Enunciat 1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. En els resultats no han d'aparèixer ni exponents fraccionaris o negatius, ni nombres decimals. (Cal presentar les diferents etapes del càlcul).

a) $\dfrac{\sqrt{a^2b^3}\cdot\sqrt[5]{a^3b^4}}{\sqrt[3]{a^2b^5}}$ b) $\dfrac{3}{4\sqrt{2}}+2\sqrt{32}-3\sqrt{8}$ c) $\dfrac{a^3-ab}{a-\sqrt{b}}$

a) $\sqrt[30]{\dfrac{a^{30}b^{45}a^{18}b^{24}}{a^{20}b^{50}}} = \sqrt[30]{\dfrac{a^{48}b^{69}}{a^{20}b^{50}}} = \boxed{\sqrt[30]{a^{28}b^{19}}}$

b) $\dfrac{3}{4\sqrt2}+2\sqrt{32}-3\sqrt{8} = \dfrac{3\sqrt2}{8}+2\cdot4\sqrt2-3\cdot2\sqrt2 = \left(\dfrac{3}{8}+8-6\right)\sqrt2$

$= \left(\dfrac{3+2\cdot8}{8}\right)\sqrt2 = \boxed{\dfrac{19\sqrt2}{8}}$

c) $\dfrac{a^3-ab}{a-\sqrt b} = \dfrac{a(a^2-b)}{a-\sqrt b} = \dfrac{a(a+\sqrt b)(a-\sqrt b)}{a-\sqrt b} = \boxed{a(a+\sqrt b) = a^2+a\sqrt b}$

Enunciat 2. Sigui $p(x)=x^8-x^5$.

a) Trobeu-ne les arrels i la descomposició en factors primers.
b) Estudieu el seu signe mitjançant l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles.

a) $p(x) = x^8-x^5 = x^5(x^3-1) = x^5(x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}$

Arrels de x^3-1:

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

No té arrels perquè $1^2-4\cdot1\cdot1<0$

Arrels de $p(x)$: $p(x)=0 \iff x=0$ o $x=1$
Descomposició: $p(x) = x^5(x-1)(x^2+x+1)$

b) x, x^2+x+1

	0		1	
x^5	$(-1)^5=-$	$(+1)^5=+$		$(+1)^5=+$
$x-1$	$-$	$-$		$+$
x^2+x+1	$+$	$+$		$+$
$p(x)$	$+$	$-$		$+$

$p(x)>0 \iff x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$
$p(x)<0 \iff x\in(0,1)$

Enunciat 3. Resoleu: a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy=120 \end{cases}$ b) $2x-\sqrt{6x-1}=\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{2x^2-2}=\dfrac{1}{2x^3-2x}$

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy=120 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1+2y \\ xy=120 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1+2y \\ (1+2y)y=120 \end{cases} \Rightarrow 2y^2+y-120=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+960}}{4}=\dfrac{-1\pm 31}{4}= \begin{cases} \frac{30}{4}=\frac{15}{2} \rightarrow x=16 \\ -\frac{32}{4}=-8 \rightarrow x=-15 \end{cases} \Rightarrow$ $x=16,\ y=\frac{15}{2}$; $x=-15,\ y=-8$

b) $6x-3\sqrt{6x-1}=1 \iff 6x-1=3\sqrt{6x-1} \iff (6x-1)^2=9(6x-1)$

$\iff 36x^2-12x+1=54x-9 \iff 36x^2-66x+10=0 \iff 18x^2-33x+5=0$

$\iff x=\dfrac{33\pm\sqrt{1089-360}}{36}=\dfrac{33\pm 27}{36}= \begin{cases} \frac{60}{36}=\frac{5}{3} \\ \frac{6}{36}=\frac{1}{6} \end{cases}$ $\boxed{x=\frac{5}{3},\ x=\frac{1}{6}}$

Comprovació: $6\cdot\frac{5}{3}-3\sqrt{6\cdot\frac{5}{3}-1}=10-3\sqrt{9}=10-9=1$

$6\cdot\frac{1}{6}-3\sqrt{6\cdot\frac{1}{6}-1}=1-3\cdot 0=1-0=1$

c) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{2x^2-2}=\dfrac{1}{2x^3-2x} \Rightarrow x\,2x(x+1)+x\cdot x=1 \Rightarrow 2x^3+2x^2+x^2=1 \Rightarrow 2x^3+3x^2-1=0$

$x-1$
$2x^2-2=2(x-1)(x+1)$
$2x^3-2x=2(x^3-x)=2x(x-1)(x+1)$
$\rightarrow$ m.c.m $=2x(x-1)(x+1)$

Apliquem la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & & -2 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$2x^3+3x^2-1=(x+1)(2x^2+x-1) \rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{-1\pm 3}{4}= \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$

La solució $x=-1$ no és bona perquè no es pot dividir per zero.

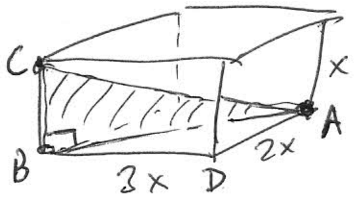
Solució: $\boxed{x=\frac{1}{2}}$

Enunciat 4. Trobeu un polinomi de segon grau amb coeficients enters que tingui una arrel igual a $1+\sqrt{2}$.

$x=1+\sqrt{2} \Rightarrow x-1=\sqrt{2} \Rightarrow (x-1)^2=2 \Rightarrow x^2-2x+1=2$

$\Rightarrow \boxed{x^2-2x-1=0}$

Enunciat 5. Un ortoedre té les seves arestes tals que la mitjana mesura el doble de la petita i la gran mesura el triple de la petita. Si sabem que el seu volum és de 750 cm^3, calculeu la longitud de la seva diagonal interna.



$750 = \text{Volum} = x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{750}{6} = 125 \Rightarrow x = 5$

Diagonal interna $= AC$. Apliquem el teorema de Pitàgoras

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2 + DB^2 + BC^2 = 10^2 + 15^2 + 5^2 = 350 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{350} \text{ cm} = 5\sqrt{14} \text{ cm} \simeq \boxed{18{,}708 \text{ cm}}$

Enunciat 6. Trobeu el coeficient del terme de grau 6 del desenvolupament de $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{30}$.

$T_{k+1} = \binom{30}{k} x^{30-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \binom{30}{k} x^{30-k-2k} = \binom{30}{k} \cdot x^{30-3k}$

Grau 6 $\Leftrightarrow 30 - 3k = 6 \Leftrightarrow 3k = 24 \Leftrightarrow k = 8 \Rightarrow T_{k+1} = T_9$

Coeficient de $T_9 = \boxed{\binom{30}{8}} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{5852925}$.

Enunciat 7. Considereu el polinomi $p(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 2$. Sabem que és divisible per $x - 1$ i que el residu resultant de dividir-lo per $x + 2$ és igual a -12. Calculeu a i b.

$p(x)$ divisible per $x - 1 \Leftrightarrow 0 = p(1) = 3 + a + b - 2$

teorema del residu

Residu de $p(x)$ entre $x + 2 = -12 \Leftrightarrow -12 = p(-2) = -24 + 4a - 2b - 2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (-4)\cdot \left\{ \begin{array}{l} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 14 \end{array} \right. \\ \hline \quad -6b = 18 \end{array} \quad \begin{array}{l} b = -3 \\ a = -1 + 3 = 2 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -3 \end{array}}$$