Enunciat 1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. En els resultats no han d'aparèixer ni exponents fraccionaris o negatius, ni nombres decimals. (Cal presentar les diferents etapes del càlcul).

a) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3y^2}\cdot\sqrt[3]{xy^4}}{\sqrt[6]{x^7y^5}}$ b) $5\sqrt{3}+\dfrac{9}{4\sqrt{3}}-3\sqrt{243}$ c) $\dfrac{xy-x^3}{\sqrt{y}-x}$

a) $\sqrt[12]{\dfrac{x^9y^6x^4y^{16}}{x^{14}y^{10}}} = \sqrt[12]{\dfrac{x^{13}y^{22}}{x^{14}y^{10}}} = \dfrac{\sqrt[12]{y^{12}}}{\sqrt[12]{x}}\cdot\dfrac{\sqrt[12]{x^{11}}}{\sqrt[12]{x^{11}}} = \boxed{\dfrac{\sqrt[12]{x^{11}y^{12}}}{x}} = \boxed{\dfrac{y\sqrt[12]{x^{11}}}{x}}$

b) $5\sqrt{3}+\dfrac{9\sqrt{3}}{4\cdot 3}-3\cdot 9\sqrt{3} = \left(5+\dfrac{3}{4}-27\right)\sqrt{3} = \left(\dfrac{3}{4}-22\right)\sqrt{3} = \boxed{\dfrac{-85\sqrt{3}}{4}}$

c) $\dfrac{xy-x^3}{\sqrt{y}-x} = \dfrac{x(y-x^2)}{\sqrt{y}-x} = \dfrac{x(\sqrt{y}+x)(\sqrt{y}-x)}{\sqrt{y}-x} = \boxed{x(\sqrt{y}+x) = x\sqrt{y}+x^2}$

Enunciat 2. Sigui $p(x)=x^9+x^6$.

a) Trobeu-ne les arrels i la descomposició en factors primers.
b) Estudieu el seu signe mitjançant l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles.

a) $p(x)=x^9+x^6=x^6(x^3+1)$ $\longrightarrow$ arrels $\longrightarrow$

	1	0	0	1
−1		−1	1	−1
	1	−1	1	0

$\hookrightarrow$ arrels $\rightarrow$ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}$ = no existeixen

Factorització:
$p(x)=x^6(x+1)(x^2-x+1)$
Arrels: $p(x)=0 \Rightarrow x=0$ o $x=-1$

b) x^2-x+1

		−1		0	
x^6	+		+		+
$x+1$	−		+		+
x^2-x+1	+		+		+
$p(x)$	−		+		+

$\Rightarrow$

$x^6>0$, per a tots els $x\in\mathbb{R}$ excepte $x=0$ en què $x^6=0$

$p(x)>0 \iff x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$
$p(x)<0 \iff x\in(-\infty,-1)$

Enunciat 3. Resoleu: a) $\begin{cases} x-y=\frac{3}{2} \\ 3x^2+4y^2=36 \end{cases}$ b) $21-\sqrt{2x-1}=2x$ c) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{2x^2-2}=\dfrac{1}{2x^3-2x}$

a) $y = x-\frac{3}{2} \Rightarrow 3x^2+4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=36 \Rightarrow 3x^2+4x^2+9-12x=36$

$\Rightarrow 7x^2-12x-27=0 \Rightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{36+189}}{7}=\dfrac{6\pm\sqrt{225}}{7}=\dfrac{6\pm15}{7}= \begin{cases} 3 \\ -\frac{9}{7}\end{cases}$

$x=3 \Rightarrow y=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

$x=-\frac{9}{7} \Rightarrow y=-\frac{9}{7}-\frac{3}{2}=\dfrac{-18-21}{14}=\dfrac{-39}{14}$ $\left\{ \boxed{\begin{array}{l} x=3,\ y=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{9}{7},\ y=\frac{-39}{14}\end{array}} \right.$

b) $21-2x=\sqrt{2x-1} \Leftarrow 441-84x+4x^2=2x-1 \Leftrightarrow 4x^2-86x+442=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-43x+221=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{43\pm\sqrt{1849-1768}}{4}=\dfrac{43\pm9}{4}= \begin{cases} 13 \\ \frac{34}{4}=\frac{17}{2}\end{cases}$

Comprovació:

$\begin{cases} 21-2\cdot13=-5 \\ \sqrt{2\cdot13-1}=5 \end{cases}$ $x=13$ no és solució.

$\begin{cases} 21-17=4 \\ \sqrt{17-1}=4 \end{cases}$ $\boxed{\text{Solució: } x=\frac{17}{2}}$

c) $\left.\begin{array}{l} x-1 \\ 2x^2-2=2(x-1)(x+1) \\ 2x^3-2x=2x(x-1)(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mcm}=2x(x-1)(x+1)$

$x\cdot2x(x+1)+x\cdot x=1 \Rightarrow 2x^3+2x^2+x^2=1 \Rightarrow 2x^3+3x^2-1=0$

Aplicarem la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & & -2 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

L'arrel $x=-1$ no és bona perquè no es pot dividir per zero.

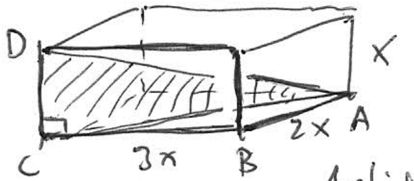
Les arrels $\rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}= \begin{cases}\frac{1}{2} \\ -1\end{cases}$

Solució: $\boxed{x=\frac{1}{2}}$

Enunciat 4. Trobeu un polinomi de segon grau amb coeficients enters que tingui una arrel igual a $3-\sqrt{2}$.

$x=3-\sqrt{2} \Rightarrow x-3=-\sqrt{2} \Rightarrow (x-3)^2=2 \Rightarrow \boxed{x^2-6x+7=0}$

Enunciat 5. Un ortoedre té les seves arestes tals que la mitjana mesura el doble de la petita i la gran mesura el triple de la petita. Si sabem que el seu volum és de 750 cm^3, calculeu la longitud de la seva diagonal interna.



$750 = \text{Volum} = x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3$

$x^3 = \frac{750}{6} = 125 \Rightarrow \boxed{x = 5 \text{ cm}}$

Apliquem el teorema de Pitàgores sobre ACD i sobre ABC:

$\text{Diagonal} = AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{CD^2 + AB^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2} = x\sqrt{14} = 5\sqrt{14}$

$\boxed{\text{Diagonal} = 5\sqrt{14} \text{ cm} \simeq 18{,}708 \text{ cm}}$

Enunciat 6. Trobeu el coeficient del terme de grau 35 del desenvolupament de $\left(x + \sqrt{x}\right)^{40}$.

$T_{k+1} = \binom{40}{k} x^{40-k} (\sqrt{x})^k = \binom{40}{k} x^{40-k} \cdot x^{\frac{k}{2}} = \binom{40}{k} x^{40-k+\frac{k}{2}} = \binom{40}{k} x^{40-\frac{k}{2}}$

$0 \leq k$

Imposem que el grau sigui 35: $40 - \frac{k}{2} = 35 \Rightarrow 80 - k = 70 \Rightarrow \boxed{k = 10}$

Per tant el terme és $T_{11} = \binom{40}{10} x^{35}$

I el coeficient és $\boxed{\binom{40}{10} = \frac{40 \cdot 39 \cdots 32 \cdot 31}{10!} = 847\,660\,528}$

Enunciat 7. Considereu el polinomi $p(x) = 3x^3 + ax^2 + 3x + b$. Sabem que té una arrel en $x = -2$ i que el residu resultant de dividir-lo per $x + 3$ és igual a -25. Calculeu a i b.

$\left.\begin{array}{l} 0 = p(-2) = -24 + 4a - 6 + b \\ -25 = p(-3) = -81 + 9a - 9 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (4a + b = 30)\ (-1) \\ 9a + b = 65 \\ \hline 5a = 35 \Rightarrow a = 7 \end{array}$

$\Downarrow$

$b = 30 - 4 \cdot 7 = 2$

$\boxed{\begin{array}{l} a = 7 \\ b = 2 \end{array}}$