Institut Pons d'Icart	05/05/15
MATEMÀTIQUES – 1R DE BAT	$30+30+20+(20+5+15+10)=130$ punts
Àlgebra i geometria	Màxima puntuació: A partir de 100 punts
	NOM:

Enunciat 1. Donat el polinomi $p(x)=3x^3-46x^2+160x$, trobeu les seves arrels, la seva descomposició en factors primers i estudieu-ne el signe amb l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles. Trobeu, també, per a quins valors x s'obtenen els valors màxim i mínim locals de la funció.

$p(x)=x(3x^2-46x+160)$

$3x^2-46x+160=0$

$x=\dfrac{23\pm\sqrt{529-480}}{3}=\begin{cases}10\\ \frac{16}{3}\end{cases}$

$\Rightarrow p(x)=3\left(x-\frac{16}{3}\right)(x-10)\cdot x$

$=(3x-16)(x-10)x$ ← Descomposició factorial

Arrels: $\begin{cases}x=\frac{16}{3}\\ x=0\\ x=10\end{cases}$

Signe:

	0	$\frac{16}{3}$	10	
$3x-16$	~~...~~ $-$	$-$	$+$	$+$
$x-10$	$-$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$p(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$p(x)>0 \iff x\in\left(0,\frac{16}{3}\right)\cup(10,+\infty)$

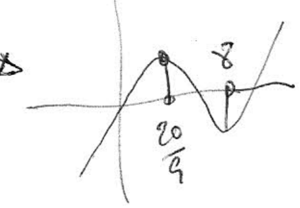
$p(x)<0 \iff x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{16}{3},10\right)$

Extrems locals: $p(a)=K$ i K extrem ~~local~~ $\Rightarrow$ ~~a~~ és arrel doble de $p(x)-K=0$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -46 & 160 & -K \\
a & & 3a & 3a^2-46a & p(a) \\
\hline
 & 3 & 3a-46 & 3a^2-46a+160 & \boxed{p(a)-K=0} \\
a & & 3a & 6a^2-46a & \\
\hline
 & 3 & 6a-46 & \boxed{9a^2-92a+160=0} &
\end{array}$$

Condicions d'arrel doble

$9a^2-92a+160=0 \Rightarrow a=\dfrac{46\pm\sqrt{2116-1440}}{9}=\dfrac{46\pm\sqrt{676}}{9}=\dfrac{46\pm 26}{9}=\begin{cases}8\\ \frac{20}{9}\end{cases}$



Màxim local en $x=\frac{20}{9}$

Mínim local en $x=8$

Enunciat 2. a) Resoleu l'equació $2\cos^2 x - 2\sin(4x) = 1$.

b) Calculeu $(1_{45^\circ})^0+(1_{45^\circ})^1+(1_{45^\circ})^2+\cdots+(1_{45^\circ})^{11}+(1_{45^\circ})^{12}$. (Resultat en forma binòmica)

a) $2\cos^2 x - 2\cdot 2\sin(2x)\cos(2x) = 1$

$2\,\frac{1+\cos(2x)}{2} - 4\sin(2x)\cos(2x) = 1$

$1+\cos(2x) - 4\sin(2x)\cos(2x) = 1$

$\cos(2x) - 4\sin(2x)\cos(2x) = 0$

$\cos(2x)(1-4\sin(2x)) = 0$

$\rightarrow$ $\cos(2x)=0$ o $\sin(2x)=\frac{1}{4}$

$\rightarrow$ $2x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi = 90^\circ + n\cdot 180^\circ$

o

$2x = 14^\circ 28' 39.04'' + n\cdot 360^\circ$

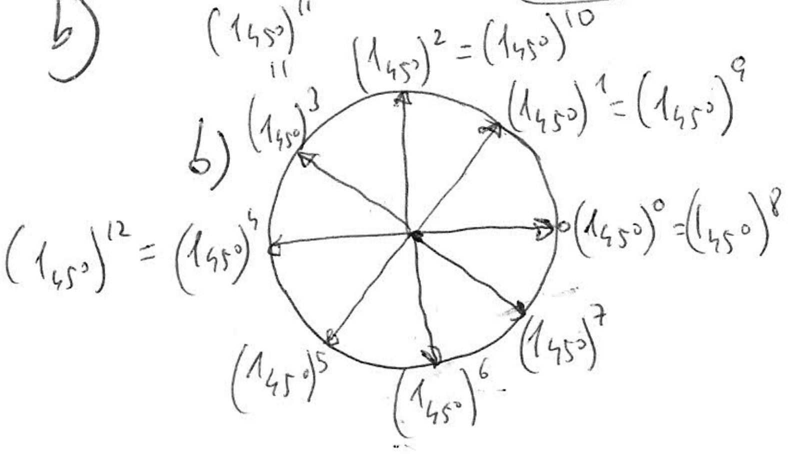
o

$2x = 165^\circ 31' 20.96'' + n\cdot 360^\circ$

Solucions:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 45^\circ + n\cdot 90^\circ \\ x &= 7^\circ 14' 19.52'' + n\cdot 180^\circ \\ x &= 82^\circ 45' 40.48'' + n\cdot 180^\circ \end{aligned}}$$

b)



$(1_{45^\circ})^0 + (1_{45^\circ})^1 + \cdots + (1_{45^\circ})^7 = \underline{\underline{0}}$

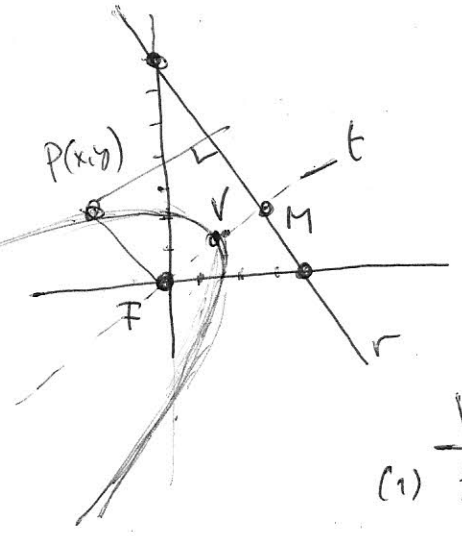
$\Rightarrow$ $(1_{45^\circ})^8 + (1_{45^\circ})^{12} = \underline{\underline{0}}$

$(1_{45^\circ})^9 + (1_{45^\circ})^{11} = 2\sin 45^\circ\cdot i = \underline{\underline{\sqrt{2}\cdot i}}$

$(1_{45^\circ})^{10} = \underline{\underline{i}}$

Conclusió: Suma $= 0 + 0 + \sqrt{2}\cdot i + i = \boxed{(1+\sqrt{2})\,i}$

Enunciat 3. Considereu la recta $r: 2x+y=7$ i el punt $F(0,0)$. Trobeu l'equació de la paràbola que els té com a focus i directriu. Calculeu les coordenades del seu vèrtex.



$d(P,F) = d(P,r)$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{|2x+y-7|}{\sqrt{2^2+1^2}} \iff x^2+y^2 = \frac{(2x+y-7)^2}{5}$$

$$5x^2+5y^2 = 4x^2+y^2+49+4xy-28x-14y$$

$$\boxed{x^2+4y^2-4xy+28x+14y-49=0}$$

Vèrtex: V

(1) Perpendicular "t" a "r" per F: $\left.\begin{array}{l} t: x-2y+K=0 \\ 0-0+K=0 \end{array}\right\} \Rightarrow K=0$

(El director de r és perpendicular a t)

Director de r $= (1,-2)$

(2) Per tant, $t: x-2y=0 \Rightarrow M = t \cap r \left\{\begin{array}{l} 2x+y=7 \\ x-2y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{14}{5} \\ y = \frac{7}{5} \end{array}$

(3) Vèrtex V = punt mitjà de M i F $= \left(\frac{\frac{14}{5}+0}{2}, \frac{\frac{7}{5}+0}{2}\right) = \boxed{\left(\frac{7}{5}, \frac{7}{10}\right)}$

Enunciat 4. Considereu els punts $A(0,0)$, $B(10,0)$ i $C(-8,12)$.

a) Totes les equacions de la recta que passa pels punts B i C.
b) L'equació general de la família de rectes perpendiculars a la de l'apartat (a).
c) L'equació, centre i radi de la circumferència que passa per A, B i C.
d) Les rectes tangents a la circumferència que són paral·leles a $y = \frac{12}{5}x$.

a)

Vectorial $\quad \overrightarrow{BC} = (-18,12)$ vector director $(3,-2)$

$$\boxed{(x,y) = (10,0) + \lambda(3,-2)}$$

Paramètriques

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 10+3\lambda \\ y = -2\lambda \end{array}\right.} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Contínua

$$\boxed{\frac{x-10}{3} = \frac{y}{-2}}$$

Punt-pendent

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}(x-10)}$$

Explícita

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}}$$

General

$$\boxed{2x+3y-20=0}$$

Canònica $\quad x=0 \Rightarrow y = \frac{20}{3}$

$y=0 \Rightarrow x=10$

$$\boxed{\frac{x}{10} + \frac{y}{20/3} = 1}$$

b) recta BC : $2x+3y-20=0$

Família de rectes perpendicular $\boxed{3x-2y+K=0}$

c) $A(0,0) \quad B(10,0) \quad C(-8,12)$

$\mathcal{C}: x^2+y^2+mx+ny+p=0$

$A\in\mathcal{C} \Leftrightarrow 0+0+0+0+p=0 \Leftrightarrow p=0$

$B\in\mathcal{C} \Leftrightarrow 100+0+10m+0+p=0$

$C\in\mathcal{C} \Leftrightarrow 64+144-8m+12n+p=0$

$\Leftrightarrow 100+10m=0 \Rightarrow m=-10$

$\Leftrightarrow 208+80+12n=0$

$n=\frac{-288}{12}=-24$

$$\boxed{x^2+y^2-10x-24y=0}$$

Centre $\left(\frac{-10}{-2},\frac{-24}{-2}\right)=(5,12)$

Radi $\sqrt{5^2+12^2-0}=13$

d)

Mètode llarg

$\begin{cases} y=\frac{12}{5}x \Leftrightarrow 12x-5y=0 \\ x^2+y^2-10x-24y=0 \end{cases}$

$12x-5y=0 \longrightarrow$ paral·lels: $12x-5y+K=0$

$y=\frac{12}{5}x+b$

$\boxed{\text{Tangent} \Rightarrow \text{solució doble del sistema}}$

no recomanable en aquest cas!

$\begin{cases} y=\frac{12}{5}x+b \\ x^2+y^2-10x-24y=0 \end{cases}$

$x^2+\frac{144}{25}x^2+b^2+\frac{24}{5}bx-10x-\frac{288}{5}x-24b=0$

$169x^2+(120b-250-1440)x+25b^2-600b=0$

$\underbrace{169}_{A}x^2+\underbrace{(120b-1465)}_{B}x+\underbrace{25b^2-600b}_{C}=0$

Imposem $B^2-4AC=0$ i obtenim dos valors de $b \rightarrow b_1$ i b_2 i les rectes seran $y=\frac{12}{5}x+b_1$

$y=\frac{12}{5}x+b_2$

$\boxed{\text{Alternativa}}$ (molt més curta)

radi $=d$(Centre, tangent)

tangent: $12x-5y+K=0$

$\Rightarrow 13=\frac{|12\cdot5-5\cdot12+K|}{\sqrt{12^2+5^2}} \Rightarrow 169=|K| \Rightarrow K=\pm169$

Rectes: $12x-5y+169=0$

$12x-5y-169=0$