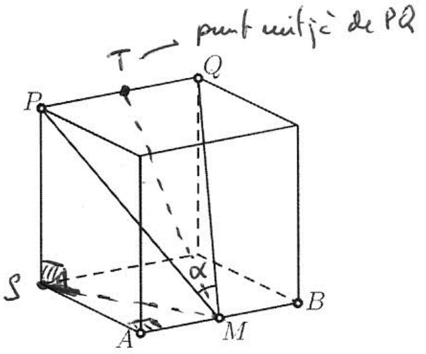
Institut Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R DE BAT — NOM: ______________________
Control 2 de la 3a Avaluació — $10+15+35+15+15+15=105$
05/06/17 — (S'avaluarà sobre 90 punts)

Enunciat 1. Trobeu la mesura de l'angle $\widehat{PMQ}$ en el cub de la figura, si sabem que M és el punt mitjà de l'aresta AB.



→ $\boxed{\text{Alternativa llarga}}$

$AB = a$

- Calculem MP utilitzant el teorema de Pitàgores:

$MP^2 = MS^2 + PS^2 = AS^2 + AM^2 + PS^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{9}{4}a^2$

$MP = \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \frac{3a}{2} = MQ$

- Apliquem el teorema del cosinus sobre $\widehat{PMQ}$

$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 - 2MP\cdot MQ\cdot\cos\alpha$

$a^2 = 2\cdot\frac{9a^2}{4} - 2\cdot\frac{9a^2}{4}\cos\alpha \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2}a^2 - \frac{9}{2}a^2\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\frac{9}{2}a^2 - a^2}{\frac{9}{2}a^2} \Rightarrow$

$\cos\alpha = \dfrac{\frac{7}{2}a^2}{\frac{9}{2}a^2} = \frac{7}{9} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{7}{9}\right) = \boxed{38^\circ 56' 32.79''}$

→ $\boxed{\text{Alternativa curta}}$: $MT = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{PT}{MT} = \frac{a/2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 19^\circ 28' 16.39'' \Rightarrow \alpha = 38^\circ 56' 32.79''$

Enunciat 2. Resoleu les equacions,

a) $\log\sqrt{4x^2-1} = \dfrac{\log 8}{2}$ b) $\sin(2x) + 2\sin^2 x = 1$ c) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{x^2+4x+4}$

a) $\log\sqrt{4x^2-1} = \log\left(8^{1/2}\right) \Rightarrow \sqrt{4x^2-1} = \sqrt{8} \Rightarrow 4x^2-1 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{3}{2}}$

b) $\sin(2x) + 2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin(2x) + \cancel{2}\cdot\frac{1-\cos(2x)}{\cancel{2}} = 1 \Rightarrow \sin(2x) = \cos(2x)$

$\underset{\cos(2x)\neq 0}{\Rightarrow} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 1 \Rightarrow \tan(2x) = 1 \Rightarrow 2x = 45^\circ + n\cdot 180^\circ \Rightarrow \boxed{x = 22^\circ 30' + n\cdot 90^\circ}$

→ això elimina les ~~solucions~~ possibles solucions $\cos(2x)=0$. Aquesta no ho són perquè $\cos(2x)=0 \Rightarrow \sin(2x)\neq 0$ i llavors $\sin(2x)\neq\cos(2x)$

c) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{1}{x+2} = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{No té solució}}$

Enunciat 3. Sigui $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4$. Calculeu els punts de tall del seu gràfic amb els eixos de coordenades, estudieu la monotonia, concavitat, extrems locals i punts d'inflexió de la funció i apliqueu els resultats a traçar el gràfic de $f(x)$.

- Talls OX: $f(x)=0$, ho resolem amb la regla de Ruffini

	1	−3	−5	3	4
1		1	−2	−7	−4
	1	−2	−7	−4	0
−1		−1	3	4	
	1	−3	−4	0	

$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2-3x-4) = 0$

$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

Talls OX: $\boxed{x=1,\ x=-1,\ x=4}$

- Tall OY: $f(0)=4$
- Derivada: $f'(x) = 4x^3-9x^2-10x+3 = 4(x+1)(4x^2-13x+3)$

- Candidats a extrems locals: $f'(x)=0$

	4	−9	−10	3
−1		−4	13	−3
	4	−13	3	0

$\boxed{x=-1}$, $4x^2-13x+3=0 \Rightarrow x = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{8} = \dfrac{13 \pm \sqrt{121}}{8} \simeq \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$

- Candidats a punts d'inflexió: $f''(x)=0$

$f''(x) = 12x^2-18x-10$; $6x^2-9x-5=0 \Rightarrow x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81+120}}{12} = \dfrac{9 \pm \sqrt{201}}{12} \simeq \begin{cases} 1{,}931 \\ -0{,}431 \end{cases}$

- Monotonia

	−1		1/4		3	
$s(f')$	−.+ ⊖		+.+ ⊕	+.−	⊖	+.+ ⊕
$m(f)$	↘		↗	↘		↗

Decreix: $(-\infty,-1) \cup (0{,}25,\ 3)$

Creix: $(-1,\ 0{,}25) \cup (3,\ +\infty)$

Mín local: $x=-1$, $x=3$

Màx local $x = 0{,}25$

- Concavitat

		−0,431		1,931	
$s(f'')$	+		−		+
$c(f'')$	∪		∩		∪

Cònc. amunt: $(-\infty,-0.431) \cup (1.931,+\infty)$

" avall: $(-0.431,\ 1.931)$

Punts d'inflexió: $x=-0{,}431$, $x=1{,}931$

~~$f(3{,}466) \simeq -26{,}26$~~ ~~$f(-0{,}431) \simeq$~~

~~$f(-0{,}216) \simeq 3{,}151$~~

~~$f(-1) = 0$~~

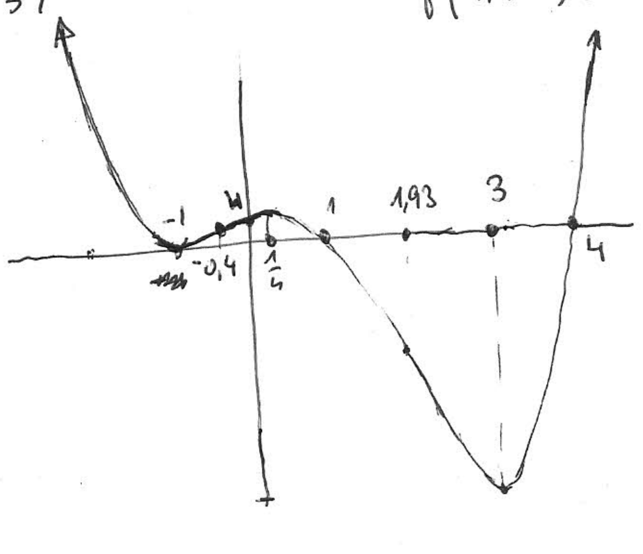
$f(3) = 81-81-45+9+4 = -32$

$f(\frac{1}{4}) \simeq 4{,}39$

$f(-1) = 0$

$f(-0{,}431) \simeq 2{,}05$

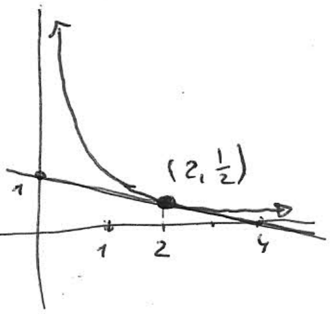
$f(1{,}931) \simeq 13{,}84$



Enunciat 4. Utilitzeu la definició de derivada per calcular la funció derivada de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$. Trobeu, també l'equació de la recta tangent al seu gràfic en el punt d'abscissa $x = 2$ i feu un esquema gràfic de $f(x)$ i la recta quan $x > 0$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \lim \frac{-h}{h\cdot x(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x\cdot x} = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$$

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \iff y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \iff 4y-2 = -x+2 \iff \boxed{x+4y-4=0}$$



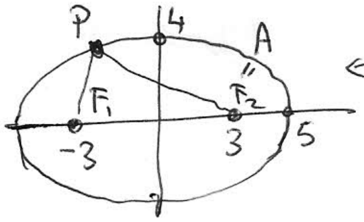
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$f(x)$ és sempre positiva i de derivada negativa. Per tant, ~~decreixe~~ f és decreixent

Enunciat 5. Donada l'equació $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, expliqueu la corba que descriu i trobeu la distància del punt $A(3,0)$ a la recta tangent a la corba en el punt d'abscissa $x = 4$.

- Descriu una el·lipse de semieixos $a = 5$, $b = 4$ i semidistància focal $c = \sqrt{5^2-4^2} = 3$.

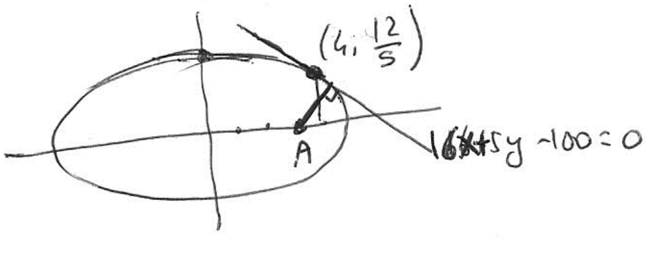


$$\longleftrightarrow \quad d(P,F_1) + d(P,F_2) = 6$$

- Recta tangent en $x = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2} = \frac{4}{5}\sqrt{9} = \frac{12}{5}$

$$\frac{4\cdot x}{25} + \frac{\frac{12}{5}y}{16} = 1 \iff 64x + 60y = 25\cdot 16$$
$$\iff 16x + 15y - 100 = 0$$

$$d\left((3,0),\ 16x+15y-100=0\right) = \frac{|16\cdot 3 + 15\cdot 0 - 100|}{\sqrt{16^2+15^2}} = \frac{52}{\sqrt{481}} = \frac{4\sqrt{481}}{37} \simeq 2{,}371$$

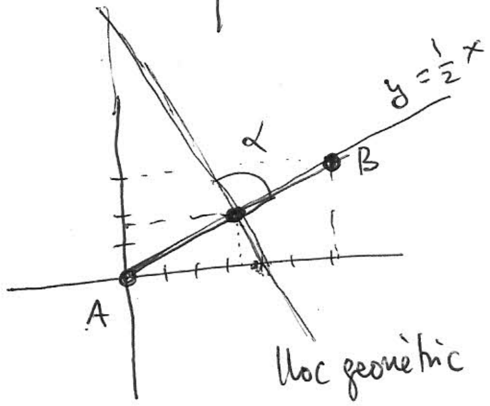


Enunciat 6. Donats els punts $A(0,0)$ i $B(6,3)$, trobeu el lloc geomètric dels punts P tals que $d(P,A)^2 - d(P,B)^2 = 5$. Calculeu l'angle que forma aquest lloc amb la recta que conté els punts A i B.

$P=(x,y)$

Lloc geomètric

$$x^2+y^2-(x-6)^2-(y-3)^2=5$$
$$12x-36+6y-9=5$$
$$12x+6y-50=0$$
$$\boxed{6x+3y-25=0}$$



recta AB: $\frac{x}{6}=\frac{y}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x$

Intersecció de les dues rectes

$$6x+\frac{3}{2}x-25=0$$
$$12x+3x-50=0$$
$$x=\frac{50}{15} \rightarrow y=\frac{25}{15}$$
3,33 1,67

Angle $=\alpha \rightarrow \tan\alpha = \left|\dfrac{-2-\frac{1}{2}}{1+(-2)(+\frac{1}{2})}\right| = \dfrac{+5/2}{0} = ?$ (sembla ser 90°!)

Comprovem-ho amb el producte escalar de vectors directors)

$(-3,6)(2,1)=-6+6=0.$

$\boxed{\text{Són rectes perpendiculars}}$