Institut Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R DE BAT II
Nombres, equacions i polinomis

14/10/14
$15+20+30+25+20+15=125$

Enunciat 1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. En els resultats no han d'aparèixer ni exponents fraccionaris ni nombres decimals.

a) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b^5}}{\sqrt[4]{ab^2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-1}$ c) $\dfrac{4\sqrt{18}-\sqrt{8}}{4\sqrt{8}-\sqrt{72}}$

a) $\sqrt[12]{\dfrac{a^6 b^{20}}{a^3 b^6}} = \sqrt[12]{a^3 b^{14}} = \boxed{b\sqrt[12]{a^3 b^2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{6+3\sqrt{2}}{1} = \boxed{6+3\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{4\sqrt{18}-\sqrt{8}}{4\sqrt{8}-\sqrt{72}} = \dfrac{12\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{8\sqrt{2}-6\sqrt{2}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \boxed{5}$

Enunciat 2. Resoleu: a) $x^4-7x^2+10=0$ b) $x-\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{x+1}{2}$

a) $x^2=t \Rightarrow t^2-7t+10=0 \Rightarrow t=\dfrac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\dfrac{7\pm3}{2}=\begin{cases}5\\2\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2=t=5 \Rightarrow & x=\pm\sqrt{5} \\ x^2=t=2 \Rightarrow & x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$

b) $x-\dfrac{x+1}{2}=\sqrt{x+\dfrac{1}{4}} \overset{(\cdot 2)}{\Longleftrightarrow} 2x-x-1=\sqrt{4x+1} \Longleftrightarrow x-1=\sqrt{4x+1}$

$\Rightarrow (x-1)^2=4x+1 \Rightarrow x^2-2x+1=4x+1 \Rightarrow \underset{x(x-6)}{x^2-6x=0} \Rightarrow x=\begin{cases}0\\6\end{cases}$

$x=0 \Rightarrow \begin{cases} 0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \\ \sqrt{0+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\end{cases}$ $x=0$ no és solució

$x=6 \Rightarrow \begin{cases} 6-\frac{7}{2}=\frac{5}{2} \\ \sqrt{6+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}\end{cases}$ $\boxed{x=6}$

Enunciat 3. Considereu els polinomis $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$ i $d(x) = x + 2$.

a) Trobeu, amb dos mètodes diferents, el quocient i el residu de la divisió de $p(x)$ entre $d(x)$.

b) Trobeu la descomposició en factors primers de $p(x)$.

c) Estudieu el signe de $p(x)$ a partir dels gràfics de rectes i/o paràboles.

a) M1

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^4 - 2x^3 & x^3 - x^2 - x - 2 \\ \quad -x^3 - 3x^2 & \\ \quad +x^3 + 2x^2 & \\ \qquad -x^2 - 4x & \\ \qquad +x^2 + 2x & \\ \qquad\quad -2x - 4 & \\ \qquad\quad +2x + 4 & \\ \qquad\quad \boxed{0} & \end{array}$$

M2

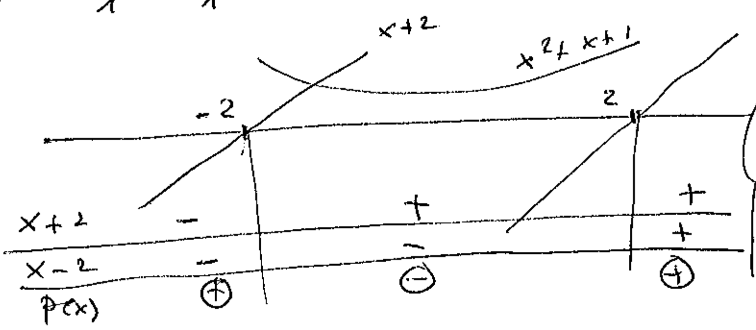
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -3 & -4 & -4 \\ -2 & & -2 & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Quocient: } x^3 - x^2 - x - 2 \\ \text{Residu: } 0 \end{array}}$$

b)

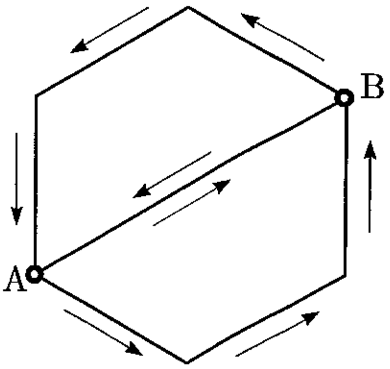
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -3 & -4 & -4 \\ -2 & & -2 & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array} \Rightarrow \boxed{p(x) = (x+2)(x-2)(x^2+x+1)}$$

c)



$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -2 \\ p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ p(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2) \end{array}}$$

Enunciat 4. En la figura adjunta observem un hexàgon regular de costat 1 i una diagonal. Dos mòbils surten al mateix temps i amb la mateixa velocitat constant des del vèrtex A. El primer dóna voltes seguint el perímetre i el segon fa trajectes d'anada i tornada sobre la diagonal. Trobeu raonadament,



a) La primera vegada que es troben en el vèrtex A després de sortir.

b) La primera vegada que es troben en el vèrtex B després de sortir.

a) M1 - Vèrtex A   M2 - Vèrtex A $p, q \in \mathbb{N}$

$6p$ $4q$

la diagonal mesura el doble del costat!

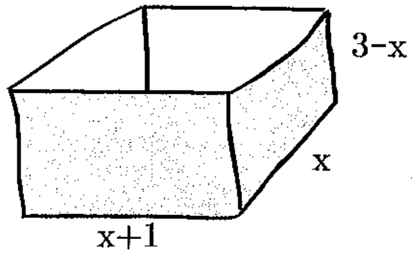
$6p = 4q \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ M_1 ha fet dues voltes senceres = 12 costats
M_2 ha fet 3 viatges d'anada i tornada = 12 costats

b) M_1 - Vèrtex B M_2 - vèrtex B $m, K \in \mathbb{N}$

$3 + 6 \cdot K$ $2 + 4m$

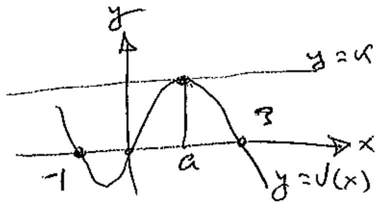
$3 + 6K = 2 + 4m \Rightarrow$ $1 = 4m - 6K \Rightarrow$ no existeix m, K perquè la diferència de dos parells no pot donar 1. No es troben mai a B.

Enunciat 5. Tenim la caixa en forma d'ortoedre de la figura adjunta en què l'aresta x és variable de manera que $0 < x < 3$. Trobeu quina de totes les caixes que es poden construir amb les arestes de la figura té volum màxim i calculeu aquest volum.



$$V(x) = (x+1)\,x\,(3-x) = -x^3+2x^2+3x$$

En el punt màxim la recta tangent $y=K$ i $y=V(x)$ han de tallar-se (tocar-se), en un punt tal que l'abscissa és solució doble de $V(x)=K$



$$\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 2 & 3 & K \\
a & & -a & 2a-a^2 & -3a+2a^2-a^3 \\
\hline
 & -1 & 2-a & 3+2a-a^2 & \boxed{K-3a+2a^2-a^3=0} \\
a & & -a & 2a-2a^2 & \\
\hline
 & -1 & 2-2a & \boxed{3+4a-3a^2=0} &
\end{array}$$

$$\longrightarrow a = \frac{-4\pm\sqrt{16+36}}{-6} = \frac{-4-2\sqrt{13}}{-6} = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$$

la negativa no és admissible

$a = \dfrac{2+\sqrt{13}}{3} \simeq \boxed{1,8685}$ Valor de l'aresta x per al volum màxim

$V(a) = \dfrac{70+26\sqrt{13}}{27} \simeq \boxed{6,0646}$ Volum màxim

Enunciat 6. Simplifiqueu: $\dfrac{2x^2}{x^2-1} - \dfrac{3}{x^3-1}$

$$\frac{2x^2}{(x+1)(x-1)} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2x^4+2x^3+2x^2-3x-3}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(2x^3+4x^2+6x+3)}{(x+1)\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}$$

No es pot simplificar per $x+1$ perquè el numerador no té l'arrel $x=-1$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & 2 & 2 & -3 & -3 \\
1 & & 2 & 4 & 6 & 3 \\
\hline
 & 2 & 4 & 6 & 3 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+4x^2+6x+3 & x^2+x+1 \\
\cline{2-2}
-2x^3-2x^2-2x & 2x+2 \\
\hline
\quad 2x^2+4x+3 & \\
\quad -2x^2-2x-2 & \\
\hline
\quad\quad \boxed{2x+1}\ \boxed{\neq 0} &
\end{array}$$

$\longrightarrow$ No es pot simplificar per x^2+x+1

Solució: $\boxed{\dfrac{2x^3+4x^2+6x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}}$