29 al

Institut Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R DE BAT II
Nombres, àlgebra

10/10/16
$15+5+15+(15+15+5+10)+10+30=120$

Enunciat 1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. En els resultats no han d'aparèixer ni exponents fraccionaris o negatius, ni nombres decimals. (Cal presentar les diferents etapes del càlcul).

a) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4y}\cdot\sqrt[4]{x^7y^3}}{\sqrt{xy}}$ b) $\sqrt{27a^3}-a\sqrt{\dfrac{3}{a}}-2a\sqrt{3a}$ c) $\dfrac{3\sqrt{50}-\sqrt{8}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4y}\cdot\sqrt[4]{x^7\cdot y^3}}{\sqrt{xy}} = \sqrt[12]{\dfrac{x^{16}y^4x^{21}y^9}{x^6y^6}} = \sqrt[12]{\dfrac{x^{37}\cdot y^{13}}{x^6\cdot y^6}} = \sqrt[12]{x^{31}\cdot y^7} = \boxed{x^2\sqrt[12]{x^7\cdot y^7}}$

b) $\sqrt{27a^3}-a\sqrt{\dfrac{3}{a}}-2a\sqrt{3a} = 3a\sqrt{3a}-a\dfrac{\sqrt{3a}}{a}-2a\sqrt{3a} =$

$= \sqrt{3a}(3a-1-2a) = \boxed{\sqrt{3a}\,(a-1)}$

c) $\dfrac{3\sqrt{50}-\sqrt{8}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{2}} = \dfrac{15\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{9\sqrt{2}-2\sqrt{2}} = \dfrac{13\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{13}{7}}$

Enunciat 2. Sabem que $\sqrt{a+b\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$. Trobeu els valors de a i b

$(\sqrt{3}-2)^2 = 3+2-4\sqrt{3} = 5-4\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{a+b\sqrt{3}} = \sqrt{5-4\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{a=5,\ b=-4}$

Enunciat 3. Trobeu la descomposició en factors primers de $p(x)=x^5-5x^3-36x$

$p(x) = x(x^4-5x^2-36)$

$x^2=t \Rightarrow x^4-5x^2-36 = t^2-5t-36$, busquem les arrels "t"

$t^2-5t-36=0 \Rightarrow t = \dfrac{5\pm\sqrt{25+144}}{2} = 9,\ -4$

Per tant $t^2-5t-36=(t-9)(t+4)$

En ser $x^2=t$ tenim $p(x) = \boxed{x(x^2-9)(x^2+4) = x(x-3)(x+3)(x^2+4)}$

Enunciat 4. Sigui $p(x) = -3x^3 + 2x^2 + 19x + 6$.

a) Trobeu-ne les arrels i la descomposició en factors primers.
b) Estudieu el seu signe mitjançant l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles.
c) Deduïu i presenteu a partir de l'estudi anterior un esquema gràfic de la funció $p(x)$.
d) Trobeu els valors dels seus màxim i mínim locals.

a)

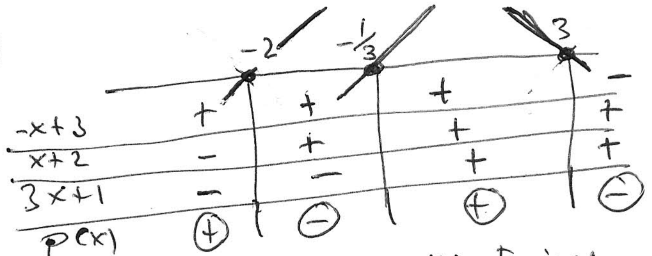
$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 2 & 19 & 6 \\ 3 & & -9 & -21 & -6 \\ \hline & -3 & -7 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow p(x) = (x-3)(-3x^2-7x-2)$$

Arrels de $-3x^2-7x-2 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{-6} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

Arrels de $p(x)$: $\boxed{x = 3,\ x = -2,\ x = -\frac{1}{3}}$

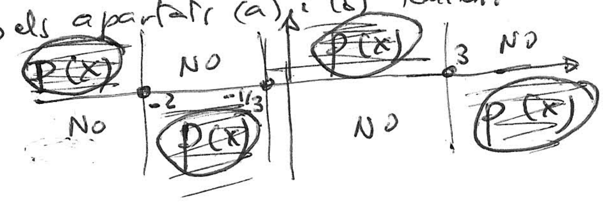
Descomposició: $\boxed{p(x) = -3(x-3)(x+2)(x+\frac{1}{3}) = \underbrace{-(x-3)}_{(-x+3)}(x+2)(3x+1)}$

b)

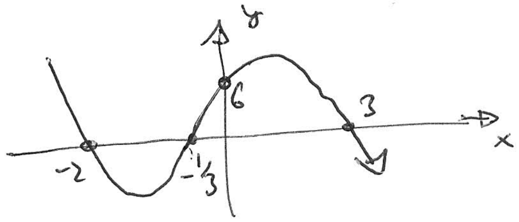


$\Rightarrow \begin{cases} p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{3}, 3) \\ p(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -\frac{1}{3}) \cup (3, +\infty) \end{cases}$

c) Dels apartats (a) i (b) tenim:



$\Rightarrow$



d) Màxim o mínim en x_0 de valor $K \Rightarrow p(x) = K$ té arrel doble en x_0

Imposem la condició i comprovem en el gràfic

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 2 & 19 & 6-K \\ x_0 & & -3x_0 & -3x_0^2+2x_0 & \\ \hline & -3 & -3x_0+2 & -3x_0^2+2x_0+19 & \boxed{p(x_0)-K=0} \ (1) \\ x_0 & & -3x_0 & -6x_0^2+2x_0 & \\ \hline & -3 & -6x_0+2 & \boxed{-9x_0^2+4x_0+19=0} \ (2) & \end{array}$$

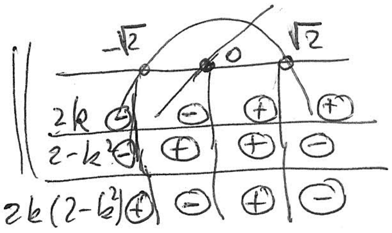
$(2) \Rightarrow x_0 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+171}}{-9} = \frac{-2 \pm \sqrt{175}}{-9} \simeq \boxed{\begin{matrix} -1{,}25 \\ 1{,}69 \end{matrix}}$ $\qquad K = p(x_0) \simeq \boxed{\begin{matrix} -8{,}77 \\ 29{,}34 \end{matrix}}$

Màxim local en $x_0 \simeq 1{,}69$ de valor $p(x_0) \simeq 29{,}34$
Mínim local en $x_0 \simeq -1{,}25$ de valor $p(x_0) \simeq -8{,}77$

Enunciat 5. Estudieu per a quins valors de $k \in \mathbb{R}$, el nombre $x = \sqrt{4k - 2k^3}$ és real.

$4k - 2k^3 \geq 0 \iff 2k\,(2 - k^2) \geq 0$

Estudio el signe de $2k(2-k^2)$



$\boxed{\text{Si } k \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [0, \sqrt{2}] \text{ llavors existeix "}x\text{"}}$ $\Longleftarrow$

Enunciat 6. Raoneu a quins conjunts de nombres (naturals, enters, racionals, irracionals), pertanyen cadascun dels nombres següents: (no s'accepten raonaments basats en l'ús de la calculadora i les afirmacions que feu cal demostrar-les)

a) $\sqrt{8} - \sqrt{2}$.

b) $1.\widehat{6} \; - 1.\widehat{06} \; - \dfrac{20}{33}$

c) $\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{s}$, en què p, q, r, s són enters i $q \neq 0$ i $s \neq 0$.

a) $\sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ és irracional

Per què si fos racional $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, $\left\{ \begin{array}{l} p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \\ \text{mcd}(p,q) = 1 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2qq = p \cdot p \Rightarrow p$ és parell $(p = 2k) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2} \cdot q \cdot q = \cancel{2}k \cdot 2k \Rightarrow q \cdot q = 2k \cdot k \Rightarrow q$ és parell i

això és contradictori amb

b) $1,\widehat{6} - 1,\widehat{06} - \dfrac{20}{33} = \dfrac{16-1}{9} - \dfrac{106-1}{99} - \dfrac{20}{33} = \dfrac{165 - 105 - 60}{99} = \dfrac{0}{99} = 0$

És natural, enter i racional

c) $\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{s} = \dfrac{ps + qr}{qs}$ és racional en ser $ps + qr \in \mathbb{Z}$ i $q \cdot s \in \mathbb{Z}$ i $q \cdot s \neq 0$