Institut Pons d'Icart MATEMÀTIQUES – 1R DE BAT A Àlgebra i geometria afí	02/03/15 10 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 110 punts Màxima puntuació: A partir de 90 punts
	NOM:

Enunciat 1. Resoleu: $x + 6\sqrt{1-x} - 10 = 0$

$6\sqrt{1-x} = 10 - x \Longrightarrow 36(1-x) = 100 + x^2 - 20x \Rightarrow x^2 + 16x + 64 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{1} = \boxed{-8}$

Comprovació:

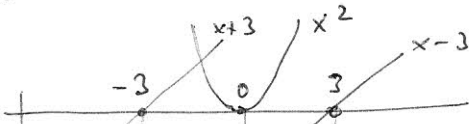
$-8 + 6\sqrt{1-(-8)} - 10 = -8 + 6\cdot 3 - 10 = -18 + 18 = 0$

Enunciat 2. Donat el polinomi $p(x) = x^4 - 9x^2$, trobeu les seves arrels, la seva descomposició en factors primers i estudieu-ne el signe amb l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles. Trobeu, també, el seu valor mínim.

$p(x) = x^4 - 9x^2 = x^2(x^2-9) = \boxed{x^2(x+3)(x-3)}$

$p(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ o $x+3=0$ o $x-3=0 \Rightarrow$ Arrels $\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 3 \end{cases}}$

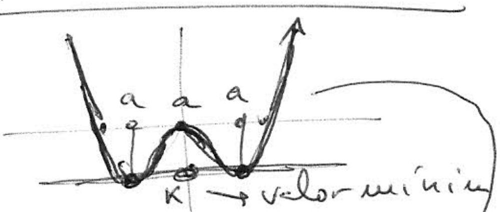
Signe:



x^2	+	+	+	+
$x+3$	−	+	+	+
$x-3$	−	−	−	+
$p(x)$	+	−	−	+

$p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$

$p(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3,3) - \{0\}$



Mínim

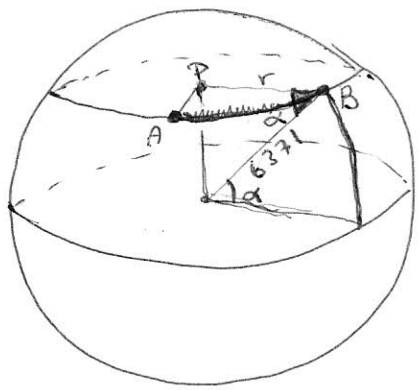
$x^4 - 9x^2 = K \Leftarrow$ "a" arrel doble de

	1	0	−9	0	−K
a		a	a^2	$-9a+a^3$	$-9a^2+a^4$
	1	a	$-9+a^2$	$-9a+a^3$	$\boxed{a^4-9a^2-K=0}$
a		a	$2a^2$	$3a^3-9a$	
	1	2a	$3a^2-9$	$\boxed{4a^3-18a=0}$	

$\to 2a(2a^2-9) = 0 \to a = 0,\ \boxed{a = \dfrac{3}{\sqrt2},\ a = -\dfrac{3}{\sqrt2}}$

$K = p(a) = \begin{cases} p\left(\frac{3}{\sqrt2}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt2}\right)^4 - 9\left(\frac{3}{\sqrt2}\right)^2 = \\ p\left(-\frac{3}{\sqrt2}\right) = \left(-\frac{3}{\sqrt2}\right)^4 - 9\left(-\frac{3}{\sqrt2}\right)^2 = \end{cases} \to \dfrac{81}{4} - \dfrac{81}{2} = -\dfrac{81}{4} = \boxed{-20,25}$

Enunciat 3. Dos punts de l'esfera terrestre tenen la mateixa latitud geogràfica. La longitud geogràfica d'un d'ells és de 5° 10′ 20″Oest i la de l'altre és de 32° 4′ 40″Est. Si sabem que la distància que els separa seguint el paral·lel és de 3025 km i el radi de la Terra mesura 6371 km, calculeu la seva latitud.



radi de la Terra = 6371 Km.

$d(A,B)_{\text{paral·lel}} = 3025$

$\boxed{\text{latitud} = \alpha\ ?}$

~~longitud~~ angle de l'arc $AB = 32^\circ 4' 40'' + 5^\circ 10' 20'' = 37^\circ 15' = \omega$

$r = d(P,B) = \dfrac{3025}{\omega_{rad}} = \dfrac{3025}{\frac{37^\circ 15' \cdot \pi}{180^\circ}} = \dfrac{3025 \cdot 180^\circ}{37^\circ 15' \cdot \pi} \simeq 4652.8787\,39\ \text{Km}$

$\cos\alpha = \dfrac{r}{6371\ \text{Km}} \simeq 0{,}7303215726 \Rightarrow \boxed{\alpha = 43^\circ 5' 11.91''}$

Enunciat 4. Resoleu l'equació $\tan x + \tan(2x) = 0$. Després de presentar totes les solucions, trobeu les que compleixen $0° \leq x < 360°$.

$\tan x + \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 0 \iff \tan x - \tan^3 x + 2\tan x = 0$ i $1 - \tan^2 x \neq 0 \iff 3\tan x - \tan^3 x = 0$ i $\tan x \neq \pm 1$

$\iff \tan x\,(3 - \tan^2 x) = 0$, $\tan^2 x \neq \pm 1 \iff \tan x = 0$ o $\tan x = \pm\sqrt{3} \iff \begin{cases} x = n_1 \pi \\ \text{o} \\ x = \pi/3 + n_2 \pi \\ \text{o} \\ x = 2\pi/3 + n_3 \pi \end{cases}$ $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$

$\iff \boxed{x = n\pi/3 = n \cdot 60^\circ}$

Els que compleixen $0° \leq x < 360°$ són: $\boxed{0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ}$

Enunciat 5. Resoleu les qüestions següents:

a) Trobeu els complexos $z \in \mathbb{C}$ tals que $z^3 = \dfrac{8+16i}{-2+i}$. Expresseu el resultat en forma binòmica exacta.

b) El nombre $z = (2+ai)^3$ té part real igual a zero. Trobeu el valor de $a \in \mathbb{R}$.

(a) $z = \sqrt[3]{\dfrac{8+16i}{-2+i}}$

$$\frac{8+16i}{-2+i} \cdot \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{(-16+16)+(-8-32)i}{(-2)^2 - i^2} = \frac{-40i}{5} = -8i$$

$$z = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270^\circ}} = \begin{cases} 2_{90^\circ} = 2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 2i \\ 2_{210^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i \\ 2_{330^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

(b) $z = (2+ai)^3 = 8 + 3 \cdot 2^2 \cdot ai + 3 \cdot 2 (ai)^2 + (ai)^3 = 8 + 12ai - 6a^2 - a^3 i = (8-6a^2) + (12a - a^3)i$

$Re(z) = 0 \iff 8 - 6a^2 = 0 \iff a^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \iff a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

Enunciat 6. Considereu els punts $A(3,0)$ i $B(0,-1)$

a) Trobeu totes les equacions de la recta que hi passa.

b) Representeu gràficament les rectes de la col·lecció $2x+my=5$ i escriviu l'equació de la recta d'aquesta col·lecció que és paral·lela a la de l'apartat anterior.

(a) vector director $= \vec{AB} =$ ~~[illegible]~~ $(-3,-1)$, també: $(3,1)$

Eq. vectorial: $(x,y) = (3,0) + \lambda(3,+1)$

Eq. paramètriques: $\begin{cases} x = 3+3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

Eq. contínua: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{1}$

Eq. punt-pendent: $y = \frac{1}{3}(x-3)$

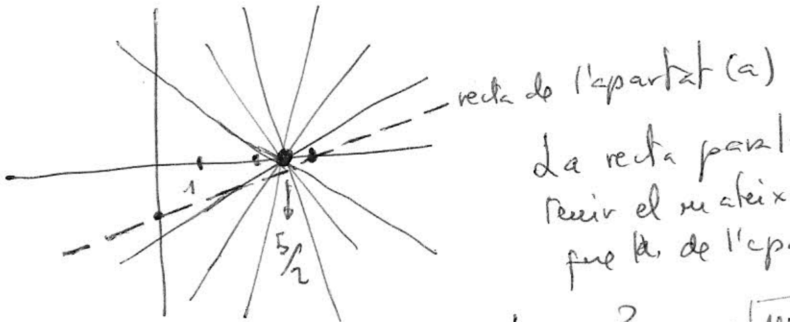
Eq. explícita: $y = \frac{1}{3}x - 1$

Eq. general o implícita: $\boxed{x-3y-3=0}$

Eq. canònica: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-1} = 1$

(b) $2x+my=5$, Com es compleix $y=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

Per tant, són les rectes de pendent $-\frac{2}{m}$ que passen per $(\frac{5}{2},0)$.
El pendent $-\frac{2}{m}$ pot assolir qualsevol valor real quan "m" varia. Per tant, tenim totes rectes que passen per $(\frac{5}{2},0)$ excepte la recta $x=\frac{5}{2}$



La recta paral·lela demanada ha de tenir el mateix pendent ~~[illegible]~~ (o vectors directors) que la de l'apartat (a). Per tant,

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{m} \iff \boxed{m=-6}$$

La recta serà: $\boxed{2x-6y-5=0}$, i és paral·lela perquè ~~[illegible]~~ $\dfrac{1}{2} = \dfrac{-3}{-6} \neq \dfrac{-3}{-5}$