Institut Pons d'Icart	26/01/15
MATEMÀTIQUES – 1R DE BAT	$10+10+10+10+10+10 = 60$ punts
Àlgebra i trigonometria	Màxima puntuació: A partir de 50 punts
	NOM:

Enunciat 1. Resoleu: $3x + \sqrt{27x-45} = 23$

$\sqrt{27x-45} = -3x+23$

$27x - 45 = 529 + 9x^2 - 138x$

$9x^2 - 165x + 574 = 0$

$x = \dfrac{165 \pm \sqrt{27225-20664}}{18} = \dfrac{165 \pm 81}{18}$

$x = \begin{cases} \dfrac{246}{18} = \dfrac{41}{3} \\ \dfrac{84}{18} = \dfrac{14}{3} \end{cases}$

Comprovació

$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{27 \cdot \frac{41}{3} - 45} = 18 \\ 23 - 3 \cdot \frac{41}{3} = -18 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{41}{3}$, no és solució

$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{27 \cdot \frac{14}{3} - 45} = 9 \\ 23 - 3 \cdot \frac{14}{3} = 9 \end{array} \right\}$ es compleix la igualtat!

Solució: $\boxed{x = \frac{14}{3}}$

Enunciat 2. Trobeu el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^3 + kx^2 + 4$ presenta un màxim o mínim local en $x = 3$.

S'ha de complir $p(3) = M$, en què M és ~~el~~ un valor màxim o mínim de $p(x)$

Per tant $x = 3$ és arrel doble de $p(x) = M$, és a dir de $p(x) - M = 0$

Imposem la condició:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & k & 0 & 4-M \\ 3 & & 3 & 3k+9 & 9k+27 \\ \hline & 1 & k+3 & 3k+9 & \boxed{9k+31-M=0} \\ 3 & & 3 & 3k+18 & \\ \hline & 1 & k+6 & \boxed{6k+27=0} & \end{array}$$

$\longrightarrow$ Solució: $k = -\dfrac{27}{6} = -\dfrac{9}{2} = -4.5$

El valor màxim o mínim és $p(3) = -\frac{81}{2} + 31 = \frac{-19}{2}$

Enunciat 3. Donat el polinomi $p(x) = x^3+6x^2+12x+8$, trobeu les seves arrels, la seva descomposició en factors primers i estudieu-ne el signe amb l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles.

$p(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Busquem les <u>arrels</u> amb la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ -2 & & -2 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow p(x) = (x+2)(x^2+4x+4) = (x+2)(x+2)^2 = (x+2)^3$

$p(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-2}$

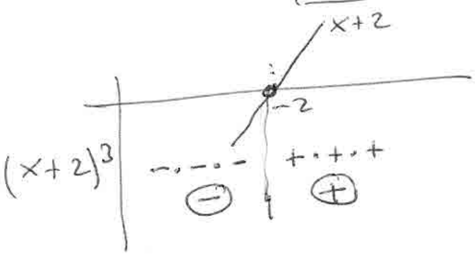
$\Updownarrow$

$p(x)=0$

Descomposició factorial:

$\boxed{p(x) = (x+2)^3}$

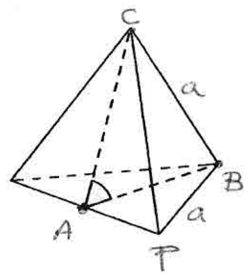
Signe



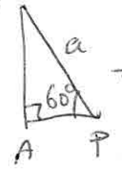
$\Rightarrow$ $p(x)>0 \Leftrightarrow x \in (-2,+\infty)$

$p(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2)$

Enunciat 4. Calculeu el valor de l'angle que formen dues cares qualssevol d'un tetraedre regular.



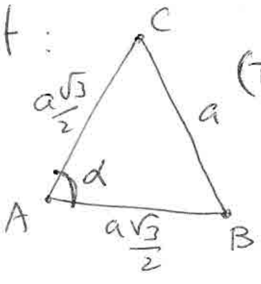
Alternativa 1



$\Rightarrow$ Si a = aresta del tetraedre

$CA = BA = a \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Per tant:



(Teor. cosinus)

$\Rightarrow a^2 = \frac{a^2 \cdot 3}{4} + \frac{a^2 \cdot 3}{4} - \frac{a^2 \cdot 3}{2} \cos\alpha$ $(:a^2)$

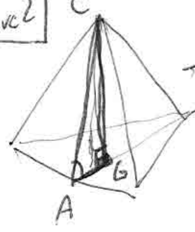
$\left(1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \cos\alpha$

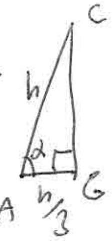
$\left(-\frac{2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \cos\alpha$

$\frac{1}{3} = \cos\alpha$

$\boxed{70°31'43'' = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha}$

Alternativa 2





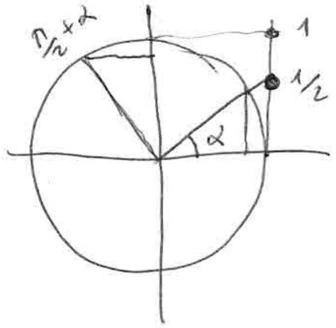
$\cos\alpha = \frac{h/3}{h} = \frac{1}{3}$

$\alpha = 70°31'43''$

(S'ha utilitzat la propietat que l'altura té el peu sobre el baricentre

Enunciat 5. Considereu l'angle α tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ i $\tan\alpha = 1/2$. Trobeu, sense calculadora i amb l'ajut de la circumferència trigonomètrica, $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Trobeu, també, aquest últim valor directament des de l'enunciat, amb calculadora.



- $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \dfrac{\sin(\pi/2+\alpha)}{\cos(\pi/2+\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\dfrac{1}{\tan\alpha} = -\dfrac{1}{1/2} = \boxed{-2}$

- $\tan\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26°33'54'' \Rightarrow$

  $\Rightarrow \frac{\pi}{2}+\alpha = 116°33'54'' \Rightarrow$

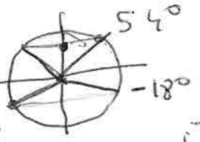
  $\Rightarrow \tan 116°33'54'' = \boxed{-2}$

Enunciat 6. Resoleu l'equació $2\sin(3x) + 2\cos(6x) = 1$. Després de presentar totes les solucions, trobeu les que compleixen $0° \le x < 360°$.

$$2\sin(3x) + 2\underbrace{\cos^2(3x)}_{(1-\sin^2(3x))} - 2\sin^2(3x) = 1$$

$$-4\sin^2(3x) + 2\sin(3x) + 1 = 0$$

$$\sin(3x) = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{-8} = \frac{1\mp\sqrt{5}}{4}$$



- $\sin(3x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow 3x = \begin{cases} 54° \\ 180°-54° = 126° \end{cases}$

  $\Downarrow$

  $3x = \begin{cases} 54° + n\cdot 360° \\ 126° + n\cdot 360° \end{cases}$

- $\sin(3x) = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \Rightarrow 3x = \begin{cases} -18° \text{ (o } 342°) \\ 180°+18° = 198° \end{cases}$

  $\Downarrow$

  $3x = \begin{cases} 342° + n\cdot 360° \\ 198° + n\cdot 360° \end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 18° + n\cdot 120° \\ x &= 42° + n\cdot 120° \\ x &= 66° + n\cdot 120° \\ x &= 114° + n\cdot 120° \end{aligned}}$$

$\Downarrow \quad 0° \le x < 360°$

$$\boxed{18°, 42°, 66°, 114°, 138°, 162°, 186°, 234°, 258°, 282°, 306°, 354°}$$