

1. El terme quart d'una progressió geomètrica il·limitada val 162, i el terme setè val 48. Calculeu la suma de tots els seus termes.

$$\left. \begin{array}{l} a_4 = 162 \\ a_7 = 48 \end{array} \right\} \Rightarrow a_7 = a_4 \cdot r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{a_7}{a_4} = \frac{48}{162} = \frac{8}{27} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{a_4/r^3}{1-r} = \frac{162 \cdot (3/2)^3}{1-\frac{2}{3}} = \frac{162 \cdot 27}{8 \cdot \frac{1}{3}} = \boxed{\frac{6561}{4}}.$$

2. Quants múltiples de set hi ha que tinguin tres xifres? Calculeu la suma dels seus valors numèrics.

Els múltiples de set configuren una progressió aritmètica de terme general  $a_n = 7n$ . L'enunciat diu que s'ha de complir

$$100 \leq 7n \leq 999.$$

Llavors,

$$\frac{100}{7} \leq n \leq \frac{999}{7} \iff 15 \leq n \leq 142.$$

Això vol dir que els múltiples de set de tres xifres venen representats per  $a_{15}, a_{16}, a_{17}, \dots, a_{142}$ . En total hi ha

$$(142 - 15) + 1 = \boxed{128 \text{ múltiples de } 7}.$$

La seva suma és

$$S = \frac{7 \cdot 15 + 7 \cdot 142}{2} \cdot 128 = \frac{7 \cdot 157 \cdot 128}{2} = \boxed{70336}.$$

3. Un capital està sotmès a un règim d'interès compost del 15% anual, amb liquidació d'interessos mensual.

a) Calculeu la T.A.E.

b) Quants mesos han de passar per tal que aquest capital es tripliqui?

$$a) \left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{12} - 1 = 0.16075 \Rightarrow \text{T.A.E.} = \boxed{16.08\%}.$$

b) Segons diu l'enunciat, si  $C_0$  és el capital inicial i  $t$  el nombre d'anys d'imposició, tenim

$$3C_0 = C_0 \left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{12t}.$$

Llavors,

$$\begin{aligned} 3 = \left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{12t} &\implies 12t = \frac{\log 3}{\log \left(1 + \frac{0.15}{12}\right)} \implies t = \frac{\log 3}{12 \log \left(1 + \frac{0.15}{12}\right)} \\ &\implies t \approx 7.36976 \text{ anys} \approx 7 \text{ anys i } 4.4 \text{ mesos} \end{aligned}$$

Consegüentment, han de passar 7 anys i 5 mesos = 89 mesos.

4. Tenim un capital  $C_0$  sotmès a un règim d'interès compost de taxa anual  $i$  (en tant per u), amb  $n$  liquidacions d'interessos a l'any, durant  $t$  anys.

- a) Escriviu les fórmules per al càlcul del capital  $C_t$  quan han passat  $t$  anys i la T.A.E.
- b) Utilitzeu-les per demostrar que  $C_0(1 + \text{T.A.E.})^t = C_t$ , en què la T.A.E. està expressada en tant per u.

a)  $C_t = C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$ ; T.A.E. =  $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$ .

b) Substituïm en el primer membre de la igualtat la T.A.E. pel seu valor i tenim

$$C_0(1 + \text{T.A.E.})^t = C_0 \left(1 + \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1\right)^t = C_0 \left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n\right]^t = C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} = C_t.$$

5. S'ha de tornar un préstec de 10000 euros en un termini d'un any. Es tenen dues ofertes:

**Oferta A:** Tornar-lo amb pagaments trimestrals al 10% d'interès compost anual.

**Oferta B:** Tornar-lo amb pagaments semestral al 9% d'interès compost anual.

- a) Calculeu amb quina de les dues ofertes es paguen menys interessos.
- b) Elaboreu el quadre d'amortització de les dues ofertes i esbrineu:
  - (1) Quin tant per cent de deute queda per tornar després de sis mesos, en cadascun dels dos casos?
  - (2) Quin total d'interessos s'han pagat després de sis mesos, en cadascun dels dos casos.

a) Calculem les anualitats respectives i allò que sobrepassi els 10000 euros, després de pagar-les totes, serà el total d'interessos pagats.

Oferta A:  $a = \frac{10000 \cdot \frac{0.10}{4}}{1 - \left(1 + \frac{0.10}{4}\right)^{-4}} = 2658.1788 \implies$

Interessos =  $2658.1788 \cdot 4 - 10000 = 10632.7152 - 10000 = 632.72$  euros.

Oferta B:  $a = \frac{10000 \cdot \frac{0.09}{2}}{1 - \left(1 + \frac{0.09}{2}\right)^{-2}} = 5339.9756 \implies$

Interessos =  $5339.9756 \cdot 2 - 10000 = 10679.9512 - 10000 = 679.95$  euros.

Amb l'oferta A es paguen 47.23 euros menys d'interessos.

b) Quadres d'amortització:

- Oferta A:

Final trimestre	Pagament trimestral	Quota d'interès	Quota d'amortització	Deute amortitzat	Deute pendent
					10000.00
1	2658.18	250.00	2408.18	2408.18	7591.82
2	2658.18	189.80	2468.38	4876.56	5123.44
3	2658.18	128.09	2530.09	7406.65	2593.35
4	2658.18	64.83	2593.35	10000.00	0

- Oferta B:

Final semestre	Pagament semestral	Quota d'interès	Quota d'amortització	Deute amortitzat	Deute pendent
					10000.00
1	5339.98	450.00	4889.98	4889.98	5110.02
2	5339.98	229.95	5110.03	10000.01	-0.01

b1) En la columna de deute pendent observem que després de 6 mesos queden per tornar els percentatges de deute següents:

$$\begin{aligned} \text{Oferta A: } \frac{\text{Deute pendent}}{\text{Deute inicial}} &= \frac{5123.44}{10000} = 0.512344 \Rightarrow \boxed{51.23\%}. \\ \text{Oferta B: } \frac{\text{Deute pendent}}{\text{Deute inicial}} &= \frac{5110.02}{10000} = 0.511002 \Rightarrow \boxed{51.10\%}. \end{aligned}$$

b2) Després de 6 mesos s'han pagat el total d'interessos que resulten de sumar les quantitats de la columna de quota d'interès fins els 6 mesos:

$$\begin{aligned} \text{Oferta A: } 250 + 189.80 &= \boxed{439.80 \text{ euros}}. \\ \text{Oferta B: } &\boxed{450 \text{ euros}}. \end{aligned}$$