26 al

Institut Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R DE BAT I — 10/10/16
Nombres, àlgebra — $15+5+15+(15+15+5+10)+10+30=120$

Enunciat 1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. En els resultats no han d'aparèixer ni exponents fraccionaris o negatius, ni nombres decimals. (Cal presentar les diferents etapes del càlcul).

a) $\dfrac{\sqrt{ab^5}\cdot\sqrt[4]{a^5b}}{\sqrt[6]{a^5b}}$ b) $\dfrac{3a}{\sqrt{2a}}+\sqrt{50a^3}-a\sqrt{32a}$ c) $\dfrac{4\sqrt{12}-\sqrt{48}}{8\sqrt{3}-2\sqrt{12}}$

a) $\dfrac{\sqrt{ab^5}\cdot\sqrt[4]{a^5b}}{\sqrt[6]{a^5b}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^6b^{30}a^{15}b^3}{a^{10}b^2}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^{21}b^{33}}{a^{10}b^2}} = \boxed{\sqrt[12]{a^{11}\cdot b^{31}} = b^2\sqrt[12]{a^{11}b^7}}$

b) $\dfrac{3a}{\sqrt{2a}}+\sqrt{50a^3}-a\sqrt{32a} = \dfrac{3\cancel{a}\sqrt{2a}}{2\cancel{a}}+5a\sqrt{2a}-4a\sqrt{2a}$

$= \left(\frac{3}{2}+5a-4a\right)\sqrt{2a} = \boxed{\left(\frac{3}{2}+a\right)\sqrt{2a} = \dfrac{(3+2a)\sqrt{2a}}{2}}$

c) $\dfrac{4\sqrt{12}-\sqrt{48}}{8\sqrt{3}-2\sqrt{12}} = \dfrac{8\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}-4\sqrt{3}} = \boxed{1}$

Enunciat 2. Sabem que $\sqrt{a+b\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$. Trobeu els valors de a i b (*)

$(3-\sqrt{5})^2 = a+b\sqrt{5} \iff 9+5-6\sqrt{5} = a+b\sqrt{5} \iff 14-6\sqrt{5} = a+b\sqrt{5}$

$\Longrightarrow \boxed{a=14,\ b=-6}$ o fixeu-vos que $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = 3-\sqrt{5} \simeq 0{,}7639320225$ (comprovació)

Enunciat 3. Trobeu la descomposició en factors primers de $p(x)=x^5-34x^3+225x$

$p(x) = x(x^4-34x^2+225)$

$p(x)=0 \iff x=0$ o $x^2 = \dfrac{17\pm\sqrt{289-225}}{1} = 17\pm 8 = \begin{cases}25\\9\end{cases}$

• Descomposició de $x^4-34x^2+225 = (x^2-25)(x^2-9)$

• Descomposició de $p(x)$ en factors primers:

$\boxed{p(x) = x(x-5)(x+5)(x-3)(x+3)}$

(*) Hem buscat els valors enters. Si no busquem valors enters sinó reals llavors hi ha infinitat de solucions $b = s \in \mathbb{R}$, $a = 14-(6+s)\sqrt{5}$

Enunciat 4. Sigui $p(x) = -2x^3 - 3x^2 + 23x + 12$.

a) Trobeu-ne les arrels i la descomposició en factors primers.
b) Estudieu el seu signe mitjançant l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles.
c) Deduïu i presenteu a partir de l'estudi anterior un esquema gràfic de la funció $p(x)$.
d) Trobeu els valors dels seus màxim i mínim locals.

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & -3 & 23 & 12 \\ 3 & & -6 & -27 & -12 \\ \hline & -2 & -9 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow p(x) = (x-3)(-2x^2-9x-4)$$

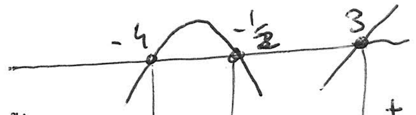
Arrels de $-2x^2-9x-4$:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{-4} = \frac{9 \pm 7}{-4} = \begin{cases} -4 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Arrels de } p(x):\ x = 3,\ x = -4,\ x = -\tfrac{1}{2}}$

Factorització de $p(x)$: $\boxed{p(x) = -2(x-3)(x+4)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = -(x-3)(x+4)(2x+1)}$

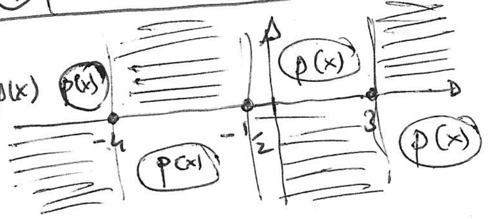
b)



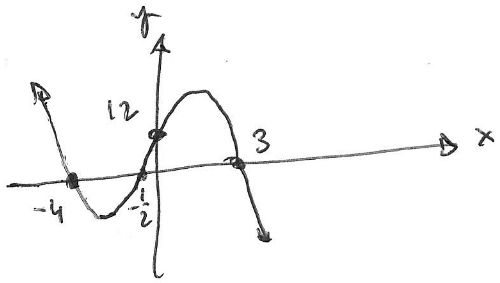
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$-2x^2-9x-4$	$-$	$+$	$-$	$-$
$p(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$p(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -4) \cup (-\tfrac{1}{2}, 3)$
$p(x) < 0 \iff x \in (-4, -\tfrac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$

c) Arrels de $p(x)$ = Talls OX
Signe



$\Rightarrow$



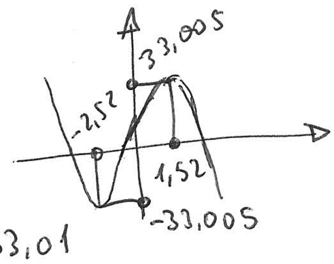
d) Màxim o mínim en x_0 de valor $K \Rightarrow p(x) = K$ té arrel doble en x_0

Imposem la condició i comprovem en el gràfic

$$\begin{array}{r|rrrl} & -2 & -3 & 23 & 12-K \\ x_0 & & -2x_0 & -3x_0-2x_0^2 & \\ \hline & -2 & -3-2x_0 & -2x_0^2-3x_0+23 & \boxed{p(x_0)-K=0} \quad (1) \\ x_0 & & -2x_0 & -4x_0^2-3x_0 & \\ \hline & -2 & -4x_0-3 & \boxed{-6x_0^2-6x_0+23=0} & (2) \end{array}$$

$$(2) \Rightarrow x_0 = \frac{3 \pm \sqrt{9+138}}{-6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{147}}{6} \simeq \begin{cases} 1{,}52 \\ -2{,}52 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow K = p(x_0) = \begin{cases} p(1{,}52) \simeq 33{,}005 \\ p(-2{,}52) \simeq -33{,}005 \end{cases}$$



Màxim Local en $x_0 \simeq 1{,}52$ de valor $p(1{,}52) \simeq 33{,}01$
Mínim Local en $x_0 = -2{,}52$ de valor $p(-2{,}52) \simeq -33{,}01$

Enunciat 5. Estudieu per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$, el nombre $x = \sqrt{a^3 - 3a}$ és real.

$a^3 - 3a \geq 0 \iff a(a^2-3) \geq 0 \iff$

↓

Estudiem el signe →

	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
a	$-$	$-$	$+$	$+$
a^2-3	$+$	$-$	$-$	$+$
$a(a^2-3)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Per $a \in [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$, x és real

Enunciat 6. Raoneu a quins conjunts de nombres (naturals, enters, racionals, irracionals), pertanyen cadascun dels nombres següents: (no s'accepten raonaments basats en l'ús de la calculadora i les afirmacions que feu cal demostrar-les)

a) $\sqrt{2}$.

b) $3 + \frac{7}{10} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^5} + \frac{2}{10^7} + \cdots$

c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, en què a, b, c, d són enters i $b \neq 0$ i $d \neq 0$.

m.c.d $(p,q) = 1$

a) $\sqrt{2}$ és irracional perquè si fos racional seria $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

llavors $2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \cdot q \cdot q = p \cdot p \Rightarrow p$ és parell $(p = 2 \cdot k)$

$\Rightarrow 2 \cdot q \cdot q = 2k \cdot 2k \Rightarrow q \cdot q = 2k \cdot k \Rightarrow q$ és parell

I això no pot ser perquè tenia m.c.d $(p,q) = 2$ contradicció amb

b) $3,7020202\ldots = 3,7\overline{02} = \frac{3702-37}{990} \overset{(*)}{=} \frac{3665}{990}$ és racional

c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ en què $ad+bc \in \mathbb{Z}$ i $b \cdot d \neq 0$, per tant és racional.

(*)

$$
\begin{aligned}
1000 \cdot 3,7\overline{02} &= 3702,\overline{02} \\
10 \cdot 3,7\overline{02} &= 37,\overline{02} \\
\hline
990 \cdot 3,7\overline{02} &= 3702 - 37 \\
3,7\overline{02} &= \frac{3702-37}{990} = \frac{3665}{990}
\end{aligned}
$$