Institut Pons d'Icart
Matemàtiques – 1r de BAT
Nombres, àlgebra i trigonometria
30/01/17

NOM: ____________________

$(5+5+10)+20+10+30+10+10+20+20=140$
(S'avaluarà sobre 90 punts)

Enunciat 1. Simplifiqueu sense l'ús de nombres decimals. (Cal presentar les diferents etapes del càlcul).

a) $\dfrac{\sqrt{8x}\cdot\sqrt[3]{8y}}{\sqrt{2xy}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$ c) $\dfrac{2x^2+10x+12}{x^3+7x^2+16x+12}$

a) $\dfrac{\sqrt{8x}\,\sqrt[3]{8y}}{\sqrt{2xy}} = \sqrt[6]{\dfrac{8^3x^3\,8^2y^2}{2^3x^3y^3}} = \sqrt[6]{8^4/y} = \sqrt[6]{\dfrac{2^{12}}{y}} = \dfrac{4}{\sqrt[6]{y}}\cdot\dfrac{\sqrt[6]{y^5}}{\sqrt[6]{y^5}} = \boxed{\dfrac{4\sqrt[6]{y^5}}{y}}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6} = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} - 2\sqrt{6} = 3+2+2\sqrt{6}-2\sqrt{6} = \boxed{5}$

c) $2x^2+10x+12=0 \Rightarrow x = \dfrac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{-5\pm1}{2} = \begin{cases}-2\\-3\end{cases}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 16 & 12 \\ -2 & & -2 & -10 & -12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

o $x = \dfrac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{-5\pm1}{2} = \begin{cases}-2\\-3\end{cases}$

$\dfrac{2x^2+10x+12}{x^3+7x^2+16x+12} = \dfrac{2(x^2+5x+6)}{(x+2)(x^2+5x+6)} = \boxed{\dfrac{2}{x+2}}$

Enunciat 2. Sigui $p(x)=x^3-x^2$. Trobeu x tal $p(x)$ és màxim, (amb el mètode de l'arrel doble), i feu un esquema gràfic raonat de la funció $p(x)$.

Hem de trobar x tal que $p(x)=K$ sigui màxim. Això implica que $p(x)=K$ ha de tenir ~~una~~ arrel doble x_0 en el màxim.

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & -1 & 0 & -K \quad \leftarrow p(x)=K \\ x_0 & & x_0 & x_0^2-x & x_0^3-x_0^2 \\ \hline & 1 & x_0-1 & x_0^2-x & \boxed{x_0^3-x_0^2-K=0} \\ x_0 & & x_0 & 2x_0^2-x_0 & \\ \hline & 1 & 2x_0-1 & \boxed{3x_0^2-2x_0=0} & \end{array}$$

$\longrightarrow x_0(3x_0-2)=0 \Rightarrow x_0=0$ o $x_0=\dfrac{2}{3}$

L'esquema de la funció és del tipus $\rightarrow$  perquè és de 3r grau i

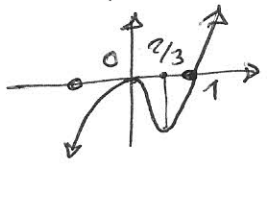
$\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$.

Per tant el màxim local és el menor dels x_0 trobats. És a dir el màxim es troba en $x_0=0$ i el seu valor és $p(0)=0$.

Un esquema més aproximat és:

Talls eixos: $(0,0)$, $(1,0)$,

$\left.\begin{array}{l}p(x)=0\\ p(0)\end{array}\right\}\rightarrow$



Enunciat 3. Calculeu el valor de la suma

$$\sum_{k=0}^{200}\binom{200}{k}=\binom{200}{0}+\binom{200}{1}+\binom{200}{2}+\cdots\binom{200}{200}.$$

Quantes xifres té i quina és la seva última xifra?

Per la fórmula del binomi aquesta suma coincideix amb $(a+b)^n$, on $a=b=1$ i $n=200$

$$\sum_{k=0}^{200}\binom{200}{k}=(1+1)^{200}=2^{200}\simeq 1{,}6069\cdot 10^{60} \Rightarrow \boxed{\text{Té 61 xifres}}$$

$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$

Última xifra: $\underbrace{2, 4, 8, 6}, \underbrace{2, 4, 8, 6}$ — — —

Exponent $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ — — — — 200

$200 \,|\, 4$, quocient 50, residu 0 $\Rightarrow$ 50 grups de $2, 4, 8, 6 \Rightarrow$ $\boxed{\text{6 és l'última xifra}}$

Enunciat 4. Resoleu:

a) $x+\sqrt{x-1}=2x-7$ b) $8^x-3\cdot 4^x-4\cdot 2^x+12=0$ c) $\log(x^4-1)-\log(x^2+7)=\log 5$

a) $(\sqrt{x-1})^2=(x-7)^2$

$x-1=x^2-14x+49$

$0=x^2-15x+50$

$\rightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{225-200}}{2}=\frac{15\pm 5}{2}=$ 10 / 5

Comprovació: $\left\{\begin{array}{l}10+\sqrt{9}=13\\ 2\cdot 10-7=13\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=10 \text{ és bona}}$

$\left\{\begin{array}{l}5+\sqrt{4}=7\\ 2\cdot 5-7=3\end{array}\right\} \Rightarrow$ $x=5$ no és solució

b) $(2^3)^x-3(2^2)^x-4\cdot 2^x+12=0$

$(2^x)^3-3(2^x)^2-4\cdot 2^x+12=0$

$\xrightarrow{\text{Fem } 2^x=z} z^3-3z^2-4z+12=0$

Cerquem arrels amb la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -4 & 12\\ 2 & & 2 & -2 & -12\\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0\end{array}$$

$z^2-z-6=0 \Rightarrow z=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=$ 3 / -2

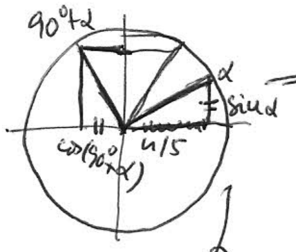
Arrels: $2^x=z=2 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$2^x=z=3 \Rightarrow x\log 2=\log 3 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\log 3}{\log 2}\simeq 1{,}58496}$

c) $\log\frac{(x^4-1)}{(x^2+7)}=\log 5 \Rightarrow x^4-1=5x^2+35 \Rightarrow x^4-5x^2-36=0$

$\Rightarrow x^2=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{5\pm 13}{2}=$ 9 / -4 $\Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \boxed{x=3 \text{ o } x=-3}$

Enunciat 5. Si $0° < \alpha < 90°$ i $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, calculeu $\cos(90° + \alpha)$, raonant sobre la circumferència trigonomètrica sense calculadora. Comproveu el vostre resultat amb l'ús exclusiu de la calculadora.



$$\cos(90°+\alpha) = -\sin\alpha = -\left(+\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right) = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \boxed{-\frac{3}{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = 36°52'11.63''$$

$$\cos(90°+\alpha) = \cos 126°52'11.63'' = -\frac{3}{5}$$

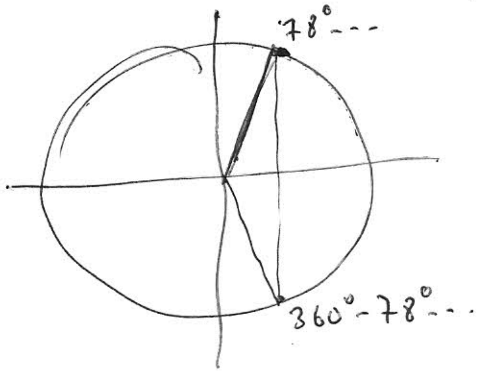
Enunciat 6. Trobeu els angles $x \in [0°, 360°)$ tals que $3\cos x - \cos(2x) = \dfrac{3}{2}$.

$$3\cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2} \iff 3\cos x - (\cos^2 x - (1-\cos^2 x)) = \frac{3}{2}$$

$$\iff 3\cos x - 2\cos^2 x + 1 = \frac{3}{2} \iff 4\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{4} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \quad \left(\text{perquè } \frac{3+\sqrt{5}}{4} > 1\right)$$

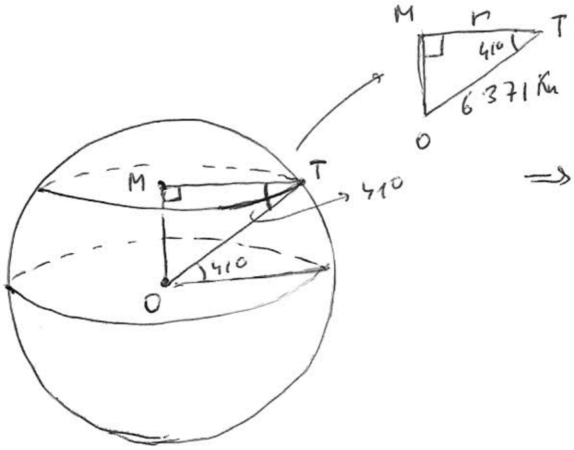
$$x = \arccos\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) = \boxed{78°59'23.44''} \leftarrow \text{calculadora}$$



$$x = 360° - 78°59'23.44'' = \boxed{281°0'36.56''}$$

↑ circumferència trigonomètrica

Enunciat 7. Si partim de la hipòtesi que la Terra és una esfera de radi 6371 km i que Tarragona té latitud 41° Nord, trobeu la longitud del paral·lel que passa per Tarragona.

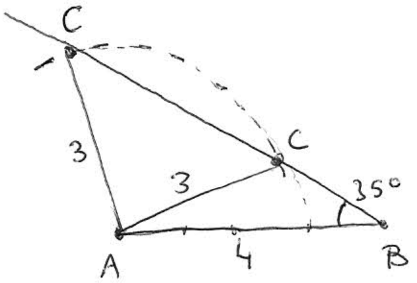


$\Rightarrow \cos 41° = \dfrac{r}{6371} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ longitud del paral·lel $= 2\pi r = 2\pi \cdot 6371 \cdot \cos 41° =$

$\simeq \boxed{30\,211{,}156\text{ Km}}$

Enunciat 8. En un triangle $\triangle ABC$, $AB = 4$, $AC = 3$ i $\widehat{ABC} = 35°$. Calculeu la longitud de BC.



$3^2 = BC^2 + 4^2 - 2 \cdot BC \cdot 4 \cdot \cos 35°$

Anomenem $x = BC$

$x^2 - 8 \cdot \cos 35° \cdot x + 7 = 0$

$x = 4\cos 35° \pm \sqrt{16\cos^2 35 - 7} \cong \boxed{\begin{matrix} 5{,}20952 \\ 1{,}34369 \end{matrix}}$

Existeixen dos triangles amb les condicions donades, en què BC pot tenir dos valors possibles