa x dels talls dels dos gràfics.

$$\left.\begin{array}{r} P(x) = \dfrac{2x^2+400}{x} \\ y = k \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \frac{2x^2+400}{x} = k \Longrightarrow 2x^2 - kx + 400 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{k \pm \sqrt{k^2-3200}}{4}$$

2) Condició d'unicitat del punt de tall.

$$k^2 - 3200 = 0 \Longrightarrow k = \sqrt{3200} = \sqrt{2 \cdot 1600} = 40\sqrt{2} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{40\sqrt{2}}{4} = 10\sqrt{2}. \\ y = \dfrac{400}{x} = \dfrac{400}{10\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}\,. \end{array}\right.$$

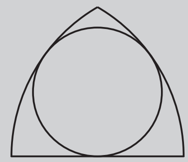
3) Solució del problema.

El perímetre de tanca mínim i els costats del rectangle són,

$$40\sqrt{2} \approx 56.5685 \text{ m}^2\,, \quad 10\sqrt{2} \approx 14.1421 \text{ m}\,, \quad 20\sqrt{2} \approx 28.2843 \text{ m}\,.$$

Problema 2 .

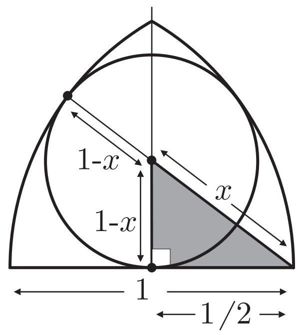
Donat un arc apuntat equilàter i el segment que uneix els seus punts d'arrencada, es tracta d'inscriure un cercle tangent a l'arc i al segment



Els centres dels dos arcs es troben sobre els extrems del segment. A partir de la condició de tangència entre dos cercles, que diu "*els cercles tangents tenen els seus centres i el punt de tangència en línia recta*", podem fer una anàlisi algèbrica que conduirà a una equació de primer grau, amb l'ajut del teorema de Pitàgores.

- **Anàlisi algèbrica i resolució de l'equació resultant.**

Anomenem x la distància entre l'extrem del segment de la base i el centre de la circumferència buscada. D'una observació atenta i per la propietat de la tangència es pot obtenir la informació de la figura adjunta en què hem triat el segment base com unitat de longitud. Llavors apliquem el teorema de Pitàgores sobre el triangle rectangle i obtenim,



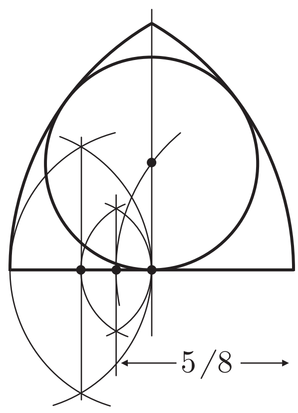
$$x^2 = (1-x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow x^2 = 1 - 2x + x^2 + \frac{1}{4} \Longrightarrow 2x = \frac{5}{4} \Longrightarrow x = \frac{5}{8}$$

- **Construcció.**

Ara només cal construir un segment d'aquesta longitud. Ho farem sobre el segment unitat de la base i després transportarem la distància fins tallar la mediatriu del segment base. El punt que quedarà determinat sobre la mediatriu serà el centre de la circumferència i el problema estarà resolt. Tenim en compte que

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

i, a partir d'aquí, amb el traçat de les mediatrius de la figura, obtenim el segment $x = \dfrac{5}{8}$ amb el qual construïm la circumferència.



Problema 3 . Trobeu els nombres enters positius x tals que $\dfrac{x^2+25x}{x-7}$ és enter positiu.

Si fem la divisió dels dos polinomis obtindrem una part entera i una part fraccionària. Veurem que en aquesta última és més fàcil esbrinar els valors enters.

$$\begin{array}{rr|l} x^2 + 25x & & x - 7 \\ \cline{3-3} -x^2 + 7x & & x + 32 \\ \cline{1-1} 32x & & \\ -32x + 224 & & \\ \cline{1-1} 224 & & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2+25x}{x-7} = x + 32 + \frac{224}{x-7}\,.$$

A fi d'assolir el nostre propòsit, per tal que $x > 0$, caldrà trobar els divisors de $224 = 2^5 \cdot 7$ majors que -7.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ \hline 1 & \pm1 & \pm2 & \pm4 & 8 & 16 & 32 \\ 7 & 7 & 14 & 28 & 56 & 112 & 224 \end{array} \quad \longleftarrow \quad \text{divisors de 224 majors que } -7.$$

Llavors tots els valors de x s'obtenen d'igualar $x - 7$ a cadascun dels divisors. Presentem tots aquests valors i els de $\dfrac{x^2+25x}{x-7}$ a la taula següent,

$x-7$	x	$\dfrac{x^2+25x}{x-7} = x+32+\dfrac{224}{x-7}$
1	8	$40 + 224 = 264$
2	9	$41 + 112 = 153$
4	11	$43 + 56 = 99$
7	14	$46 + 32 = 78$
8	15	$47 + 28 = 75$
14	21	$53 + 16 = 69$
16	23	$55 + 14 = 69$
28	35	$67 + 8 = 75$
32	39	$71 + 7 = 78$
56	63	$95 + 4 = 99$
112	119	$151 + 2 = 153$
224	231	$263 + 1 = 264$
	↑ Solucions	

És immediat comprovar que per als valors -1, -2 i -4 de $x - 7$, el valor de x és positiu però no ho és el valor de la fracció $\dfrac{x^2+25x}{x-7}$.